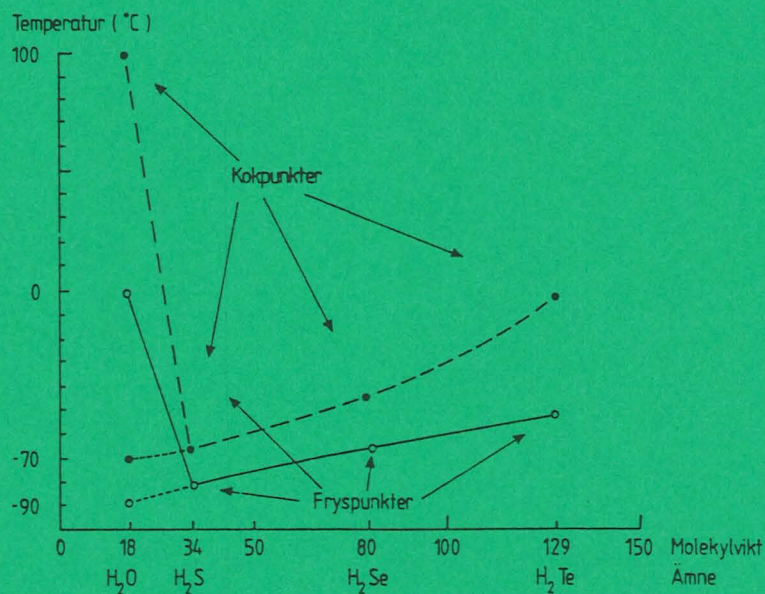




KOMPENDIUM I AGRONOMISK HYDROMEKANIK

1: GRUNDLÄGGANDE BEGREPP

John Sandsborg och Anders Bjerketorp



2:a upplagan

Institutionen för markvetenskap

Avdelningsmeddelande 88:4

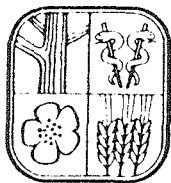
Avdelningen för lantbrukets hydroteknik

UPPSALA

1993

ISSN 0282-6569

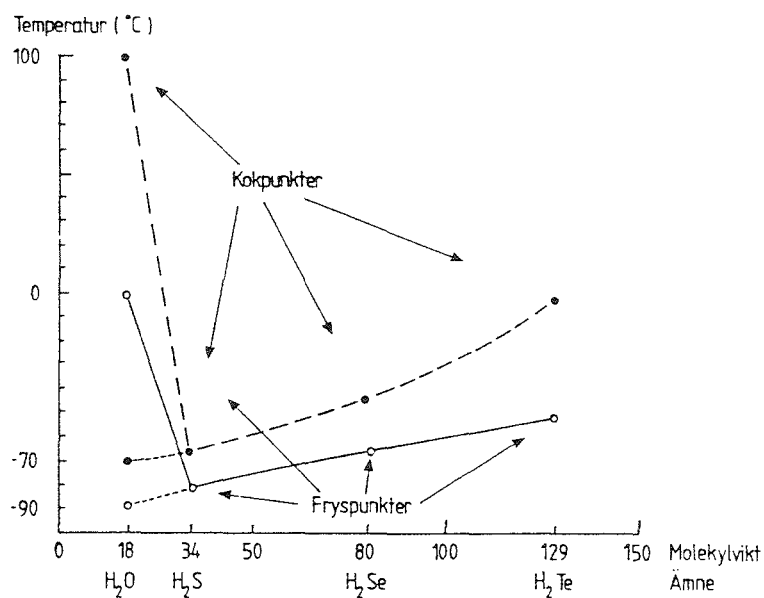
ISBN 91-576-3655-9



KOMPENDIUM I AGRONOMISK HYDROMEKANIK

1: GRUNDLÄGGANDE BEGREPP

John Sandsborg och Anders Bjerketorp



2:a upplagan

Institutionen för markvetenskap

Avdelningsmeddelande 88:4

Avdelningen för lantbrukets hydroteknik

UPPSALA

1993

ISSN 0282-6569

ISBN 91-576-3655-9

FÖRORD TILL 1:A UPPLAGAN

Sommaren 1985 förelåg ett omfattande, men för publicering ej färdigställt manuskript i 12 kapitel och 2 bilagor, betitlat "Kompendium i elementär hydromekanik" och författat av universitetslektor, agronomie doktor John Sandsborg. Från 1969 till 1984 hade Sandsborg handhaft undervisningen i hydromekanik för studerande vid Lantbrukshögskolan/Lantbruksvetenskapliga fakulteten och redan 1973 givit ut ett fylligt kompendium i ämnet. Hösten 1985 måste Sandsborg, på grund av en allvarlig sjukdom, i förtid upphöra med hydromekanikundervisningen. Denna övertogs av agronomie licentiat Anders Bjerketorp, vilken då sedan länge varit den vid avdelningen för lantbrukets hydroteknik som jämsides med Sandsborg ägnat speciellt intresse åt hydromekanik och åt hydromekaniska tillämpningar inom avdelningens verksamhetsfält, i den tradition som tidigare förvaltats av bl a Herman Flodkvist, Yngve Gustafsson och Sigvard Andersson. Sandsborg och Bjerketorp kom också överens om att tillsammans färdigställa manuskriptet för utgivning och Bjerketorp skred omgående till verket att granska och justera texten. Sedan Sandsborg i februari 1986 avlidit har Bjerketorp fortsatt arbetet med att redigera, korrigera och komplettera manuskriptet, så att de första delarna (sektionerna) nu efter tre år är redo för publicering. Den första sektionen, "Grundläggande begrepp", utgör en grundlig bearbetning och i någon mån en utvidgning av kapitel 1 i ovannämnda manuskript, vartill fogats ett översett och kompletterat, mindre avsnitt av ursprungstextens bilaga 2 (appendix B).

Viktiga, och med tacksamhet noterade, insatser har gjorts av den tidigare institutionssekreteraren Margit Zetterberg, som skrivit ut det ursprungliga manuskriptet på maskin, samt institutionssekreterare Maj-Britt Brolin, som med aldrig svikande flit, tålamod och fyndighet överfört den bearbetade och i många omgångar justerade versionen till ordbehandlingsdokument.

Uppsala i november 1988

Janne Eriksson
Professor

FÖRORD TILL 2:A UPPLAGAN

I denna nya upplaga har texten ytterligare genomsetts och kompletterats. Även figurmaterialet har granskats och, under förtjänstfull medverkan av ingenjör Hans Johansson, i betydande utsträckning justerats. Avsnitten 1.10.4. och 1.11. har tillkommit. Huvudtiteln har ändrats till "Kompendium i agronomisk hydromekanik".

Uppsala i juli 1993

Anders Bjerketorp

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	Sid.
1. GRUNDLÄGGANDE BEGREPP	1:1
1.1. ALLMÄNT OM FLUIDERS FYSIKALISKA KARAKTERISTIKA	1:1
1.2. STORHETER OCH ENHETER	1:4
1.2.1. Systême International d'Unités (SI)	1:4
1.2.2. Densitetsbegrepp och volymitet	1:5
1.2.3. Densiteten hos en gas. Gaskonstanter	1:6
1.2.4. Något om g-värdets variation	1:7
1.3. SAMMANTRYCKBARHET, ELASTICITET	1:8
1.4. ÅNGTRYCK	1:9
1.5. VISKOSITET	1:9
1.5.1. Dynamisk (absolut) viskositet	1:9
1.5.2. Kinematisk viskositet	1:17
1.6. YTSPÄNNING. KAPILLARITET	1:18
1.7. VATTNETS MOLEKYLARFYSIK	1:24
1.7.1. Intermolekylära krafter	1:24
1.7.2. Isens kristallstruktur	1:25
1.7.3. Vattnets termiska egenskaper	1:26
1.7.4. Vattnets dielektriska egenskaper	1:27
1.7.5. Ytterligare några data om vatten	1:28
1.8. OMNÄMND LITTERATUR	1:29
1.9. BIHANG 1.1: VATTNETS DENSITET M M	1:30
1.10. BIHANG 1.2: NÅGRA ALLMÄNNA FYSIKALISKA ELEMENTA	1:31
1.10.1. Ett urval grundläggande lagar	1:31
1.10.2. Kraftsystem	1:32
1.10.3. d'Alemberts princip	1:32
1.10.4. Friktionsfri kaströrelse	1:33
1.11. BIHANG 1.3: GREKISKA BOKSTÄVER	1:36

1. GRUNDLÄGGANDE BEGREPP

1.1 ALLMÄNT OM FLUIDERS FYSIKALISKA KARAKTERISTIKA

Materia existerar i tre tillstånd: fast, flytande och gasformigt. Fasta kroppar skiljer sig från vätskor och vätskor från gaser ifråga om molekylavstånd och i fråga om molekylernas rörelseaktivitet. Dessa "variabler" är stora i en gas, mindre i en vätska och mycket små i en fast kropp. De intermolekylära kohesiva krafterna är följaktligen stora i en fast kropp, mindre i en vätska och små i en gas. Dessa fundamentala förhållanden förklarar tätheten och stelheten hos fasta kroppar, möjligheten för en vätskas molekyler att röra sig fritt inom en vätskevolym och gasers egenskaper att fullständigt fylla de rum där de befinner sig.

Trots rörligheten hos molekylerna och avståndet dem emellan, antages en vätska eller en gas (vid mekaniska beräkningar) vara ett s k kontinuum, där det inte existerar några håligheter eller andra tomrum.

En mycket viktig karakteristik av tillståndsegenskaperna hos fasta kroppar, vätskor och gaser (de två sistnämnda brukar med ett gemensamt namn kallas fluider) kan göras med utgångspunkt från hur de reagerar under olika former av belastningar.

Sammantryckning av, eller anbringandet av skjuvspänningar på, en fast kropp resulterar i en elastisk deformation, eller, om dessa spänningar överskrider den s k elasticitetsgränsen, i en permanent förändring av materialet.

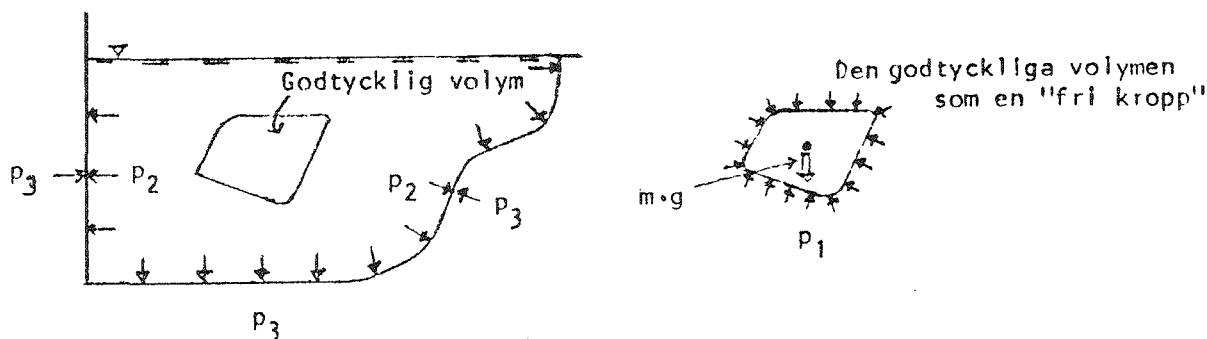
Fluider uppvisar endast vid skjuvspänningsfri kompression liknande elasticitetsegenskaper som fasta kroppar. Anbringande av en aldrig så liten skjuvspänning på en vätska eller en gas medför däremot en kontinuerlig och permanent förändring. Fluiders oförmåga att motstå skjuvspänningar ger dem deras karakteristiska egenskaper att förändra form och att flyta.

Skjuvspänningar spelar en stor roll när verkliga vätskor och gaser strömmar. Utan strömning kan emellertid skjuvspänningar ej existera. Kompression eller tryck är den enda påkänning som behöver beaktas vid s k vila (vilotillstånd).

Eftersom fluider i vila ej kan upptaga några som helst skjuvspänningar, så kan det vid statiska tillstånd inte förefinnas någon belastningskomponent som är tangentiell vare sig till en fast avgränsning eller till en godtyckligt lagd sektion genom fluidkroppen. Detta innebär att det i en godtycklig punkt i fluiden rådande trycket måste överföras till fluidens

fasta avgränsningar längs sådana normaler till dessa avgränsningar som passerar punkten ifråga. På samma sätt gäller att trycket i punkten förmedlas till ett godtyckligt tvärsnitt längs den normal till tvärsnittet vilken går genom punkten.

Vidare kan konstateras, att om en viss del av fluiden isoleras som "fri kropp", såsom visas i figur 1.1, så måste trycket, p_1 , mot den "fria kroppen" vara riktat inåt (sammantryckning).

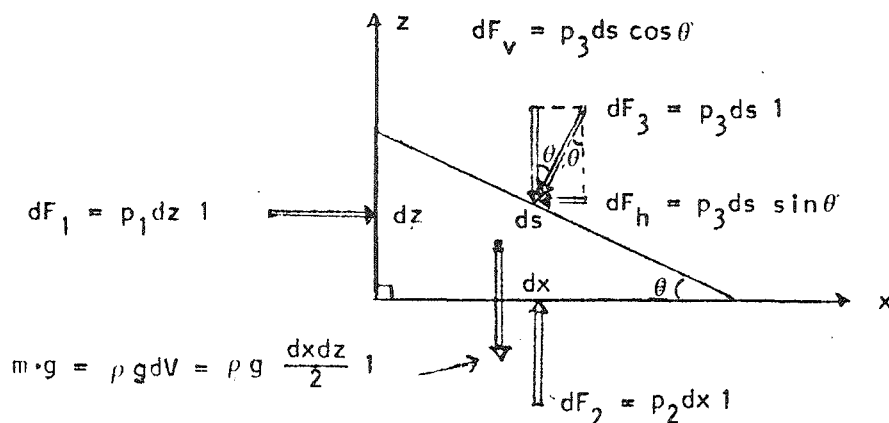


Figur 1.1

Tryck utövade av vätskan eller gasen på behållarnas väggar, p_2 , kommer naturligtvis att vara riktade utåt, men deras mottryck, p_3 , är riktade inåt, liksom p_1 .

En annan egenhet, som är knuten till vätske- och gastyck, är att trycket i varje godtyckligt vald punkt i en fluid i vila har samma storlek i alla riktningar.

Denna egenskap kan bevisas på följande sätt: Vi betraktar en fri vätske- eller gaskropp (fig. 1.2), som har breddenheten vinkelrätt mot papperets plan.



Figur 1.2

Om vi antar att p_1 , p_2 och p_3 är medeltrycken på respektive ytor på elementet och att ρg är fluidens tyngddensitet, kan vi teckna villkoren för statisk jämvikt sålunda:

$$\Sigma F_x = p_1 dz - p_3 \cdot ds \cdot \sin \theta = 0 \quad [1]$$

$$\Sigma F_z = p_2 dx - \rho \cdot g \frac{dx dz}{2} - p_3 \cdot ds \cdot \cos \theta = 0 \quad [2]$$

Vi har också att $dz = ds \cdot \sin \theta$, varför formel [1] kan skrivas

$$p_1 \cdot ds \cdot \sin \theta - p_3 \cdot ds \cdot \sin \theta = 0$$

eller

$$(p_1 - p_3) \cdot ds \cdot \sin \theta = 0$$

som ger $p_1 = p_3$ oavsett storleken på dz .

Vi har vidare att $dx = ds \cdot \cos \theta$, vilket medför att formel [2] kan skrivas

$$p_2 \cdot ds \cdot \cos \theta - \rho \cdot g \cdot ds \cdot \cos(\theta) \frac{dz}{2} - p_3 \cdot ds \cdot \cos \theta = 0$$

eller

$$p_2 = p_3 + \frac{\rho \cdot g}{2} dz$$

oavsett storleken på dx .

I en punkt i en fluid i vila blir alltså $p_1 = p_2 = p_3$, eftersom dx och dz i limes går mot noll. Trycken är alltså lika i alla riktningar. Av det förhållandet att trycket i en punkt är lika i alla riktningar följer att trycket är en skalär storhet.

Ett annat välkänt faktum, när det gäller vätske- eller gastryck, är att pålagda tryck på en fluid i vila förmedlas oförminskade till alla punkter i fluiden. Detta följer direkt av närliggande elements statiska jämvikt och av det faktum att fluidens massa är ett kontinuum. Hydrauliska lyftanordningar är praktiska tillämpningar av dessa principer.

Man kan fråga sig om verkligen samma principer kan tillämpas på vätskor och gaser, trots den väsentliga skillnaden i sammantryckbarhet?

I problem där kompressibiliteten spelar en liten roll kan vätskor och gaser behandlas på enahanda sätt. Är sammantryckbarhetseffekten dominerande (som i gasströmning vid hög hastighet; $v > 170$ m/s) uppför sig gaser helt annorlunda än vätskor och de båda fluidslagen kan sägas lyda under delvis skilda fysikaliska lagar.

Vanligen - om kompressibiliteten är betydelselös - kan fluidmekaniska problem lösas utan hjälp av andra lagar än mekanikens. I de fall sammantryck-

barheten dominerar måste dock termodynamiska principer tillämpas vid sidan av mekanikens lagar.

1.2 STORHETER OCH ENHETER

1.2.1. Système International d'Unités (SI)

Système International d'Unités, eller SI ("IU-systemet"), håller nu på att bli allmänt accepterat över hela världen. En översikt över de för hydro-mekaniken relevanta storheterna (med storhetsbeteckningar, SI-enheter och enhetsbeteckningar) följer nedan. Uppgifterna är hämtade ur SIS (1988).

<u>Storheter</u>		<u>SI-enheter</u>		<u>Dimensioner</u>
Längd	(l, L)	meter	(m)	[L]
Massa	(m)	kilogram	(kg)	[M]
Tid	(t)	sekund	(s)	[T]
Temperatur:				
Termodynamisk temperatur	(T, θ)	kelvin	(K)	
Celsiustemperatur	(t , t)	grad Celsius	($^{\circ}\text{C}$)	
Substansmängd	(n)	mol	(mol)	[N]

Härledda enheter

Kraft	(F)	newton (N = kg m/s ²)		[M·L·T ⁻²]
Energi (arbete och värmemängd)	(E, W, Q)	joule (J = N m)		[M·L ² ·T ⁻²]
Effekt	(P)	watt (W = J/s)		[M·L ² ·T ⁻³]
Tryck, belastning	(p)	pascal (Pa = N/m ²)		[M·L ⁻¹ ·T ⁻²]

Tidigare användes CGS-systemet (centimeter-gram-sekund-systemet) inom naturvetenskaperna och MKSA-systemet (meter-kilogram-sekund-ampere-systemet) i tekniska sammanhang. SI ("IU-systemet") kan sägas vara en modifikation och komplettering av MKSA-systemet (jfr SIS, 1988).

Tills inte för länge sedan angavs värmemängd i kilokalorier (kcal), och den s k mekaniska värmeekvivalenten utnyttjades för definiering av sambandet mellan "mekanisk energi", uttryckt i kpm (eller kgfm), och "värmeenergi", uttryckt i kcal. Den mekaniska värmeekvivalenten är 426,935 kpm/kcal (426,935 kgfm/kcal), dvs det går 426,935 kilopondmeter (kilogramkraftmeter) per kilokalori. Värmeekvivalenten kan, såsom en liten räkneövning, användas för definiering av relationen mellan kcal och kJ och vice versa. Vi har nämligen att

$$\begin{aligned}
 1 \text{ kcal} &= 426,935 \text{ kpm} = 426,935 \times 9,80665 \text{ N}\cdot\text{m} = \\
 &= 4186,80 \text{ N}\cdot\text{m} (\text{W}\cdot\text{s}, \text{J}) = 4,18680 \text{ kJ}.
 \end{aligned}$$

där $9,80665 \text{ (m/s}^2\text{)}$ är det internationella, s k standardvärdet på accelerationen vid fritt fall.

Inverterade värdet av $4,18680 \text{ kJ}$ ger

$$1 \text{ kJ} = \frac{1}{4,18680} = 0,238846 \text{ kcal}$$

1.2.2. Densitetsbegrepp och volymitet

Densiteten, ρ ("ro"), är massan, dvs materialmängden, per volymsenhet.

Tyngddensiteten eller tungheten, $\gamma = \rho \cdot g$ (tidigare benämnd specifika tyngden), är den tyngd, dvs den gravitationskraft, som per volymsenhet verkar på materiemängden.

Såväl densitet som tyngddensitet (tunghet) är i grunden avhängiga antalet molekyler per volymsenhet. Densiteten och tyngddensiteten hos vätskor och gaser minskar i princip med ökande temperatur. Enda undantaget är vatten, vars densitet och tunghet ökar med temperaturen i intervallet mellan fryspunkten och $+3,98 \text{ }^\circ\text{C}$, och minskar med temperaturen först i intervallet från $+3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ till kokpunkten. Minskningen mellan $+4,0 \text{ }^\circ\text{C}$ och $+100,0 \text{ }^\circ\text{C}$ är cirka $4,16 \text{ } \%$.

Densiteten ρ uttrycks i mass- och längdenheter och får dimensioner av massa $[M]$ per volymsenhet $[L^3]$. Sålunda har densiteten dimensionen $[M \cdot L^{-3}]$ och enhetsbeteckning kg/m^3 . Densitetens variation med temperaturen förtecknas i Bihang 1.1 (enligt Kell, 1975).

Tyngddensiteten γ definieras med hjälp av mass-, längd- och tidsenheter och får dimensioner av kraft $[F]$ per volymsenhet $[L^3]$. Således är $[\gamma] = [M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}] = [M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-3}] = [F \cdot L^{-3}]$. Enhetsbeteckningen är N/m^3 .

Eftersom tyngden är en kraft och relaterad till massan enligt Newtons andra lag (se Bihang 1.2) fås

$$\gamma = \rho \cdot g$$

där g är den av den lokala gravitationskraften förorsakade accelerationen vid fritt fall.

Volymiteten, v_s , definierad som volymen per massenhet, har dimensionen av längd i kub per massenhet $[L^3 \cdot M^{-1}]$. Denna definition visar att volymiteten är inverterade värdet av densiteten, ρ . Enhetsbeteckningen är m^3/kg .

Densitetstalet, d_s , förut benämnt specifika vikten, anger förhållandet mellan densiteten av en viss substans och densiteten av en normalsubstans. Dimensionen är $[1]$ och densitetstalet alltså sortlöst. Vanligen väljes som

normalsubstans vatten av +3,98 °C. Eftersom den relativa densiteten varierar med temperaturen bör denna anges. Användningen av densitetstalet bör helst undvikas (SIS, 1988).

1.2.3. Densiteten hos en gas. Gaskonstanter

Tyngddensiteten hos en ideal gas fås genom kombinerad av Boyles och Charles lagar. I termer av tyngddensiteten fås, om en mol av gasen betraktas, "tillståndsekvationen"

$$\gamma = g \cdot p / (R_i \cdot T) \quad 1.3$$

där p är absoluta trycket (kraft per ytenhet) i pascal (newton per kvadratmeter), T termodynamiska temperaturen i kelvin, och R_i individuella gaskonstanten (energi per massenhet och kelvin). Tillståndsekvationen kan också skrivas

$$\rho = p / (R_i \cdot T) \quad 1.4$$

Den individuella gaskonstanten för en viss gas gäller i sträng mening endast om denna gas är ideal. Tillståndsekvationen gäller emellertid för de flesta beräkningar med tillräcklig noggrannhet vid vanligt förekommande tryck och temperatur.

Tillämpningen av Avogadros postulat "att alla gaser vid samma tryck och temperatur har samma antal molekyler" möjliggör beräkning av en molär gaskonstant, R_M .

Vi studerar två gaser, som har individuella gaskonstanterna $R_{i,1}$ och $R_{i,2}$ samt densiteterna ρ_1 och ρ_2 . Trycket och temperaturen är desamma hos båda gaserna, och kan betecknas p respektive T . Dividering av de bägge gasernas tillståndsekvationer ger

$$\frac{p / (\rho_1 \cdot T)}{p / (\rho_2 \cdot T)} = \frac{R_{i,1}}{R_{i,2}}$$

eller

$$\rho_2 / \rho_1 = R_{i,1} / R_{i,2}$$

Enligt Avogadros princip måste emellertid densiteten hos en gas vara proportionell mot gasens molmassa, dvs $\rho_2 / \rho_1 = M_2 / M_1$, där M_1 och M_2 är respektive gasers molmassor (i kg/mol). Kombinerad av detta samband med det närmast föregående ger $M_2 / M_1 = R_{i,1} / R_{i,2}$ eller

$$M_1 \cdot R_{i,1} = M_2 \cdot R_{i,2} \quad 1.5$$

Med andra ord, produkten av molmassan och individuella gaskonstanten är

densamma för alla gaser. Produkten benämnes molära gaskonstanten (allmänna gaskonstanten), R_M .

Värdet på R_M : $8,3143 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K}) = 8314,3 \text{ J}/(\text{kmol}\cdot\text{K})$

1 mol är substansmängden i ett system innehållande lika många systemelement som det finns atomer i 0,012 kg av nukliden ^{12}C .

<u>Tillståndsändring</u>	<u>Karakteristikum</u>
Isokor	Volymen konstant
Isobar	Trycket konstant
Isoterm	Temperaturen konstant
Adiabatisk	Inget värmeutbyte sker med omgivningen

Illustrativt exempel 1.1

Beräkna tyngddensiteten, $\gamma = \rho \cdot g$, volymiteten, v_g , och densiteten, ρ , hos koldioxid (CO_2) vid $100,0^\circ\text{C}$ och atmosfärstryck ($101,3 \text{ kPa} = 101,3 \text{ kN per m}^2$). Utgå från 1 mol av gasen.

Lösning: C:s relativa atommassa = 12, O:s relativa atommassa = 16, relativa molekylmassan för $\text{CO}_2 = 12 + 2 \times 16 = 44$ och molmassa för $\text{CO}_2 = 0,044 \text{ kg}$. Eftersom $R_M = M \cdot R_i$ erhålles $8,3143 = 0,044 \cdot R_i$ och $R_i = 189 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 189 \text{ m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})$.

Vi har också att: $\rho = p/(R_i \cdot T)$ eller $\gamma = \rho \cdot g = g \cdot p/(R_i \cdot T)$

$$\gamma = \frac{9,82 \times 101300}{189 \times 373,15} = 14,105 \text{ N/m}^2$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{14,105}{9,82} = 1,436 \text{ kg/m}^3 \quad v_g = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1,436} = 0,696 \text{ m}^3/\text{kg}$$

1.2.4. Något om g-värdets variation

Accelerationen vid fritt fall (tyngdaccelerationen), g , varierar med latituden och höjden över den s k geoidytan. Om man bortser från eventuella tyngdfältsanomalier förorsakade av inhomogeniteter i jordellipsoidens materiella uppbyggnad, så gäller att g vid geoidytan, dvs populärt uttryckt ungefär vid havsytans medelnivå, är $9,7803 \text{ m/s}^2$ vid ekvatorn och $9,8323 \text{ m/s}^2$ vid polerna. Vid geoidytan är g lika med $9,8154 \text{ m/s}^2$ på den latitud där Smygehuk ligger och $9,8255 \text{ m/s}^2$ på den latitud där Kilpisjaure (Trekriksröset) är beläget, varför ett lämpligt medelvärde på g för Sverige bör

vara $9,82 \text{ m/s}^2$. För vissa definitionsändamål användes det internationella standardvärdet, $9,80665 \text{ m/s}^2$, på g .

För g -värdets variation med latitud och höjd ger Moritz (1980; 1982) en formel som kan skrivas på följande vis:

$$g = c_1 \cdot (1 + c_2 \cdot \sin^2 \alpha + c_3 \cdot \sin^2 2\alpha) + (a + c_4 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot h + c_5 \cdot h^2 \quad 1.6$$

där α står för latituden i grader och h för höjden över geoidytan i meter.

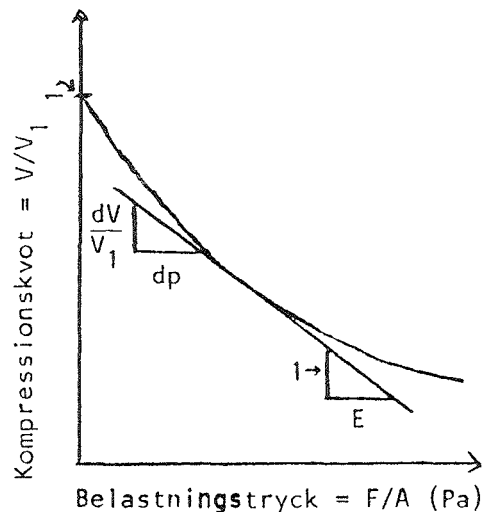
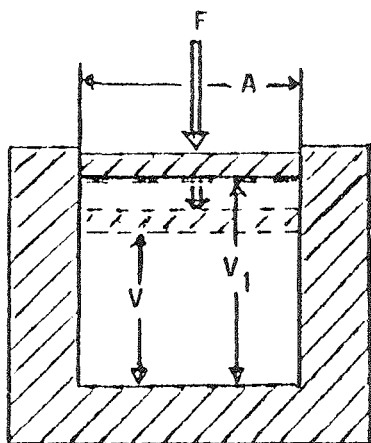
Konstant och koefficienter har nedanstående värden

$$\begin{array}{ll} c_1 = 9,780327 & a = -3,0877 \cdot 10^{-6} \\ c_2 = 5,3024 \cdot 10^{-3} & c_4 = 4,4 \cdot 10^{-9} \\ c_3 = -5,8 \cdot 10^{-6} & c_5 = 7,2 \cdot 10^{-13} \end{array}$$

1.3. SAMMANTRYCKBARHET, ELASTICITET

Vätskor och gaser (dvs fluider) är elastiska media, dvs de är reversibelt kompressibla. Liksom för fasta elastiska material, t ex stål, definieras en elasticitetsmodul. Den fluidala elasticitetsmodulen hänföres till volymen.

Förloppet av en elastisk sammantryckning framgår av figur 1.3. Den vänstra bilden föreställer en cylinder med pistong och en innesluten fluid med volymen V_1 . Cylindern och pistongen antas vara fullständigt stela. Anbringandet av en kraft, F , på pistongen kommer att öka trycket, p , i fluiden och därmed minska volymen. Genom att pricka av p mot V/V_1 får vi vänstra bildens relation mellan belastningstryck och kompressionskvot. Fluidens elasticitetsmodul i en godtycklig punkt på kurvan definieras som kurvans lutning i punkten.



Figur 1.3

Således

$$E = - \frac{dp}{dV/V_1} = - \frac{V_1 \cdot dp}{dV} \quad 1.7$$

Kurvans avtagande branthet med stigande tryck visar, att ju mer fluider pressas ihop, desto svårare blir det att pressa samman dem ytterligare, en logisk konsekvens av att mellanrummet mellan molekylerna minskas. En fluids elasticitetsmodul är ej konstant utan ökande med stigande tryck.

Den schematiska kurvan i figuren är tillämpbar på både vätskor och gaser. Beträffande vätskor är man vanligen bara intresserad av kurvdelen nära $V/V_1 = 1$. Elasticitetsmodulen för 20,0-gradigt vatten, 2,20 GPa ($2,20 \cdot 10^9$ Pa), kan utan större fel användas för tryck upp till 10,0 MPa ($10,0 \cdot 10^6$ Pa). Se vidare Bihang 1.1.

1.4. ÅNGTRYCK

Över varje given, icke gasformig substans utbildas ett med temperaturen stigande ångtryck, betingat av att ett visst antal molekyler av substansen befinner sig i gasfas. Det ångtryck som i varje särskilt fall är det maximalt möjliga, mättnadstrycket, är det tryck som råder när gasfasen står i jämvikt med sitt kondensat, vätskefasen. Vid en vätskas kokpunkt är trycket inuti vätskan lika med det yttre trycket.

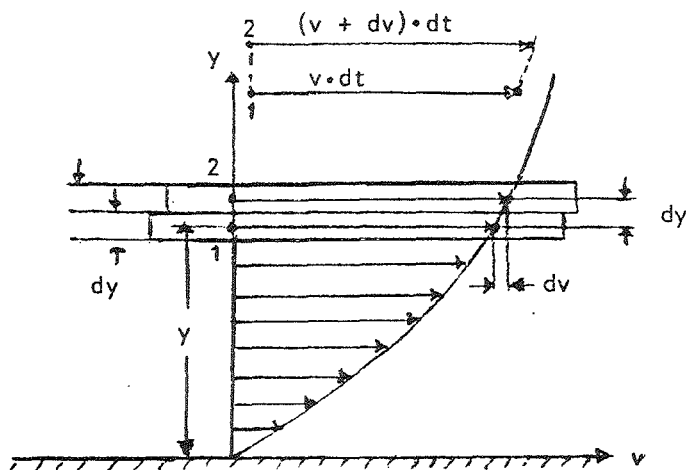
I dynamiska, tekniska system förekommer ofta att låga yttre tryck uppkommer på vissa ställen. Blir trycken där lika med eller kanske rentav lägre än trycket inuti vätskan, så övergår denna snabbt i ånga. Fenomenet benämnes kavitation. Detta kommer att behandlas mer ingående i samband med genomgång av pumpteorin.

1.5. VISKOSITET

1.5.1. Dynamisk (absolut) viskositet

I samband med verkliga fluiders rörelse kan två friktionsberoende (viskositetsberoende) strömningstillstånd särskiljas. Det första innebär en jämn rörelse i vilken fludelement eller fluidpartiklar tycks glida över varandra i lager eller laminae; strömningen benämnes laminär. Det andra strömningstillståndet karakteriseras av en slumpmässig eller kaotisk rörelse hos individuella partiklar; virvlar av olika storlek uppträder. Denna strömning kallas turbulent (jfr Sandsborg & Bjerketorp, 1993).

Vi studerar den laminära rörelsen hos en verklig fluid längs en fast avgränsning (fig. 1.4).



Figur 1.4

Observationer visar, att medan fluiden har en bestämd hastighet, v , på ett arbiträrt avstånd från den fasta avgränsningen, så är hastigheten lika med 0 vid denna. Hastigheten ökar med ökande avstånd från avgränsningen.

Dessa förhållanden är summerade i hastighetsprofilen i figur 1.4, som illustrerar olikheten i rörelse mellan godtyckliga, parvisa, varandra närliggande skikt.

I figuren visas två sådana skikt mer ingående. Båda har den differentiella tjockleken dy . Det undre lagret rör sig med hastigheten v , det övre med hastigheten $v + dv$.

Två partiklar i figuren, 1 resp 2, vilka påbörjar sin rörelse på samma vertikala linje, rör sig olika sträckor, $d_1 = vdt$ och $d_2 = (v + dv)dt$, på den infinitesimala tiden dt .

Fluiden blir således deformerad, eftersom den linje som förbinder de punkter där partiklarna 1 och 2 i varje bestämt ögonblick befinner sig i får en ökande lutning och längd när t ökar.

I fasta kroppar är den av skjuvning orsakade påkänningen proportionell mot den manifesterade töjningen - den relativa töjningen av fasta kroppar är $(d_2 - d_1)/dy = dv \cdot dt/dy = (dv/dy)dt$.

En fluid sätter sig emellertid i rörelse (strömmar) vid minsta påkänning och resultatet av en kontinuerligt verksam, konstant påkänning blir en oändlig töjning. När det gäller strömningsproblem som rör fluider är det följaktligen lämpligast att relatera påkänningen till graden av töjning.

Det är tydligt att en friktions- eller skjuvspänningskraft existerar mellan fluidlagren. Denna kraft kan uttryckas med ett "spänningstal", skjuvspänning, per ytenhet av kontaktarean.

Skjuvspänningen, betecknad, τ ("tau"), har för laminär (icke turbulent) strömning (i vilken viskositeten spelar en dominerande roll) befunnits vara proportionell mot graden av relativ töjning (deformation), dvs till hastighetsgradienten dv/dy , med en proportionalitetskonstant, η ("eta"), stående som uttryck för dynamisk (eller absolut) viskositet. Således

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad 1.8$$

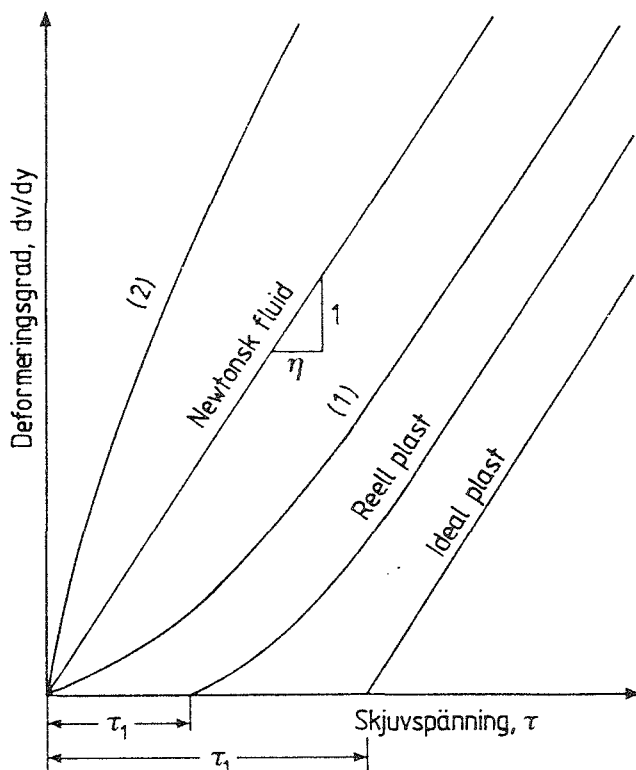
Skjuvspänningskraften är $\tau \cdot A$.

Alla verkliga (reella) fluider är viskösa och uppvisar följaktligen vissa friktionsfenomen när strömning uppträder.

Viskositeten orsakas av kohesion mellan vätskepartiklarna och av utbyte av molekylär rörelsemängd mellan fluidsiktarna. Effekterna av viskositeten framträder vid vätskerörelsen i form av tangential- eller skjuvspänningar mellan de olika skiktarna.

Ekvation 1.8 är grundläggande för snart sagt alla problem vari flödesmotstånd uppträder. Det är därför på sin plats att i några punkter närmare kommentera dess innebörd och begränsningar.

- (1): Frånvaron av tryckparameter i ekvation 1.8 visar att både τ och η är oberoende av tryck, och att friktion i fluider är helt artskild från friktion mellan rörliga fasta kroppar, där ju tryck spelar en stor roll.
- (2): En oändligt liten skjuvspänning kommer att förorsaka strömning, eftersom anbringade tangentkrafter måste åstadkomma en hastighetsgradient, dvs en relativ rörelse mellan närliggande fluidsikt.
- (3): Där $dv/dy \rightarrow 0$ och $\tau = 0$ kommer skjuvspänningskrafterna i en viskös fluid i vila att bli noll, oavsett storleken på η . Detta bekräftar att utelämnandet av skjuvspänningen vid analysen av figur 1.2 är tillåten.
- (4): Hastighetsfördelningen kan ej ha någon tangent som sammanfaller med en fast avgränsning, eftersom detta skulle leda till de fysikaliska orimligheterna att såväl hastighetsgradienten invid avgränsningen som skjuvspänningen mellan fluiden och gränssytan blir oändliga.
- (5): Ekvationens giltighet är begränsad till icke turbulent (laminär) fluidrörelse och till så kallade newtonska fluider (se nedan).
- (6): Av vikt vid användningen av ekvation 1.8 är också det observerade förhållandet att hastigheten vid en fast avgränsning är noll. Det förekommer alltså ingen glidning mellan fluid och fast gränssyta.



Figur 1.5. Principiella samband mellan skjuvspänningens storlek och töjningen (deformeringen) hos olika typer av vätskor. Efter Vennard & Street (1976).

Ekvation 1.8 benämnes Newtons viskositetslag. De fluider som följer denna lag kallas newtonska. Andra fluider benämnes icke newtonska, till vilka vi strax skall återkomma.

Ekvation 1.8 kan grafiskt åskådliggöras med en rät linje genom origo i ett rätvinkligt koordinatsystem. Linjen har lutningen η . Denna grafiska bild ingår i figur 1.5. I figuren betecknar dv förskjutningen per tidsenhet och dv/dy graden av töjning (deformering) per tidsenhet.

Rheologi, som är läran om icke newtonska fluider, behandlar plaster, blod, suspensioner, målarfärger, födoämnen m m, vilka flyter, men vars motståndskaraktäristika ej definieras av ekvation 1.8.

Relationen mellan τ och dv/dy för två typiska plaster framgår av figur 1.5. Den väsentliga (mekaniska) skillnaden mellan newtonska fluider och plaster är som synes den begynnelse-skjuvspänning, τ_1 , som måste övervinnas innan strömning begynner. Ytterligare ett par kurvor (1 och 2) förekommer i figur 1.5. De representerar två icke newtonska fluider av annat slag. Det handlar här om suspensioner och polymera lösningar. De relationer, korresponderande mot ekvation 1.8, som gäller för ideal plast, verklig plast samt kurva (1) och (2) är

$$* \quad \tau - \tau_1 = \eta \frac{dv}{dy}, \quad \tau > \tau_1; \quad \text{Ideal plast (t ex oljefärg och tandkräm)}$$

$$** \quad \tau - \tau_1 = k \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)^n, \quad \tau > \tau_1; \quad \text{Verklig plast}$$

$$*** \quad \tau = k \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)^n, \quad n < 1; \quad \text{Kurva (1)}$$

$$n > 1; \quad \text{Kurva (2)}$$

För den sistnämnda potenslagsrelationen (***) gäller att

$$k \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)^n = \eta \frac{dv}{dy}, \quad \text{dvs}$$

$$\eta = \frac{k \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)^n}{\frac{dv}{dy}} = k \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)^{n-1}$$

Viskositeten η 's dimensioner är kraft gånger tid genom area, såsom framgår av följande härledning:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}, \quad \text{dvs}$$

$$\eta = \frac{F}{A} \frac{dy}{dv}, \quad \text{som dimensionsmässigt ger}$$

$$[\eta] = \left[\frac{F \cdot L \cdot T}{L^2 \cdot L} \right] = \left[\frac{F \cdot T}{L^2} \right] = [F \cdot T \cdot L^{-2}]$$

För storheten η fås i SI-enheter

$$\eta = \frac{N \cdot s}{m^2} = \text{Pa} \cdot s$$

och i CGS-enheter

$$\eta = \frac{\text{dyn} \cdot s}{\text{cm}^2} = \text{pois}$$

Mellan enheterna för dynamisk viskositet i SI och CGS gäller följande samband

$$1 \text{ pois} = 1 \frac{\text{dyn} \cdot s}{\text{cm}^2} = 1 \frac{10^{-5} \text{ N} \cdot s}{10^{-4} \text{ m}^2} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot s$$

För den dynamiska viskositeten hos vatten gäller approximativt Poiseuilles snart 150-åriga ekvation

$$\eta = \frac{1,78 \cdot 10^{-3}}{1 + 0,0337 \cdot t + 0,00022 \cdot t^2} \quad (\text{Pa} \cdot \text{s}) \quad 1.9$$

där t är temperaturen i $^{\circ}\text{C}$.

En noggrannare angivelse av storleken av den dynamiska viskositeten hos vatten kan erhållas med hjälp av ekvationerna 1.10a och 1.10b. Ekvation 1.10a gäller i temperaturintervallet $0,0^{\circ}\text{C} < t < 20,0^{\circ}\text{C}$ och är en lätt modifikation av en formel publicerad i Hardy & Cottingham (1949). Ekvation 1.10b gäller vid temperaturer mellan $20,0^{\circ}\text{C}$ och $100,0^{\circ}\text{C}$. Den är deducerad från en formel given av J. F. Swindells (citerad i CRC, 1979).

$$\eta = 10^{f_1(t)} \quad \text{Pa} \cdot \text{s} \quad 0,0 \leq t < 20,0^{\circ}\text{C} \quad \left. \vphantom{\eta} \right\} 1.10a$$

$$f_1(t) = \frac{c_1}{a_1 + c_2 \cdot (t - a_2) + c_3 \cdot (t - a_2)^2} + a_3$$

$$c_1 = 1301; \quad c_2 = 8,1855; \quad c_3 = 0,00585;$$

$$a_1 = 998,333; \quad a_2 = 20,0; \quad a_3 = -4,302305$$

$$\eta = 10^{f_2(t)} \quad \text{Pa} \cdot \text{s} \quad 20,0 \leq t \leq 100,0^{\circ}\text{C} \quad \left. \vphantom{\eta} \right\} 1.10b$$

$$f_2(t) = \frac{c_4 \cdot (a_2 - t) + c_5 \cdot (t - a_2)^2}{t + a_4} + a_5$$

$$c_4 = 1,3275; \quad c_5 = -0,001051;$$

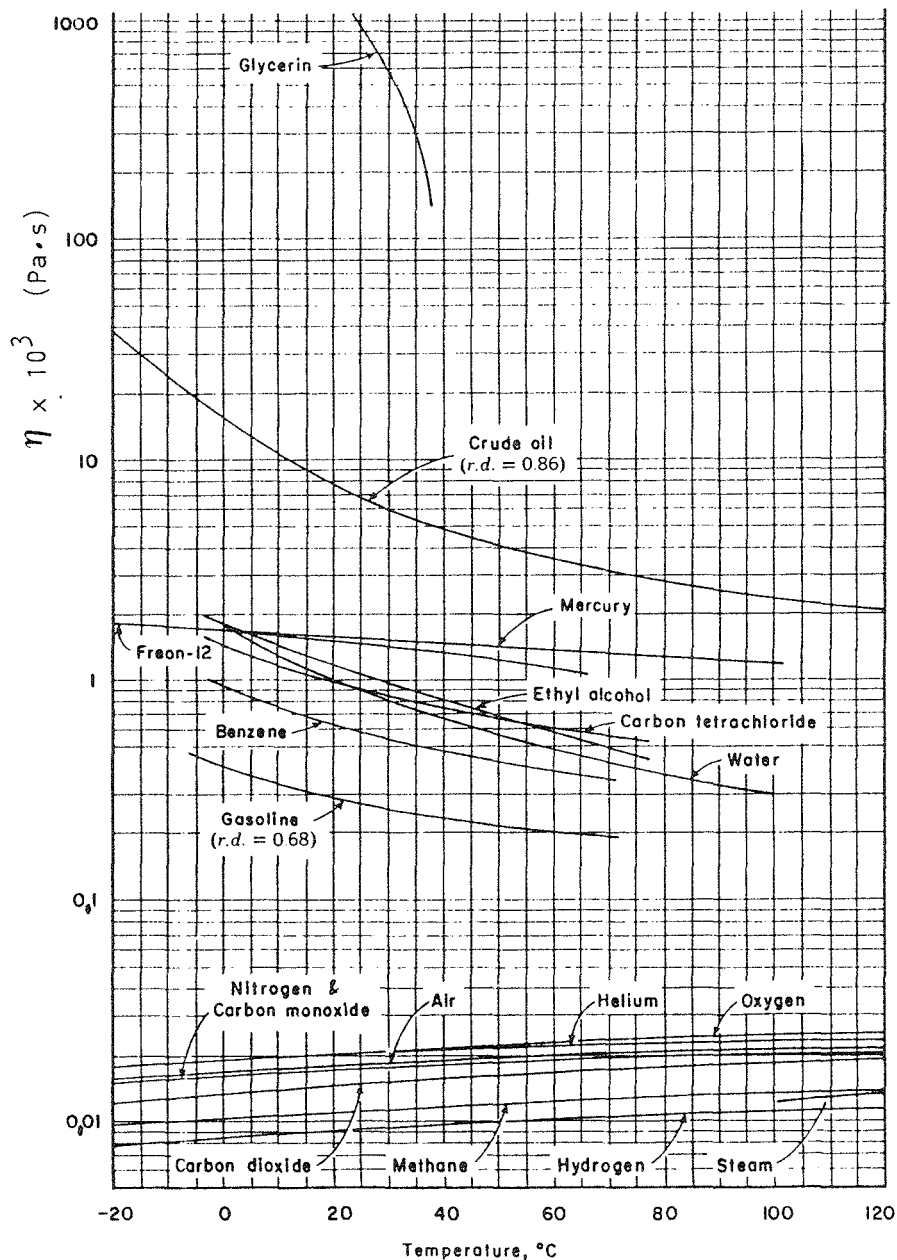
$$a_2 = 20,0; \quad a_4 = 105; \quad a_5 = -3,00$$

Viskositeten förändras starkt med temperaturen, men temperaturvariationerna har en motsatt effekt på viskositeten hos gaser än hos vätskor, beroende på gasernas i förhållande till vätskornas fundamentalt avvikande intermolekylära förhållanden.

I gaser, där den intermolekylära kohesionen vanligen kan försummas, beror skjuvspänningen, τ , på ett utbyte av rörelsemängd mellan glidande skikt, förorsakad av molekylär rörelse, riktad vinkelrät mot strömningsriktningen. Gasmolekylernas slumpmässiga rörelse för dem tvärs strömningsriktningen från lager med en hastighet till lager med en annan hastighet. Molekyler, som lämnar ett skikt med låg fart kolliderar med molekyler i ett skikt med högre fart. Vid kollisionen tenderar rörelsemängdsutbytet att påskynda de långsammare molekylerna och sakta farten hos de snabbare. Nettoeffekten blir en tydlig skjuvspänning, som medverkar till att reducera hastigheten hos det snabbare skiktet. Motsatsen inträffar, när en mole-

kyl från ett snabbare lager kolliderar med en molekyl från ett långsammare. Eftersom denna molekyllära aktivitet ökar med stigande temperatur, kommer skjuvspänningen, och således även viskositeten, hos gaser att öka med temperaturen (fig. 1.6).

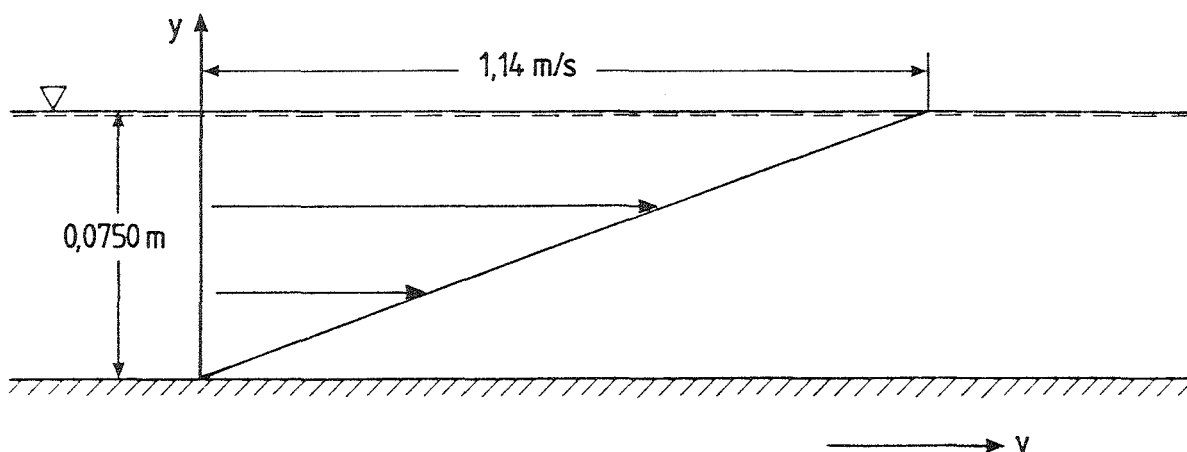
I vätskor är det rörelsemängdsutbyte, som förorsakas av den molekyllära aktiviteten, litet i förhållande till effekten av de kohesiva krafterna mellan molekyllerna, varför skjuvspänningen, τ , och den dynamiska viskositeten, η , främst är beroende av storleken hos dessa kohesiva krafter, vilka tenderar att hålla närliggande molekyler i bestämda lägen relativt till varandra, och att motverka relativ rörelse. Eftersom dessa krafter snabbt avtar med stigande temperatur, minskar viskositeten hos vätskor alltefter som temperaturen stiger (fig. 1.6).



Figur 1.6. Den dynamiska viskositeten hos några vanliga fluider. Ur Vennard & Street (1976).

Illustrativt exempel 1.2

En vätska strömmar enligt nedanstående figur. Vätskan har en absolut viskositet, η , av $0,0479 \text{ Ns/m}^2$ ($= \text{Pa}\cdot\text{s}$). Beräkna hastighetsgradienten dv/dy och skjuvspänningen τ under antagande att hastighetsfördelningen är rätlinjig.



Lösning: Relationen mellan hastighet, v , och avstånd, y , blir

$$v = \frac{1,14}{0,0750} y = 15,2 \cdot y$$

Vi differentierar och får

$$dv = 15,2 \cdot dy,$$

dvs hastighetsgradienten

$$\frac{dv}{dy} = 15,2$$

Då fås enligt ekvation 1.8,

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \quad \text{att}$$

$$\tau = 0,0479 \times 15,2 = 0,728 \text{ Pa}$$

1.5.2. Kinematisk viskositet

Den kinematiska viskositeten, ν ("ny"), definieras såsom kvoten mellan den dynamiska (absoluta) viskositeten, η , och densiteten, ρ , dvs

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad 1.11$$

Dimensionsuttrycket blir $[L^2, T^{-1}]$, eftersom

$$\begin{aligned} [\eta] &= \left[\frac{F \cdot T}{L^2} \right] = \left[\frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot T}{L^2} \right] = \left[\frac{M \cdot T^{-1}}{L} \right] \quad \text{och} \quad [\rho] = \left[\frac{M}{L^3} \right] \\ [\nu] &= \left[\frac{M \cdot T^{-1} \cdot L^3}{L \cdot M} \right] = \left[\frac{L^2}{T} \right] = [L^2, T^{-1}] \end{aligned}$$

Enhetsbeteckningen i SI för den kinematiska viskositeten, ν , är m^2/s . CGS-systemets enhetsbeteckning för ν är stok (St). Det går 10 000 St på $1 m^2/s$. 10 000 kallas i "lärda sammanhang" en myriad. Därför har det föreslagits att m^2/s skall kallas myriastok (jfr myriameter = 10 000 m).

I temperaturintervallet från 0,00 °C till 35,0 °C kan den kinematiska viskositeten skattas enligt Gregorig (1933)

$$\nu = \left(\frac{c_1}{t_b + t} + \frac{c_2}{(t_b + t)^2} - \frac{c_3}{(t_b + t)^3} + \frac{c_4}{(t_b + c_6 \cdot t)^2} \right) \cdot c_5 \quad 1.12$$

med	$c_1 = 3,262$	$c_5 = 1,00 \cdot 10^{-5}$
	$c_2 = 9,795$	$c_6 = 10,0$
	$c_3 = 12,05$	$t_b = 25,0$
	$c_4 = 2,277$	

t står för temperaturen i °C.

För temperaturer över 35,0 °C upp till 100,0 °C kan den kinematiska viskositetens storlek skattas enligt Bjerketorp (1974)

$$\nu = \frac{a}{1 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t \sqrt{t} + b_3 \cdot t^2 + b_4 \cdot t^2 \sqrt{t} + b_5 \cdot t^3} \quad 1.13$$

med	$a = 17990 \cdot 10^{-10}$	$b_3 = 25675 \cdot 10^{-8}$
	$b_1 = 35418 \cdot 10^{-6}$	$b_4 = 21068 \cdot 10^{-10}$
	$b_2 = -29882 \cdot 10^{-8}$	$b_5 = -97070 \cdot 10^{-11}$

Även här står t för temperaturen i °C.

1.6. YTSPÄNNING. KAPILLARITET

Den spänningseffekt som uppträder i vätskeytor, när dessa kommer i kontakt med en annan fluid (vätska eller gas), är beroende av de intermolekylära kohesiva och adhesiva krafternas relativa storlek.

Dessa krafter är dominerande i problem som sammanhänger med:

- 1) en vätskas kapillära stigning i smala hålrum (rör),
- 2) bildningen av bubblor,
- 3) upplösningen av vätskestrålar,
- 4) droppbildning och
- 5) tolkningen av resultat erhållna med små modeller av större prototyper.

I en fri vätskeyta i kontakt med atmosfären är den kraft liten som drar vätskemolekyler från ytan, på grund av att det är relativt få molekyler i ångan ovanför vätskeytan. Inne i vätskan är de intermolekylära krafterna (attraktion och repulsion) balanserade i alla riktningar. För vätskemolekyler vid ytan är emellertid inte de kohesiva krafterna från det närmast underliggande lagret kompenserade av krafterna från ett identiskt lika ovanförliggande skikt.

Detta tillstånd medför, att ytmolekylerna kraftigt dras till ett lägre skikt och även till varandra. Ytan uppför sig som om den vore en membran, därav namnet ytspänning. ("Membranspänning" hade varit ett ännu åskådligare namn.)

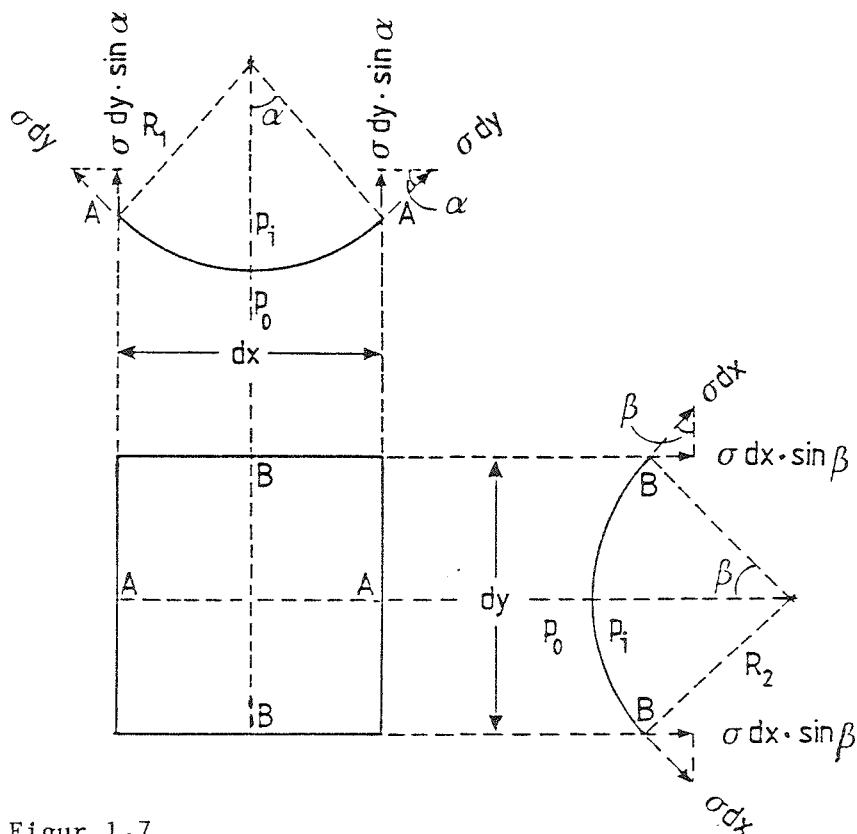
Att behandla en vätskeyta som om den vore en membran i stånd att vidmakthålla spänningar är en analogi, allmänt använd vid teoretiska behandlingar av ytspänningsfenomen.

Ytspänningen, σ ("sigma"), är den kraft varmed en vätska per längdenhet av sin ytas begränsningslinje strävar att dra sig samman. Dimensionen är $[F \cdot L^{-1}] = [M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-1}] = [M \cdot T^{-2}]$. Enhetsbeteckningen är N/m.

Eftersom ytspänningen är direkt avhängig intermolekylära, kohesiva krafter, minskar dess storlek med stigande temperatur. Ytspänningen är också beroende av vad, fast kropp eller fluid, vätskeytan står i kontakt med. Ytspänningen anges vanligen som kontakt vätskeyta-luft.

Vi skall nu med hjälp av figur 1.7 studera ett litet vätskeelement, $dx \cdot dy$, med en dubbelkrökt yta vars radier är R_1 och R_2 .

Tydligt måste en tryckdifferens ($p_1 - p_0$) åtfölja ytspänningen för att elementet skall vara i statisk jämvikt.



Figur 1.7

Ett samband mellan tryckdifferensen och ytspänningen kan härledas ur denna jämvikt genom att sätta $\Sigma F = 0$ för de kraftkomponenter, som är vinkelräta mot elementet. Alltså

$$(p_1 - p_0) \cdot dx \cdot dy = 2\sigma \cdot dy \cdot \sin\alpha + 2\sigma \cdot dx \cdot \sin\beta$$

där α och β är små vinklar. Nu är emellertid $\sin\alpha = dx/2R_1$ och $\sin\beta = dy/2R_2$, varför substituering ger

$$(p_1 - p_0) \cdot dx \cdot dy = 2\sigma \cdot \frac{dx \cdot dy}{2R_1} + 2\sigma \cdot \frac{dx \cdot dy}{2R_2}$$

eller

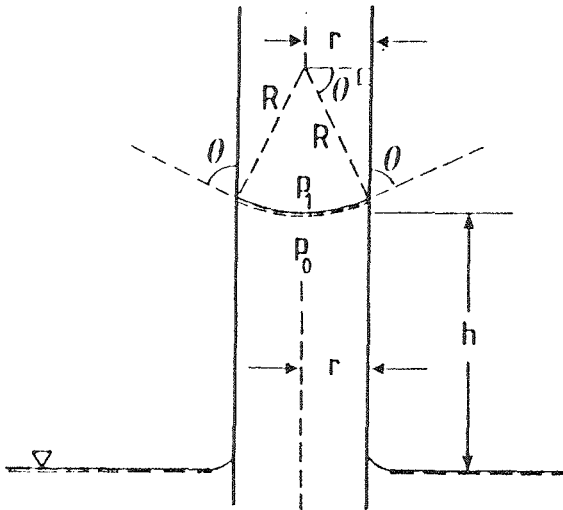
$$p_1 - p_0 = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad 1.14$$

Ekvation 1.14 benämnes Laplaces ekvation efter den franske astronomen och matematikern Pierre Simon de Laplace (1749–1827). Jfr de Laplace (1806) och Grimsehl & Tomaschek (1944) eller Grimsehl & Schallreuter (1965).

Med hjälp av denna ekvation kan det av ytspänningen förorsakade trycket i små droppar eller smala strålar beräknas. Likaså kan man skatta stigningen i kapillära hålrum.

För en sfärisk droppe är $R_1 = R_2$, för en cylindrisk stråle är en av krökningsradierna oändlig, medan den andra är strålens radie.

För det cylindriska kapillära röret i figur 1.8 (vätskeytan antas vara en sektion av en sfär) är $p_0 = -\rho \cdot g \cdot h$, $p_1 = 0$ och $p_1 - p_0 = \rho \cdot g \cdot h$.



Figur 1.8

Vi har också att $R_1 = R_2 = R$ och $\cos \theta = r/R$. Substitution i ekvation 1.14 ger

$$\rho \cdot g \cdot h = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

Då emellertid

$$R = \frac{r}{\cos \theta}$$

fås

$$\rho \cdot g \cdot h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{r}$$

eller

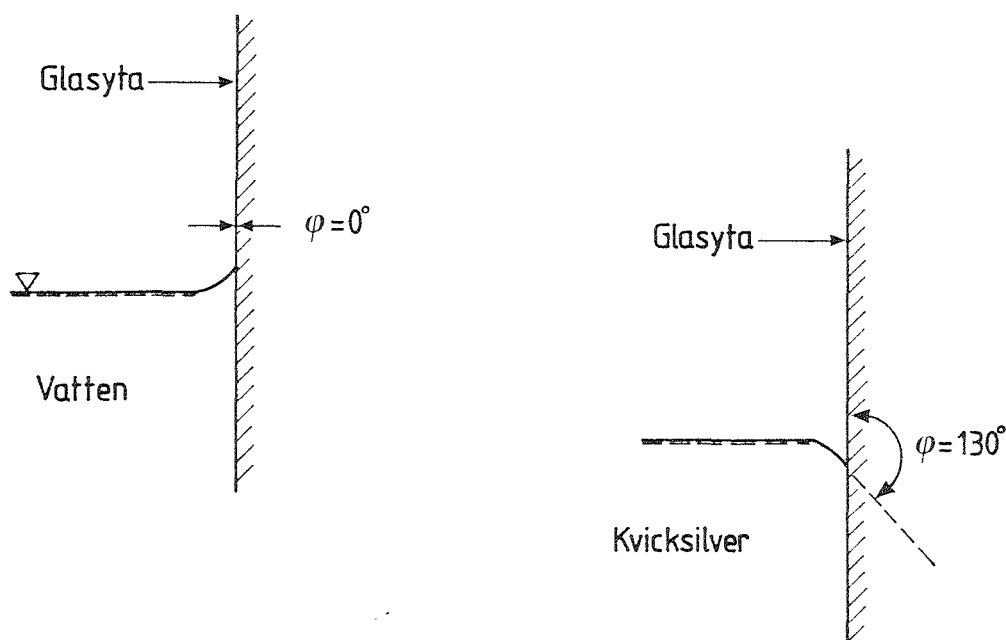
$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot r} \quad 1.15$$

Resultatet ovan ger upphov till flera frågor. Vilken betydelse har vinkeln θ , vilka begränsningar gäller för ekvationen och hur kan den experimentellt verifieras.

Vinkeln θ ("teta") är den s k randvinkeln (kontaktvinkeln), dvs den vinkel som vätskeytan under de för varje särskilt tillfälle rådande förutsättningarna bildar mot den fasta väggen eller helt allmänt mot gränssytan av ett annat medium. Under optimala betingelser sammanfaller θ med den s k befuktningvinkeln, φ ("fi"). Under vätande villkor är $\theta \leq \varphi$, medan det under icke vätande premisser gäller att $\theta \geq \varphi$. Se vidare Andersson (1960).

Ur antagandet om en sfärisk vätskeyta framgår att giltigheten av ekvation 1.15 är begränsad till mycket smala rör. I grova rör kommer vätskeytan att starkt avvika från den sfäriska formen.

Figur 1.9. beskriver de förhållanden som uppstår när vatten respektive kvicksilver står i kontakt med vertikala glasytor.



Figur 1.9

Kvicksilvermolekylerna äger tydligen en större affinitet till varandra (kohesion) än till glas (adhesion), medan förhållandet är det motsatta för mediaparet vatten och glas.

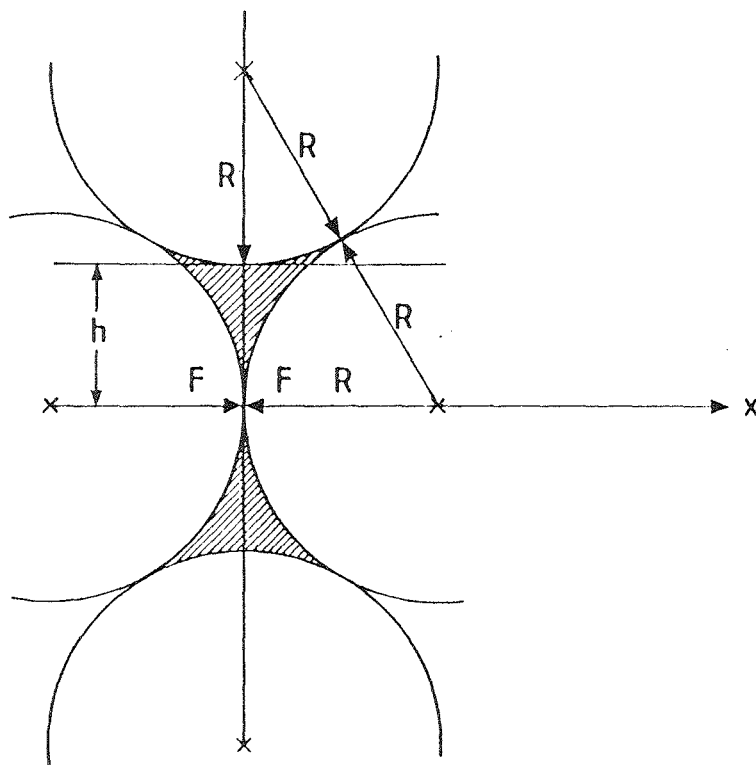
Fastän karaktären av dessa molekylära växelverkningsar ej är helt klarlagd, har man mätt befuktningsvinklarna och funnit att dessa för rena substanser är som figur 1.9 visar.

God experimentell överensstämmelse med ekvationen 1.15 fås för smala rör ($d < 5,0$ mm) förutsatt att vätskor och rör är extremt rena. I praktiken förekommer emellertid ej sådan renhet, varför h blir avsevärt mindre än det värde ekvationen ger.

Då det gäller mätning av tryck bör man använda så grova rör att effekten av kapillariteten kan försummas.

Ett intressant exempel på kapillär verkan är det fenomen som går under benämningen skenbar eller falsk kohesion. Vi skall därför uppehålla oss något vid detta.

Om t ex två sfäriska korn doppas i en vätska på så sätt att kornen berör varandra, bildas runt beröringspunkten en vätskefylld, katenoidformad ring (fig. 1.10).



Figur 1.10.

I x-axelns riktning verkar en kraft, F , definierad av uttrycket:

$$F = 2\pi \cdot h \cdot \sigma \quad (\text{newton})$$

Vi löser ut h med ledning av figur 1.10

$$(R + h)^2 + R^2 = 4R^2; \quad R^2 + h^2 + 2R \cdot h + R^2 = 4R^2$$

$$h^2 + 2R \cdot h - 2R^2 = 0$$

$$h = -R \left(\frac{\pm}{-} \right) \sqrt{R^2 + 2R^2} = R \cdot (\sqrt{3} - 1) \quad (\text{meter})$$

Uttrycket för F blir alltså

$$F = 2\pi \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sigma \cdot R \approx 4,600 \cdot \sigma \cdot R \quad (\text{newton})$$

Uttrycket falsk kohesion härrör från förhållandet, att t ex fin sand vid en viss fuktighetshalt sammanhålles av kapillära krafter. Om man sedan ökar vattenhalten över en viss gräns upphör kohesionskraften plötsligt, beroende på att de sammanhållande membranerna försvinner.

Den nu beskrivna falska eller skenbara kohesionen förekommer dock ej hos s k kohesionära jordarter, t ex lera.

Illustrativt exempel 1.3

Vilken diameter måste en droppe (20,0 °C) ha för att trycket inom den skall vara 1,00 kPa större än på utsidan. Vatten har vid 20,0 °C en ytspänning av 0,0728 N/m.

Lösning: Ekvation 1.14

$$p_i - p_o = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

ger för

$$R_1 = R_2 = R, \quad p_i - p_o = 1,00 \cdot 10^3 \quad \text{och} \quad \sigma = 0,0728 \text{ N/m}$$

$$1000 = 0,0728 \times \frac{2}{R}$$

$$R = \frac{2 \times 0,0728}{1000} = 0,0001456 \text{ m}$$

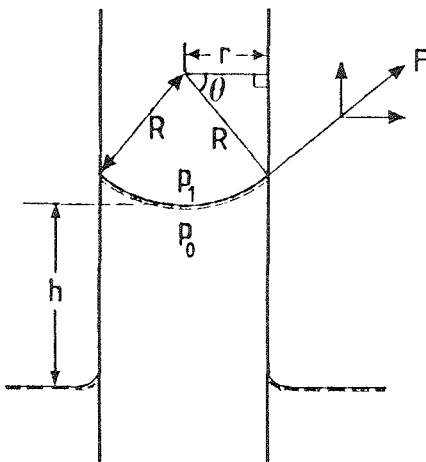
$$\underline{d = 0,291 \text{ mm} \approx 0,3 \text{ mm}}$$

Illustrativt exempel 1.4

Beräkna den höjd till vilken en vätska, som är vätande gentemot glas, maximalt kan stiga i en öppen, kapillär spalt.

Lösning: Vi utgår från ekvationen 1.14, dvs

$$\Delta P = p_i - p_o = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$



För den kapillära spalten i vidstående figur där vätskeytan antas vara en sektion av en cylinder, gäller att $p_o = -\rho \cdot h$, $p_i = 0$ och $p_i - p_o = \rho \cdot h$.

I ekvation 1.14 kan vi sätta $R_1 = R$. R_2 blir då lika med ∞ , vilket medför att $1/R_2 = 0$. Vi får då att

$$\Delta P = p_i - p_o = \rho \cdot g \cdot h = \frac{\sigma}{R} \quad \text{eller} \quad h = \frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot R}$$

Införes randvinkeln, θ , erhålles

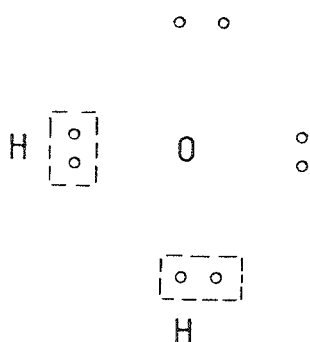
$$\cos \theta = r/R, \quad R = r/\cos \theta .$$

$$h = \frac{\sigma \cdot \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot r}$$

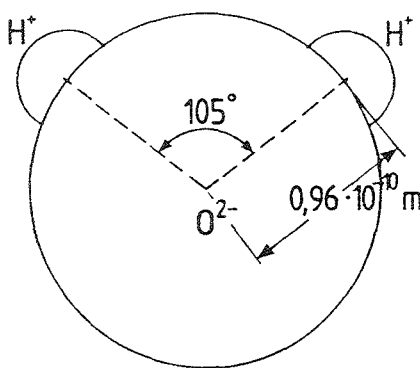
1.7. VATTNETS MOLEKYLARFYSIK

1.7.1. Intermolekylära krafter

Vattenmolekylen (H_2O) består av två väteatomer (2H^+) och en syreatom (O^{2-}) hopkopplade genom s k kovalenta bindningar (atomernas kovalenskrafter har här markerats med plus- respektive minustecken). Med kovalent bindning förstås att ett elektronpar delas mellan två grundämnen, såsom illustreras i figur 1.11 (syreatomen har 8 elektroner).



Figur 1.11



Figur 1.12

De kovalenta bindningarna bildar vinkeln 105° med varandra (fig. 1.12) och avståndet mellan en väteatom och syreatomen är $0,96 \cdot 10^{-10}$ m.

Vattenmolekylen är en mycket stabil bildning. Dissociationen, dvs jonbildningen, styrd av jämviktsvillkoret $[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] / [\text{H}_2\text{O}] = 10^{-14}$, är mycket liten, men ändå av fundamental betydelse för vattnets deltagande i olika kemiska reaktioner. $1,00 \text{ m}^3$ vatten innehåller bara $0,10 \text{ mg}$ H^+ -joner och $1,7 \text{ mg}$ OH^- -joner.

Den molekylära attraktionen (kohesionen) förstärkes om atomerna inom molekylen (såsom t ex hos vatten) har bestämda lägen genom riktade kovalenta bindningar, detta på grund av att de positiva och negativa laddningarna får åtskilda platser inom molekylerna. De senare sägs då vara "polära" och verkar som korta "dipoler" med en negativ och en positiv ända.

Attraktionen till andra molekyler förstärks ytterligare genom förekomsten av s k "vätebryggor". Dessas uppkomst antas bero på att väteatomen i kovalent bindning delar sin enda elektron med en annan atom inom molekylen.

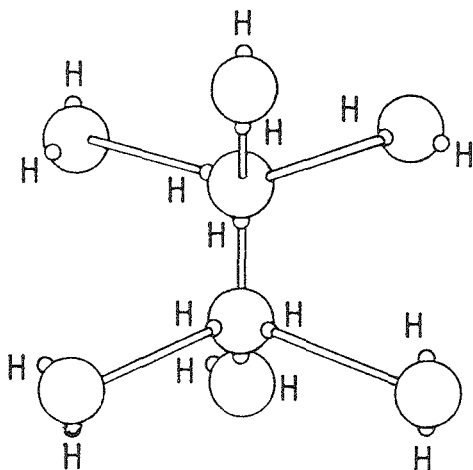
Vattnets särpräglade egenskaper kommer sig alltså i hög grad av de mycket starka intermolekylära krafter som orsakas av vattnets stora polaritet och stora förmåga att bilda vätebryggor.

1.7.2. Isens kristallstruktur

Molekylfixeringen i is sker under medverkan av vätebryggor. Från var och en av de två väteatomerna i en bestämd molekyl utgår en sådan brygga till syreatomerna i två närliggande molekyler, medan molekylens syreatom bindes genom vätebryggor från två andra molekyler.

Molekylen blir fixerad genom fyra bryggor; två "utgående" från de egna väteatomerna och två "inkommande" till syreatomen.

Bryggorna är "riktade" på samma sätt som de kovalenta bindningarna inom molekylen och bildar alltså vinkeln 105° med varandra. Tänkes molekylen förlagd till mittpunkten av en tetraeder, så är bryggorna utsträckta mot tetraederns fyra hörn (fig. 1.13).



Figur 1.13

En iskristall är uppbyggd på så sätt att tetraedriska element är placerade med hörnen mot varandra. Detta medför vid "normala" temperaturer ett hexagonalt system med luckor eller håligheter.

Iskristallen får en "öppen" struktur och en densitet som är mindre än den vattnet har i flytande tillstånd.

Vattnet har sin största densitet vid $+3,98^\circ\text{C}$, och när temperaturen sjunker under $+3,98^\circ\text{C}$ påbörjas molekylfixeringen med ökande volym som följd (strukturen "öppnas"). När frysning skett är molekylfixeringen avslutad och vattnets volym har ökat med cirka 9 %.

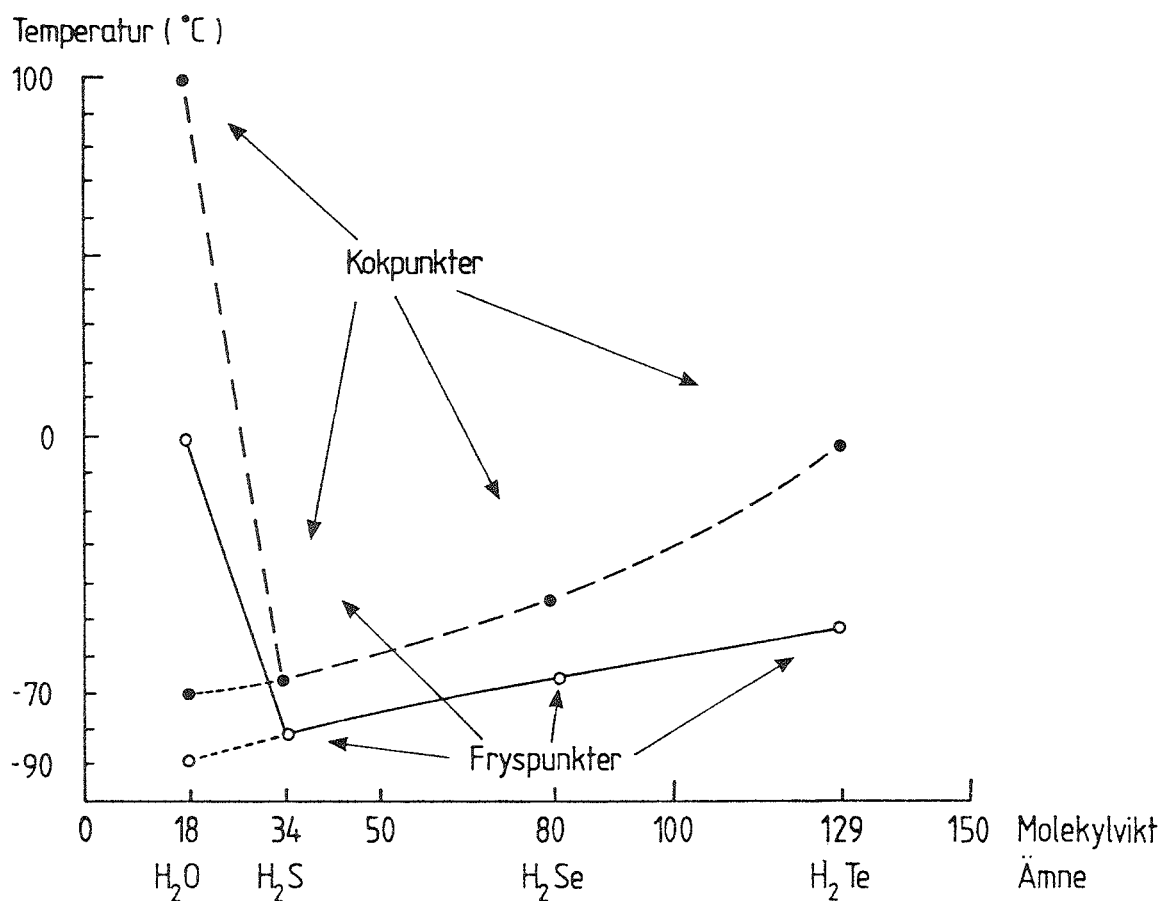
Den kraftiga volymökningen vid frysning är en egenskap som vattnet är ensam om. Isarna får stor betydelse för naturens värmebehållning och "sprängningen" vid isbildning medverkar till uppkomsten av de lösa jordlagren.

Vätebryggorna i isens kristallstruktur är relativt svaga bindningar, vilka brister vid starkt tryck. Detta förhållande är avgörande för glaciärernas förmåga att röra sig som plastiska massor.

1.7.3. Vattnets termiska egenskaper

I regel står frys- och kokpunkt hos ämnen med likartad molekylstruktur i sådan relation till varandra, att ämnen med högre molekylvikt behöver högre temperatur för att byta tillståndsform (t ex från vätska till gas eller från fast till flytande fas).

Jämföres vatten med H_2S (divätesulfid), H_2Se (diväteselenid) och H_2Te (divätetellurid), finner man att dess fryspunkt och kokpunkt egentligen borde ligga ungefär vid $-90\text{ }^\circ\text{C}$ respektive $-70\text{ }^\circ\text{C}$ (fig. 1.14).



Figur 1.14

Figur 1.14 visar att fryspunkten respektive kokpunkten för vatten i verkligheten ligger avsevärt högre än vad man kunde förvänta, vilket beror på de starka intermolekylära krafterna. Det krävs stark molekulärrörelse, dvs hög temperatur, för att fasomvandling skall kunna ske.

De starka intermolekylära krafterna i vatten medför också att dess specifika smältentalpi, specifika ångbildningsentalpi och specifika värmekapacitet är avsevärt större än för andra ämnen i naturen.

Vattnets speciella termiska egenskaper i förening med det faktum att det är det enda ämne i naturen som vid vanligt förekommande temperaturer uppträder i alla de tre tillstånden, fast, flytande och gasformigt, gör att vattnet är den i särklass viktigaste bufferten mot temperaturväxlingar.

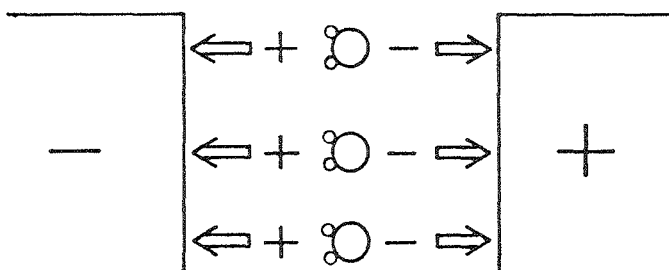
1.7.4. Vattnets dielektriska egenskaper

Positiva och negativa laddningar kan, som redan nämnts, ha olika lägen inom vissa molekyler. Dessa molekyler benämnes dipoler, och som mått på polarisationen användes begreppet dipolmoment, dvs laddningarnas storlek multiplicerad med avståndet mellan deras centra.

Befinner sig ett antal dipoler i ett elektriskt fält mellan två laddade plattor orienteras dipolerna i fältet och kapacitansen hos plattorna ökar medan attraktionen mellan dem minskar. Attraktionsminskningen är beroende av dipolmomentets storlek.

På grund av sin struktur har vattenmolekylerna ett mycket stort dipolmoment.

Införes vatten mellan två laddade plattor ökar kapacitansen och blir omkring 81 gånger större än motsvarande värde vid vakuum (fig. 1.15). Ökningen, som är dielektricitetskonstanten, är större för vatten än för något annat allmänt förekommande ämne.



Figur 1.15

1.7.5. Ytterligare några data om vatten

Volymutvidgningskoefficient i temperaturintervallet 20,0 - 100,0 °C:
 $0,18 \cdot 10^{-3}/K$

Specifik värmekapacitet, c , i temperaturintervallet 20,0 - 100,0 °C:
 $4,1868 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot K)$

Specifik smältentalpi: $0,335 \text{ MJ}/\text{kg}$

Specifik ångbildningsentalpi: $2,26 \text{ MJ}/\text{kg}$

Vattenångans specifika omvandlingsentalpi (latent entalpi), l , kan för temperaturintervallet $0,0 \leq t \leq 100,0$ °C uttryckas med formeln:

$$l = 597 - 0,52 \cdot t - 0,0006 \cdot t^2 \text{ cal/g} \quad \text{eller} \quad 1.16a$$

$$l = 2,50 - 0,00215 \cdot t - 0,0000025 \cdot t^2 \text{ MJ/kg} \quad 1.16b$$

där t är temperaturen i celsiusgrader.

Vattenångans specifika omvandlingsentalpi är vid 100,0 °C lika med 539 cal/g eller 2,26 MJ/kg och vid 0,0 °C lika med 597 cal/g eller 2,50 MJ/kg.

1.8. OMNÄMND LITTERATUR

Andersson, S. 1960. Kapillaritet. Kungl. Lantbrukshögskolan, Uppsala. Institutionen för agronomisk hydroteknik. Stenciltryck 26.

Bjerketorp, A. 1974. Formler för vattnets dynamiska och kinematiska viskositet. Lantbrukshögskolan, Uppsala. Avd. för lantbrukets hydroteknik. Manuskript.

Bretting, A. E. 1960. Hydraulik. Stationaere strömningar. Köbenhavn: Teknisk Forlag.

CRC. 1979. Handbook of chemistry and physics. A ready-reference book of chemical and physical data, 60:e uppl. Boca Raton: CRC (The Chemical Rubber Co.) Press.

Gregorig, R. 1933. Turbulente Strömung in geraden und gekrümmten glatten Rohrleitungen bei hohen Reynold'schen Zahlen. Dissertation, ETH, Zürich.

- Grimsehl, E. & Tomaschek, R. 1944. Lehrbuch der Physik. 1: Mechanik-Wärmelehre-Akustik, 14:e uppl. Leipzig & Berlin: B. G. Teubner.
- Grimsehl, E. & Schallreuter, W. 1965. Lehrbuch der Physik. 1: Mechanik-Akustik-Wärmelehre, 19:e uppl. Leipzig: B. G. Teubner.
- Hardy, R. C. & Cottington, R. L. 1949. Viskosity of deuterium oxide and water in the range 5 °C to 125 °C. National Bureau of Standards, Washington. Journal of Research 42, s. 573-578.
- Kell, G. S. 1975. Density, thermal expansivity, and compressibility of liquid water from 0 °C to 150 °C: Correlations and tables for atmospheric pressure and saturation reviewed and expressed on 1968 temperature scala. Journal of Chemical and Engineering Data 20:1, s. 97-105.
- de Laplace, P. S. 1806. Theorie de l'action capillaire. Paris.
- Moritz, H. 1980. Advanced physical geodesy. Karlsruhe: Herbert Wichmann Verlag.
- Moritz, H. 1982. Gravity field of earth. McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology, 5:e uppl. Band 4, s. 463-469.
- Sandsborg, J. & Bjerketorp, A. 1993. Kompendium i agronomisk hydromekanik. 7: Reella fluiders rörelse, 2:a uppl. Sveriges Lantbruksuniversitet, Uppsala. Avd. för lantbrukets hydroteknik. Avdelningsmeddelande 88:9 (1:a uppl. 1988).
- SIS. 1988. Storheter och enheter. SI måttenheter. Standardiseringskommissionen i Sverige (SIS), Stockholm. SIS-STG handbok 103, utgåva 5.
- Vennard, J. K. & Street, R. L. 1976. Elementary fluid mechanics, 5:e uppl. New York: John Wiley & Sons.

1.9. BIHANG 1.1: VATTNETS DENSITET M M

Nedanstående tabell förtecknar vattnets densitet, ρ , dynamiska viskositet, η , kinematiska viskositet, ν , ytspänning, σ , och elasticitetsmodul, E, vid olika temperaturer från 0,0 °C till 100,0 °C (atmosfärstryck). Uppgifterna om densiteten härrör från Kell (1975), medan övriga uppgifter i huvudsak är hämtade ur CRC (1979).

t (°C)	ρ (kg/m ³)	$\eta \cdot 10^3$ (Pa·s)	$\nu \cdot 10^6$ (m ² /s)	σ (N/m)	E (GPa)
0,0	999,84	1,787	1,787	0,0756	1,98
1,0	999,90	1,728	1,728		
2,0	999,94	1,672	1,672		
3,0	999,96	1,618	1,618		
4,0	999,97	1,567	1,567		
5,0	999,96	1,518	1,518	0,0749	2,05
6,0	999,94	1,472	1,472		
7,0	999,90	1,428	1,428		
8,0	999,85	1,386	1,386		
9,0	999,78	1,346	1,346		
10,0	999,70	1,307	1,308	0,0742	2,11
11,0	999,61	1,270	1,271		
12,0	999,50	1,235	1,236		
13,0	999,38	1,202	1,203		
14,0	999,24	1,169	1,170		
15,0	999,10	1,139	1,140	0,0735	2,16
16,0	998,94	1,109	1,110		
17,0	998,77	1,081	1,082		
18,0	998,60	1,053	1,055	0,0731	
19,0	998,41	1,027	1,029		
20,0	998,20	1,002	1,004	0,0728	2,20
21,0	997,99	0,9780	0,9799		
22,0	997,77	0,9548	0,9570		
23,0	997,54	0,9326	0,9349		
24,0	997,30	0,9111	0,9136		
25,0	997,04	0,8904	0,8931	0,0720	2,23
30,0	995,65	0,7975	0,8010	0,0712	2,25
40,0	992,22	0,6529	0,6580	0,0696	2,28
50,0	988,04	0,5468	0,5534	0,0679	2,29
60,0	983,20	0,4665	0,4745	0,0662	2,28
70,0	977,77	0,4042	0,4134	0,0644	2,25
80,0	971,80	0,3547	0,3650	0,0626	2,20
90,0	965,32	0,3147	0,3260	0,0608	2,14
100,0	958,36	0,2818	0,2941	0,0589	2,07

1.10. BIHANG 1.2: NÅGRA ALLMÄNNA FYSIKALISKA ELEMENTA

1.10.1. Ett urval grundläggande lagar

Tröghetslagen: Med tröghet förstår vi den av erfarenheten bestyrkta egenskapen hos en kropp att förbli i sitt tillstånd av antingen vila eller rörelse med oförändrad hastighet, såvida den ej påverkas av någon kraft (Newtons första lag; tröghetslagen).

Accelerationslagen: Rörelseförändringen, dvs accelerationen, är proportionell mot den verkande kraften och riktad längs den räta linje i vilken kraften verkar (Newtons andra lag; accelerationslagen).

Om \vec{F} är den (yttre) kraft, som verkar på en partikel med massan m och partikeln på grund därav rör sig med hastigheten \vec{v} , så är

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \quad 1.17$$

där $m \vec{v}$ kallas rörelsemängden.

Är m , såsom ofta är fallet, oberoende av tiden blir

$$F = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \quad 1.18$$

där \vec{a} är partikelns acceleration

Lagen om aktion och reaktion: Mot varje kraft (aktionskraft) svarar en lika stor och motsatt riktad kraft (reaktionskraft) så att de ömsesidigt mellan två kroppar verkande krafterna är lika stora och motsatt riktade (Newtons tredje lag; lagen om aktion och reaktion).

Termodynamikens första huvudsats

Termodynamikens s k första huvudsats lyder: Ett perpetuum mobile av första slaget är en omöjlighet. Härmed menas att det icke är möjligt att konstruera en maskin som ständigt uträttar arbete utan energitillförsel. Eller med andra ord: Summan av alla existerande energimängder är konstant.

Termodynamikens andra huvudsats

Termodynamikens s k andra huvudsats lyder: Ett perpetuum mobile av andra slaget är en omöjlighet. Härmed menas att det icke är möjligt att konstruera en maskin som oavbrutet utför arbete, om energien skall tas från en värmereservoar, vars temperatur är lägre än temperaturen hos de andra kroppar som deltagar i processen.

1.10.2. Kraftsystem

Ett "frikroppsdiagram" för ett föremål - eller del av ett föremål - visar alla andra kroppars verkan på föremålet eller på den betraktade delen därav. Jordens (gravitationens) inverkan i sammanhanget benämnes masskraft. Denna är proportionell mot föremålets eller föremålsdelens massa.

På föremålets yta kan dessutom verka ytkrafter (tryckkrafter). I de fall den fria kroppen är i vila eller i rörelse med oförändrad hastighet, säges den vara i jämvikt.

När den fria kroppen inte utsätts för någon acceleration måste - enligt Newtons andra lag - i varje godtycklig riktning summan av alla kraftkomponenter vara lika med noll. Likaså måste summan av alla moment kring en godtycklig axel vara lika med noll.

Två kraftsystem är ekvivalenta om de får samma värde vid summering av krafterna i en godtycklig riktning och samma värde vid summering av momenten kring en godtycklig axel. Det enklaste av alla ekvivalenta kraftsystem är kraftsystemets resultant.

Ekvivalenta kraftsystem, som verkar på en fri kropp, förorsakar alltid samma rörelse eller samma vila.

Verkan av en fluid på en godtycklig yta kan ersättas av en resultantkraft, vilken ger upphov till samma yttre rörelse eller reaktion, som det ursprungliga kraftsystemet, härrörande från och knutet till den manifesta fluiden. Härigenom blir det möjligt att - teoretiskt likaväl som vid praktiska beräkningar - helt abstrahera de av fluiden reellt genererade krafterna och låta resultantkraften träda i deras ställe.

1.10.3. d'Alemberts princip

d'Alemberts princip innebär att varje dynamiskt problemkomplex kan göras möjligt att behandla som vore det statiskt, med hjälp av att vissa tänkta krafter införes. Ett tillämpningsexempel skall här ges.

Enligt accelerationslagen är $\vec{F} = m \vec{a}$. Flyttas termen i högra ledet över till vänstra sidan fås

$$\vec{F} - m \vec{a} = 0 \quad \text{eller} \quad F + m (-\vec{a}) = 0$$

Termen $m \vec{a}$ har samma dimension som kraften \vec{F} , vilket medför att man, trots att produkten $m \vec{a}$ inte är någon verklig kraft, kan räkna som om termen så vore vid behandling av rörelseproblem. Man brukar kalla den tänkta kraften, $m \vec{a}$, för tröghetskraft.

Sambandet mellan verkliga krafter och tröghetskrafter kan uttryckas sålunda: De reella krafter, som verkar på en partikel, och de enligt d'Alemberts princip tillfogade tröghetskrafterna balanserar varandra.

d'Alemberts princip formulerades av den franske matematikern och filosofen Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) i hans klassiska arbete "Traité de dynamique" från år 1743. Upphovsmannen är idéhistoriskt mycket berömd som en av de två ledarna (den andre var Denis Diderot, 1713-1784) för de s k encyklopedisterna, skaparna av den stora franska encyklopedin, vilken kom ut 1751-1780. Allmänt vedertagen inom fysiken blev d'Alemberts princip först i början av 1800-talet, främst genom insatser av en annan fransk matematiker, Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

1.10.4 Friktionsfri kaströrelse

Om en kropp, utsatt för gravitationskraften $g \text{ m/s}^2$, kastas med en utgångshastighet av $v_0 \text{ m/s}$ i en riktning som bildar vinkeln φ mot horisontalplanet, så kommer kroppen, under antagande om friktionsfrihet, att efter tiden $t \text{ (s)}$ befinna sig i en punkt med koordinaterna x och y definierade sålunda:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos \varphi \quad 1.19 \text{ a}$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{g \cdot t^2}{2} \quad 1.19 \text{ b}$$

Hastighetskomponenterna i x-led respektive y-led i punkten (x;y):

$$v_x = v_0 \cdot \cos \varphi \quad 1.20 \text{ a}$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \varphi - g \cdot t \quad 1.20 \text{ b}$$

Den verkliga eller resulterande hastigheten, v , riktad längs tangenten av den bana kroppen under sin rörelse beskriver är

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad 1.21 \text{ a}$$

Vidare gäller (jfr ekvationerna 1.20 a och 1.20 b):

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi + (v_0 \cdot \sin \varphi - g \cdot t)^2 = \\ &= v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi + v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi + g^2 \cdot t^2 - 2v_0 \cdot g \cdot t \cdot \sin \varphi = \\ &= v_0^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2g \cdot (v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{g \cdot t^2}{2}) \end{aligned}$$

Men eftersom

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad \text{och} \quad v_0 \cdot t \cdot \sin \varphi - \frac{g \cdot t^2}{2} = y,$$

fås

$$v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2g \cdot y,$$

varför

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot y} \quad 1.21 \text{ b}$$

Ekvationen för kroppens bana, den s k kastparabeln, kan fås ur ekvation 1.19 b om v_0 i dess första term substitueras med $x/(t \cdot \cos \varphi)$ och t i dess andra term ersättes med $x/(v_0 \cdot \cos \varphi)$, i båda fallen med hjälp av omformningar av ekvation 1.19 a. Vi får

$$y = x \cdot \tan \varphi - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi} = x \cdot \tan \varphi - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \varphi) \quad 1.22$$

För snett uppåtriktade kast är resultant hastighetens riktning horisontell i banans högsta punkt och den vertikala hastighetskomponenten $v_y = 0$. Av ekvation 1.20 b erhålles då en tid, t_1 , som svarar mot denna punkt i banan, dvs

$$t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin \varphi}{g}$$

Insättes t_1 såsom värde på parametern t i ekvation 1.19 b erhålles maximumvärdet, y_{\max} , på y , dvs den s k stighöjden (kasthöjden), h

$$y_{\max} = h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g} \quad 1.23$$

Insättes t_1 såsom värde på parametern t i ekvation 1.19 a erhålles det mot kasthöjden svarande x -värdet, $x_h = L/2$

$$x_h = L/2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\varphi)}{2g}$$

På grund av banans symmetriska form är hela kastvidden (avsatt på horisontalplanet) $2x_h = L$, dvs

$$2x_h = L = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\varphi)}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin \varphi \cos \varphi \quad 1.24$$

Kastvidden når sitt maximum, L_{\max} , då $\sin(2\varphi)$ har sitt största värde, dvs då $\sin(2\varphi) = 1$ och $\varphi = 45^\circ$. Således

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad 1.25$$

Divideras ekvationerna 1.23 och 1.24 med varandra fås

$$\frac{h}{L} = \frac{\tan\varphi}{4} \quad 1.26$$

När $L = L_{\max}$ är $\tan\varphi = \tan(45^\circ) = 1$ och h har ett värde, h_1 , som svarar mot de aktuella värdena på L och φ . Vi får

$$L_{\max} = 4h_1 \quad 1.27$$

dvs att den maximala kastvidden är fyra gånger så stor som kashöjden vid denna kastvidd.

Av ekvation 1.24 framgår att samma kastvidd erhålles för två olika elevationsvinklar, φ_1 och φ_2 (i första kvadranten), vilka uppfyller villkoret att $\sin(2\varphi_1) = \sin(2\varphi_2)$.

Sambandet mellan dessa två vinklar är

$$2\varphi_1 = 180 - 2\varphi_2,$$

dvs

$$\varphi_1 = 90 - \varphi_2 \quad \text{eller} \quad \varphi_1 - 45 = 45 - \varphi_2.$$

Kastvidden blir alltså densamma för två elevationsvinklar så beskaffade att den ena är lika mycket större än 45° som den andra är mindre än 45° .

Om vinkeln φ tänkes kontinuerligt variera från 0° till 90° erhålles (för ett givet v_0 -värde) en serie kastparabler som inneslutes av en begränsningskurva, den s k säkerhetsparabeln. Ekvationen för denna är

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \quad 1.28$$

1.11. BIHANG 1.3: GREKISKA BOKSTÄVER

Tryckta bokstäver

Namn	Raka		Kursiva	
	Versaler	Gemena	Versaler	Gemena
alfa	Α	α	Α	α
beta	Β	β	Β	β
gamma	Γ	γ	Γ	γ
delta	Δ	δ	Δ	δ
epsilon	Ε	ε (ε)	Ε	ε (ε)
zeta	Ζ	ζ	Ζ	ζ
eta	Η	η	Η	η
teta	Θ	θ (θ)	Θ	θ (θ)
jota	Ι	ι	Ι	ι
kappa	Κ	κ (κ)	Κ	κ (κ)
lambda	Λ	λ	Λ	λ
my	Μ	μ	Μ	μ
ny	Ν	ν	Ν	ν
ksi	Ξ	ξ	Ξ	ξ
omikron	Ο	ο	Ο	ο
pi	Π	π (π)	Π	π (π)
ro	Ρ	ρ (ρ)	Ρ	ρ (ρ)
sigma	Σ	σ (σ)	Σ	σ (σ)
tau	Τ	τ	Τ	τ
ypsilon	Υ (Υ)	υ	Υ (Υ)	υ
fi	Φ	φ (φ)	Φ	φ (φ)
ki	Χ	χ	Χ	χ
psi	Ψ	ψ	Ψ	ψ
omega	Ω	ω	Ω	ω

Textade bokstäver

Namn	Raka		Kursiva	
	Versaler	Gemena	Versaler	Gemena
alfa	Α	α	Α	α
beta	Β	β	Β	β
gamma	Γ	γ	Γ	γ
delta	Δ	δ	Δ	δ
epsilon	Ε	ε (ε)	Ε	ε (ε)
zeta	Ζ	ζ	Ζ	ζ
eta	Η	η	Η	η
teta	Θ	θ (θ)	Θ	θ (θ)
jota	Ι	ι	Ι	ι
kappa	Κ	κ (κ)	Κ	κ (κ)
lambda	Λ	λ	Λ	λ
my	Μ	μ	Μ	μ
ny	Ν	ν	Ν	ν
ksi	Ξ	ξ	Ξ	ξ
omikron	Ο	ο	Ο	ο
pi	Π	π (π)	Π	π (π)
ro	Ρ	ρ (ρ)	Ρ	ρ (ρ)
sigma	Σ	σ (σ)	Σ	σ (σ)
tau	Τ	τ	Τ	τ
ypsilon	Υ (Υ)	υ	Υ (Υ)	υ
fi	Φ	φ (φ)	Φ	φ (φ)
ki	Χ	χ	Χ	χ
psi	Ψ	ψ	Ψ	ψ
omega	Ω	ω	Ω	ω

I tekniska och naturvetenskapliga sammanhang användes raka bokstäver som beteckningar för måttenheter och kursiva bokstäver som beteckningar för storheter.

Bokstävernas namn stavas ovan enligt Tekniska nomenklaturcentralens (TNC:s) rekommendationer. I klassisk och i språkvetenskaplig litteratur, liksom i många utländska språk, förekommer stavningen alpha istället för alfa, theta istället för teta, iota istället för jota, xi istället för ksi, rho istället för ro, phi istället för fi samt chi istället för ki. My, ny, omikron och ypsilon skrives på engelska mu, nu, omicron respektive upsilon.

Vokalen i ro uttalas som å. I ki är k-ljudet hårt.

I fråga om bokstävernas form kan små avvikelser godtagas, under förutsättning att dessa inte leder till förväxlingsrisk.