Exempelsamling i hydromekanik

John Sandsborg

STENCILTRYCK NR 48

INSTITUTIONEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK

UPPSALA 1971

Institutionen för lantbrukets hydroteknik delger bl. a. i sin tidskrift *Grundförbättring* resultat från institutionens olika verksamhetsgrenar. Allt material blir emellertid inte föremål för tryckning. Undersökningsresultat av preliminär natur och annat material som av olika anledningar ej ges ut i tryck delges ofta i stencilerad form. Institutionen har ansett det lämpligt att redovisa dylikt material i form av en i fri följd utarbetad serie, benämnd stenciltryck. Serien finns endast tillgänglig på institutionen och kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Institutionen för lantbrukets hydroteknik, *750 07 Uppsala 7*

Stenciltryck

Nr	År	Författare och titel
1—12		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Redogörelse för resultaten av täckdikningsförsöken åren 1951—1962.
13—15		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av täckdikningsförsök och bevattningsförsök åren 1963—1965.
16	1940	Gunnar Hallgren. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; några hydrotekniska studier.
17	1942	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient.
18	1943	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning.
19	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydromekanik.
20	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller och kommentarer.
21	1960	Sigvard Andersson. Kapillaritet.
22	1961	Sigvard Andersson. Markens temperatur och värmehushållning.
23	1962	Waldemar Johansson. Bevattningsförsök i potatis, korn och foderbetor vid Tönnersa försöksgård 1959—1961.
24	1962	Waldemar Johansson. Metodik och erfarenheter vid användning av hålkort för undersökning av torrläggningsförhållanden och ytsänkning vid Nedre Olandsån.
25	1962	Waldemar Johansson. Utredning för förslag till bevattningsanläggning vid Sör Salbo, Salbohed, Västmanlands län.
26	1963	Sigvard Andersson. Skrivningar i agronomisk hydroteknik.
27	1964	Gösta Berglund och Stig Sjöberg. Undersökning av plaströrstäckdikningar.
28	1964	Aug. Håkansson. Anvisning rörande täckdikning med plaströr av styv PVC.
29	1966	Gösta Berglund. Vattendragsförbundet: Förslag till överenskommelse och stadgar samt något om kostnadsfördelningar.
30	1966	Tryggve Fahlstedt. Kvismaredalsprojektet — en orientering samt Redogörelse för undersökning i syfte att klargöra avkastningens beroende av högvattenstånden i Kvismare kanal.
31	1966	Gunnar Hallgren. Vattenrätt.
32	1966	Nils Brink. Hydrologi.
33	1967	Yngve Jonsson, Ytplanering med planersladd.
34	1967	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1966 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök.
35	1967	Ulrich Nitsch. Om östersjövattnets användbarhet för bevattningsändamål.
36	1968	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1967 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök.
37	1968	Nils Brink. Ansvarsfördelningen vid underhåll av vattendrag inom Sagåns vattensystem.
38	1968	Aug. Håkansson, Waldemar Johansson, Tryggve Fahlstedt. Nederbördens storlek och fördelning.
39	1968	Gösta Berglund. Om genomsläppligheten i återfyllning och rörfogar.
40	1969	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1968 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök.

Forts. på omslagets tredje sida

E X E M P E L S A M L I N G

i

H Y D R O M E K A N I K

av

John Sandsborg

Uppsala 1971

Innehåll

Förord

Räkneexemplen i denna samling avses vara ett komplement till professor Sigvard Andersson: Kompendium i agronomisk hydroteknik I. Elementär hydromekanik, Uppsala 1952. Som hjälpmedel vid utarbetandet av exemplen har i huvudsak använts ovannämnda kompendium, jämte T. Lundberg, Hydromekanik för tekniska läroverk, Örebro 1953, Ranald V. Giles, Theory and Problems of Fluid Mechanics and Hydraulics och W.F. Hughes, J.A. Brighton, Theory and Problems of Fluid Dynamics ur Schaums Outline Series.

Uppsala i augusti 1971

John Sandsborg

HYDROSTATIK

TRYCK

Allmänt

1. Definiera begreppet vätsketryck och visa att det i en punkt är lika i alla riktningar.

Lösning: Tryck definieras som kraft per ytenhet enligt relationen

$$p \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad \text{-------------------} \quad (1)$$

p kallas ofta det specifika trycket eller enbart trycket.

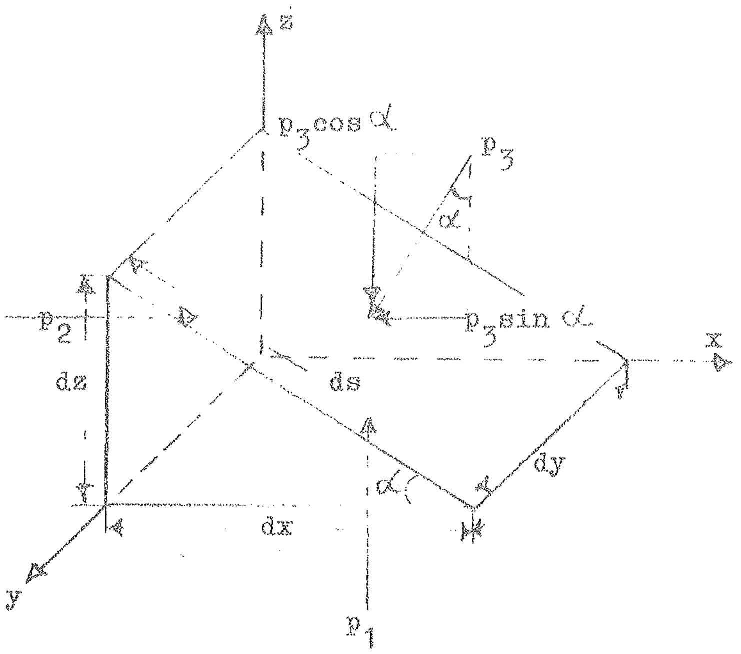
Kan trycket över en större yta anses vara konstant = p fås tryckkraften F ur ekv. (1) genom integration

$$\int dF = \int p dA = p \int dA$$

eller

$$F = p \cdot A \quad \text{-------------------} \quad (2)$$

Beviset gäller för en ideal vätska och för en icke ideal vätska under förutsättning att den befinner sig i relativ vila. I annat fall måste hänsyn tas till den inre friktionen.



Att vätsketrycket i en punkt är lika i alla riktningar kan bevisas enligt följande. Vidstående figur föreställer ett oändligt litet vätskeelement i vila påverkad av vätskan omkring det. Tryckkrafternas storlek anges med p och index. Förutom av tryckkrafter angrips elementet av en masskraft nämligen tyngdkraften. Vi har också att då tryckkrafterna är proportionella mot ytorna så är masskrafterna proportionella mot elementets volym.

Då volymen är liten av 3^e ordningen kan enligt differentialkalkylen masskraften (tyngdkraften) försummas när dx, dy och dz $\longrightarrow$ 0.

Tryckkrafterna måste därför vid jämvikt ge resultanten 0 i samtliga axelriktningar.

Då fås

I x-riktningen: $p_2 dy\ dz - p_3 dy\ ds \sin\alpha = 0$

Men $dz = ds \sin\alpha$ varför $\underline{p_2 = p_3}$

I y-riktningen är krafterna lika och tar ut varandra.

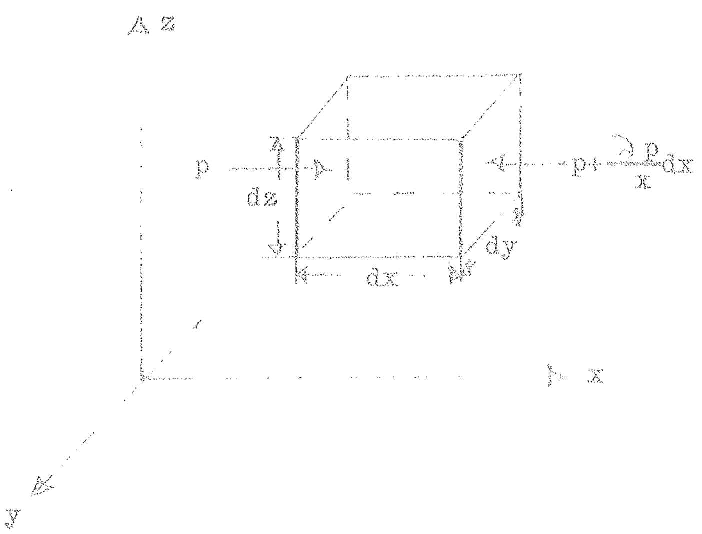
I z-riktningen: $p_1 dx\ dy - p_3\ dy\ ds \cos\alpha = 0$

Men $dx = ds \cos\alpha$ varför $\underline{p_1 = p_3}$

Alltså $p_1 = p_2 = p_3$

2. Härled hydrostatikens grundekvation.

<u>Lösning:</u>



På ett volymselement $dx\ dy\ dz$ med massan $\varrho\ dx\ dy\ dz$ i vidstående figur verkar dels <u>per massenhet</u> masskrafterna X, Y och Z och dels <u>per ytenhet</u> ytkrafterna p och $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$, p och $p + \frac{\partial p}{\partial y}\ dy$ samt p och $p + \frac{\partial p}{\partial z}\ dz$.

Jämvikt i x-riktningen råder om

$$p\ dy\ dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\ dx)\ dy\ dz + X\ \varrho\ dx\ dy\ dz = 0$$

$$p\ dy\ dz - p\ dy\ dz - \frac{\partial p}{\partial x}\ dx\ dy\ dz + X\ \varrho\ dx\ dy\ dz = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho X \text{ - } (1)$$

På samma sätt fås

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \varrho Y \text{ - } (2)$$

och

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho Z \text{ - } (3)$$

Trycket i punkten x, y, z är p eller

$$p = f(x, y, z) \qquad (4)$$

Den fullständiga differentialen av funktionen

$$p = f(x, y, z)$$

skrives

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz \qquad (5)$$

Multipliceras ekv. (1) med dx, ekv. (2) med dy och ekv. (3) med dz samt adderas led för led fås

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = \varrho X\,dx + \varrho Y\,dy + \varrho Z\,dz$$

och

$$dp = \varrho X\,dx + \varrho Y\,dy + \varrho Z\,dz \qquad (6)$$

Ekv. (6) kallas hydrostatikens grundekvation.

3. Härled ett uttryck för vätsketrycket i en punkt för en vätska i relativ vila.

Lösning: För en vätska i relativ vila och endast utsatt för tyngdkraftens inverkan är per massenhet i hydrostatikens grundekvation

$$dp = \varrho X\,dx + \varrho Y\,dy + \varrho Z\,dz \qquad (1)$$

$$X = 0; \quad Y = 0 \text{ och } Z = -g$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$dp = -\varrho g\,dz$$

Vi integrerar och får

$$p = -\varrho g z + C$$

Räknas z från vätskans övre yta och är trycket där p_o fås $C = p_o$. Omkastning av axelriktningarna och utbyte av z mot h ger till slut

$$p = p_o + \varrho g h \qquad (2)$$

Normalt brukar trycket räknas som övertryck i förhållande till atmosfärstrycket = p_o. Då fås

$$p - p_o = \rho g h = \text{hydrostatiska trycket.}$$

3. Hur många cm vattenpelare motsvaras av 60 mm Hg om ρ_{H_2O} = = 1000 kg/m^3 och ρ_{Hg} = 13600 kg/m^3?

<u>Lösning</u>: Vi har relationen

$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_{H_2O} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg}$$

Insättning ger (SI-enheter)

$$1000 \cdot g \cdot h_{H_2O} = 13600 \cdot g \cdot 0{,}06$$

$$\underline{h_{H_2O}} = 0{,}816 \text{ m} = \underline{81{,}6 \text{ cm}}$$

5. Hur många m vattenpelare motsvarar 1 teknisk atmosfär = 1 at = = 1 kp/cm^2 om ρ_{H_2O} = 1000 kg/m^3?

<u>Lösning</u>: Vi har relationen

$$\rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_{H_2O} = P \text{ N/m}^2 \quad \text{-------------} \quad (1)$$

Vi har också att

$$1 \text{ kp/cm}^2 = 10\,000 \text{ kp/m}^2 = 10\,000 \cdot g \cdot \text{N/m}^2 = P \quad \text{-----} \quad (2)$$

Ekv. (1) ger då efter insättning

$$1000 \cdot g \cdot h_{H_2O} = 10\,000 \cdot g$$

$$\underline{h_{H_2O}} = \underline{10 \text{ m}}$$

6. Hur många mm Hg är 1 atm., då enligt definition 1 atm. är lika med 101325 N/m^2? ρ_{Hg}: 13600 kg/m^3, $g = 9,81\ m/sek^2$.

Lösning: Vi kan skriva

$$\rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg} = 101325\ N/m^2$$

dvs.

$$13600 \cdot 9,81 \cdot h_{Hg} = 101325$$

$$\underline{h_{Hg}} = \frac{101325}{13600 \cdot 9,81} = 0,760\ m = \underline{760\ mm}$$

7. Hur många mm Hg är 1 at? 1 at är definierad som 1 kp/cm^2 = = 98066,5 N/m^2. ρ_{Hg} = 13600 kg/m^3.

Lösning: Vi kan direkt skriva

$$13600 \cdot 9,80665 \cdot h_{Hg} = 98066,5\ N/m^2$$

$$\underline{h_{Hg}} = \frac{100}{136} = 0,735\ m = \underline{735\ mm}$$

8. Hur stor är skillnaden mellan absoluta trycket och atmosfärstrycket dvs. hydrostatiska trycket i N/m^2 5 m under vattenytan i ett öppet kärl om $\rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$ och $g = 9,81\ m/sek^2$?

Lösning: Tryckets tillväxt med djupet i en vätska kan tecknas

$$p_a = p_o + \rho\ g\ h$$

där p_a = absoluta trycket på djupet h under vätskeytan

p_o = atmosfärstrycket

ρ = vätskans täthet

g = tyngdkraftsaccelerationen

h = djupet under vätskeytan

Här är i SI-enheter

$\rho = 1000\ kg/m^3$

och $h = 5\ m$

varför insättning i ekv. ovan ger

$$\underline{p_a - p_o} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 5 = \underline{49050\ N/m^2}$$

9. Hur djupt under den fria vätskeytan i en öppen behållare är oljetrycket (absoluta trycket minus atmosfärstrycket) 0,2 atm.
$\rho_{olja} = 850\ kg/m^3$; 1 atm. = 101325 N/m^2; $g = 9{,}81\ m/sek^2$.

Lösning: Vi har relationen

$$p_a = p_o + \rho g h \quad \text{som ger}$$

$$p_a - p_o = \rho g h \quad N/m^2$$

Insättning ger

$$p_a - p_o = 850 \cdot 9{,}81 \cdot h = 0{,}2 \cdot 101325$$

$$\underline{h} = \frac{20265}{8338{,}5} = \underline{2{,}43\ m}$$

LIKFORMIGT ACCELERERAD TRANSLATIONSRÖRELSE

1. En rektangulär behållare 6 m lång, 1.8 m djup och 2.1 m bred är helt fylld med vatten. Behållaren sätts i horisontell, likformigt accelererad rörelse i dess längdriktning. Hur mycket vatten rinner ut vid en acceleration av 1.5 m/sek^2?

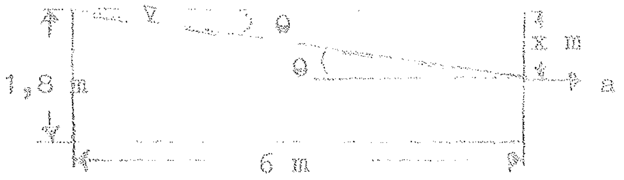


Fig. 1

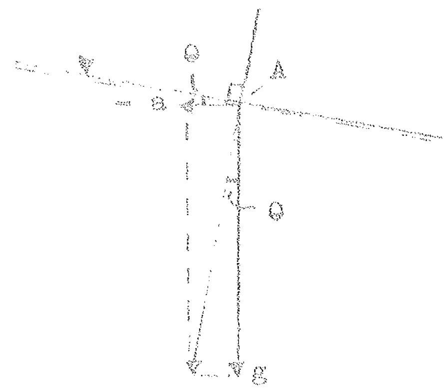


Fig. 2

<u>Lösning</u>: Vattenytans lutning fås ur fig. 2 genom ekv.

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{linjära acc.}}{\text{tyngdkraftsacc.}} = \frac{a}{g} = \frac{1,5}{9,81} = 0,1529 \quad \text{-------------} \quad (1)$$

Ytans sänkning ur fig. 1

$$\text{tg}\ \theta = \frac{x}{6}\ ; \quad x = 6\ \text{tg}\ \theta \quad \text{-----------------} \quad (2)$$

Komb. av ekv. (1) och (2) ger

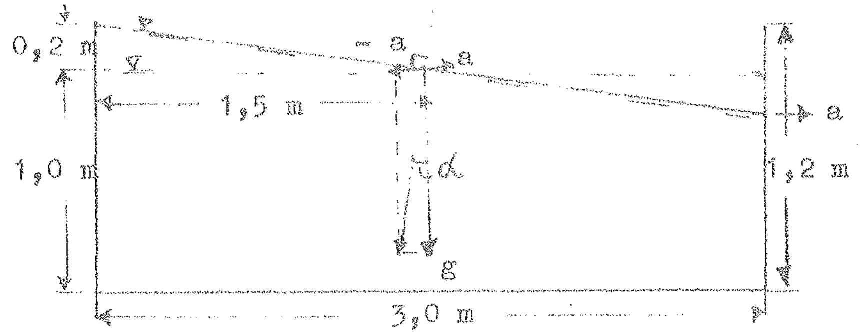
$$\underline{x} = 6\ \text{tg}\ \theta = 6 \cdot 0,1529 = \underline{0,9174}$$

Den utrunna vattenvolymen blir då

$$\frac{2,1 \cdot 0,9174 \cdot 6}{2} = \underline{5,78\ m^3}$$

2. En öppen behållare, 3.0 m lång och 1.2 m djup, är till ett djup av 1.0 m fylld med vätska. Behållaren accelereras horisontellt likformigt i längdriktningen från vila till en hastighet av 14.0 m/sek. Om ingen vätska får spillas under förflyttningen, bestäm den kortaste tid, som åtgår för att uppnå den angivna hastigheten.

Lösning:



Ur figuren fås

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{g}$ (jfr föregående problem)

som ger

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{9,81} = \frac{0,2}{1,5}$$

$$\underline{a} = \frac{1,962}{1,5} = \underline{1,308\ \mathrm{m/sek}^2}$$

Från mekaniken har vi att

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ eller } v = v_o + at$$

Här är $v_o = 0$ och vi får

$$14,0 = 1,308 \cdot t$$

$$\underline{t} = \underline{10,7\ \mathrm{sek.}}$$

3. En öppen behållare med vatten förs upp för ett lutande plan med en konstant acceleration av 3.6 m/sek^2. Planets vinkel med horisontalplanet är 30^o. Under vilken vinkel med horisontalplanet inställer sig vattenytan?

Lösning:

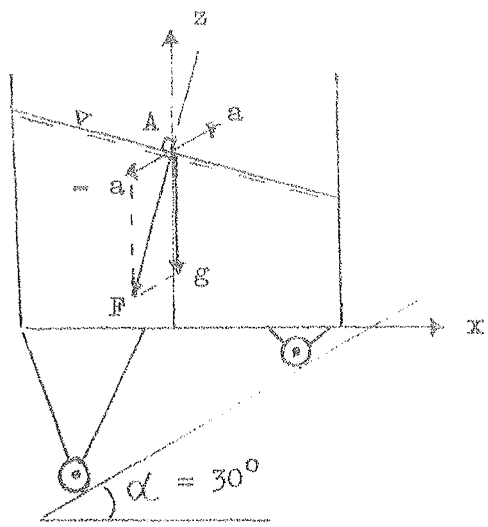


Fig. 1

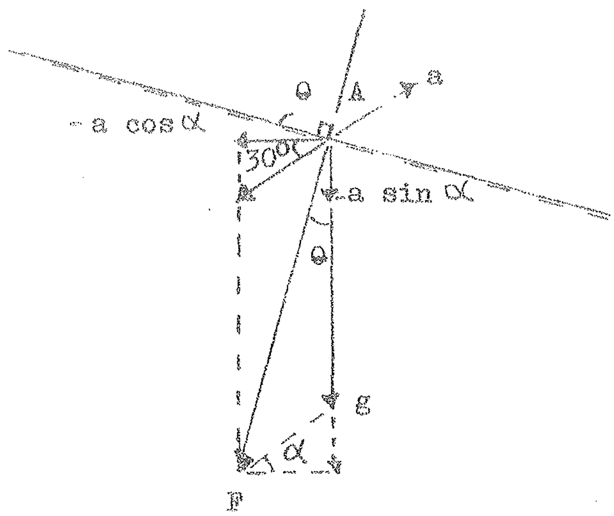


Fig. 2

Enligt fig. är de krafter, som påverkar ett masselement i punkten A, dels masskraften (tyngdkraften) g, dels enligt d'Alemberts princip tröghetskraften -a. Resultanten riktad vinkelrät mot vattenytan blir då F.

Ur fig. 2 kan vi då ställa upp följande ekvationer

$$F \cos \Theta = a \sin \alpha + g \qquad (1)$$

$$F \sin \Theta = a \cos \alpha \qquad (2)$$

Vi multiplicerar ekv (1) med sin Θ och ekv. (2) med cos Θ

$$F \sin \Theta \cos \Theta = a \sin \alpha \sin \Theta + g \sin \Theta$$

$$F \sin \Theta \cos \Theta = a \cos \alpha \cos \Theta$$

Vi får då

$$a \sin \alpha \sin \Theta + g \sin \Theta = a \cos \alpha \cos \Theta \qquad (3)$$

Ekv. (3) omformas

$$a \cos \alpha \cos \Theta - a \sin \alpha \sin \Theta = g \sin \Theta$$

$$\cos \Theta - \operatorname{tg} \alpha \sin \Theta = \frac{g}{a \cos \alpha} \sin \Theta$$

$$\cot \Theta = \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{a \cos \alpha} \qquad (4)$$

Insättning av givna värden i ekv. (4) ger

$$\cot \Theta = \operatorname{tg} 30^\circ + \frac{9{,}81}{3{,}6 \cdot \cos 30^\circ} = 3{,}724$$

$$\underline{\Theta = 15{,}0}$$

Multiplicerar vi ekv. (4) med cos α fås

$$\cos \alpha \cot \Theta - \sin \alpha = \frac{g}{a}$$

eller

$$\frac{a}{g} = \frac{1}{\cos \alpha \cot \Theta - \sin \alpha} \qquad (5)$$

För ett horisontalplan är $\alpha = 0$ och $\operatorname{tg} \Theta = \frac{a}{g}$ dvs. ekv. <u>för horisontellt accelererad</u> rörelse. Sker rörelsen nedför planet blir tecknet för $\operatorname{tg} \alpha$ minus i ekv. (4).

Uppgiften kan också lösas med utgångspunkt från hydrostatikens grundekvation.

$$dp = \varrho X\, dx + \varrho Y\, dy + \varrho Z\, dz \quad \text{-----------} \quad (6)$$

Här är $X = - a \cos \alpha$

$Y = 0$

$Z = - a \sin \alpha - g$

och $dp = 0$

Insättning i ekv. (6) ger

$$- \varrho\, a \cos \alpha\, dx - \varrho\, (a \sin \alpha + g)\, dz = 0$$

Integration ger

$$z = - \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g} \int dx = - \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g}\, x + C$$

För $x = 0$ blir $C = z = z_o$ och vi får ekv.

$$z = z_o - \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g}\, x \quad \text{---------------} \quad (7)$$

I ekv. (7) är

$$\frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g} = k = \operatorname{tg} \Theta$$

och efter insättning

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3{,}6 \cos 30^o}{3{,}6 \sin 30^o + 9{,}81} = \frac{3{,}6 \cdot 0{,}8660}{3{,}6 \cdot 0{,}5 + 9{,}81} = \frac{3{,}1176}{11{,}61} = 0{,}2685$$

$$\underline{\underline{\Theta = 15{,}0^o}}$$

4. Härled ett uttryck för tryckets tillväxt med djupet i en behållare med vatten, som med konstant acceleration a) dras uppför ett lutande plan, b) rullar nedför ett lutande plan.

a)

Lösning:

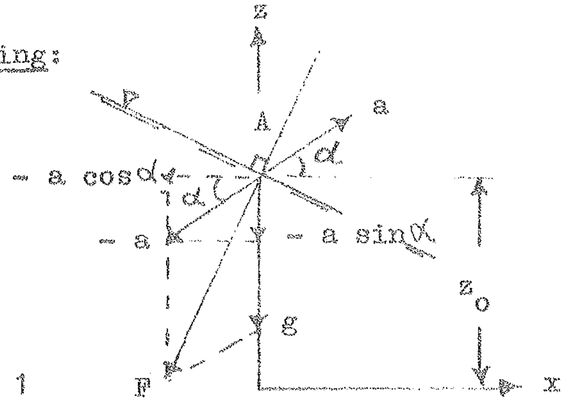


Fig. 1

Ett masselement i punkten A i figur 1 påverkas per massenhet dels av masskraften (tyngdkraften) g dels av tröghetskraften − a. Resultant F.
Enligt hydrostatikens grundekvation har vi att

$$dp = \rho X\,dx + \rho Y\,dy + \rho Z\,dz \quad \text{- - - - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Här är $X = -\,a \cos\alpha$

$Y = 0$

$Z = -\,a \sin\alpha - g$

Insättning i ekv. (1) ger

$$dp = -\rho\, a \cos\alpha\; dx - \rho\,(a \sin\alpha + g)\, dz$$

Integration ger

$$p = -\rho\, a \cos\alpha\; x - \rho\,(a \sin\alpha + g)\, Z + C$$

För $x = 0$ och $Z = Z_o$ är $p = p_o$ som ger

$$C = p_o + \rho\,(a \sin\alpha + g)\, Z_o$$

Till slut fås

$$p = p_o - \rho\, a \cos\alpha\; x - \rho\,(a \sin\alpha + g)\, Z + \rho\,(a \sin\alpha + g)\, Z_o$$

eller

$$p = p_o - \rho\, a \cos\alpha\; x + \rho\, g(Z_o - Z)(1 + \frac{a}{g} \sin\alpha) \quad \text{- - - -} \quad (2)$$

b)

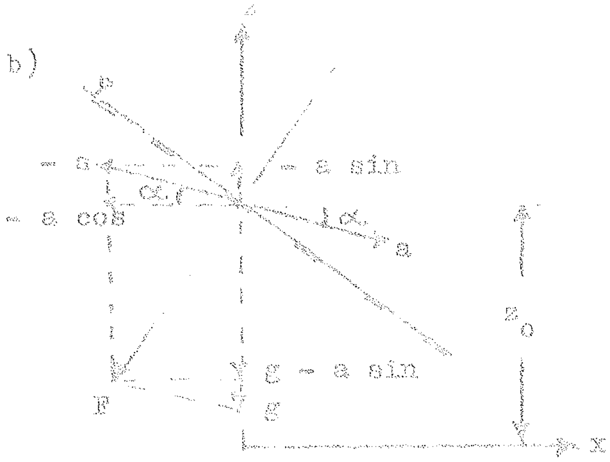


Fig. 2

Krafterna som verkar på ett mass-element per massenhet i punkten A i fig. 2 ger

$X = - a \cos \alpha$

$Y = 0$

$Z = -(g - a \sin \alpha) = a \sin \alpha - g$

Efter insättning i ekv. (1) fås

$$dp = - \rho\, a \cos \alpha\, dx + \rho\, (a \sin \alpha - g)\, dz$$

Integration ger

$$p = - \rho\, a \cos \alpha\; x + \rho\, (a \sin \alpha - g)\, Z + C$$

För $x = 0$ och $Z = Z_o$ är $p = p_o$ som ger

$$C = p_o - \rho\, (a \sin \alpha - g)\, Z_o$$

Då fås

$$p = p_o - \rho\, a \cos \alpha\; x + \rho\, (a \sin \alpha - g)\, Z - \rho\, (a \sin \alpha - g)\, Z_o$$

eller

$$p = p_o - \rho\, a \cos \alpha\; x + \rho\, g(Z - Z_o)\left(\frac{a}{g} \sin \alpha - 1\right)$$

5. En öppen behållare 6 m lång och innehållande vatten till ett djup av 3 m accelereras i längdriktningen uppför ett 30° lutande plan med en konstant acceleration av 2,4 m/sek^2 (se fig.). Beräkna hydrostatiska trycket, dvs. absoluta trycket minus atmosfärstrycket, i en punkt 4 m från främre kortsidan och 2 m från botten. Behållaren förutsättes vara så hög att inget vatten går förlorat under förflyttningen. ρ_{H_2O} : 1000 kg/m^3.

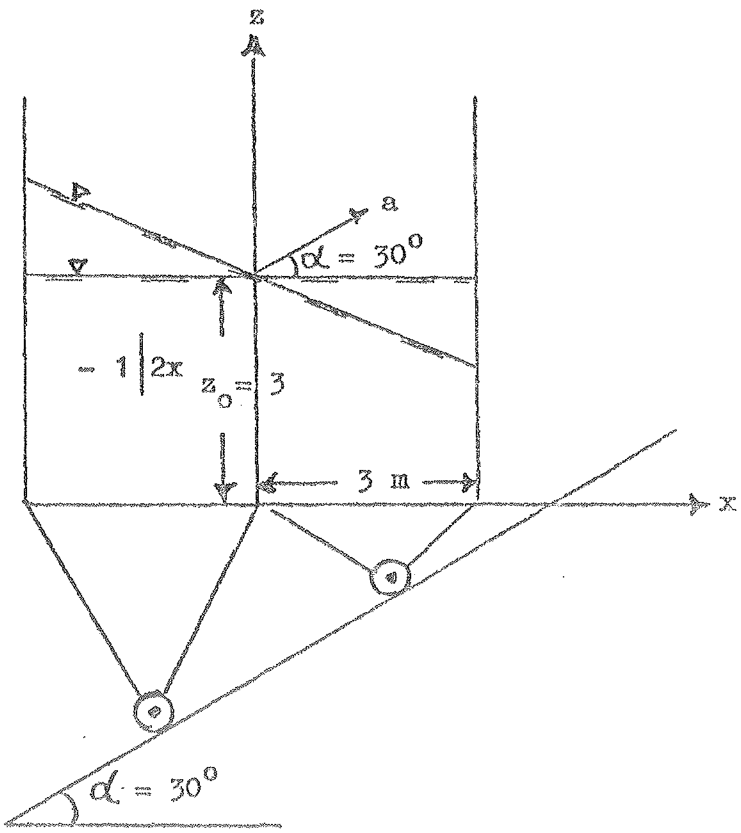
<u>Lösning:</u> Insättning av givna värden i ekv.

$$p - p_o = - \rho\, a \cos \alpha\; x + \rho\, g(Z - Z_o)\left(1 + \frac{a}{g} \sin \alpha\right)$$

ger

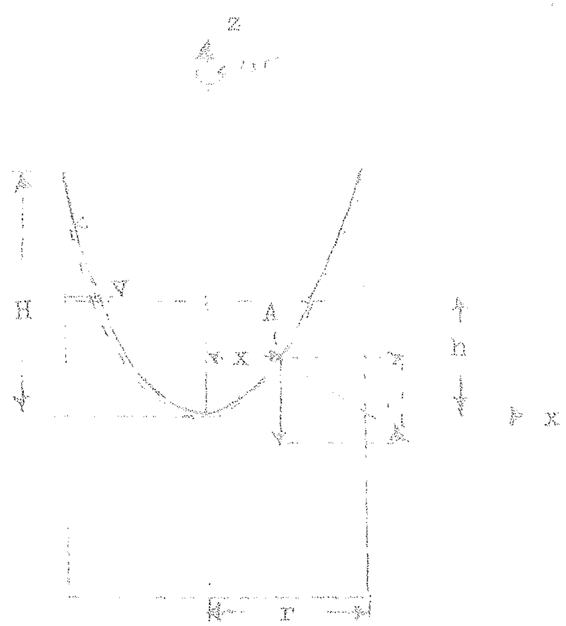
$$p - p_o = - 1000 \cdot 2{,}4 \cdot \cos 30^\circ \cdot 1 +$$
$$+ 1000 \cdot 9{,}81(3 - 2)\left(1 + \frac{2{,}4}{9{,}81} \sin 30^\circ\right)$$

$$p - p_o = 2400 \cdot 0{,}866 + 9810 \cdot 1{,}1223 = 2078{,}4 + 11009{,}8 =$$
$$= \underline{13088 \ N/m^2}$$



LIKFORMIG ROTATIONSRÖRELSE

1. Härled ekvationen för vätskeytan vid likformig rotationsrörelse.



Ett vätskeelement i punkten A i vidstående figur angrips per massenhet dels av tyngdkraften g dels av tröghetskraften (centrifugalkraften) $\frac{v^2}{x} = \frac{\omega^2 x^2}{x} = \omega^2 x$ där ω = vinkelhastigheten i radianer/sek.

Vi använder oss av hydrostatikens grundekvation

$$dp = \varrho X\,dx + \varrho Y\,dy + \varrho Z\,dz \quad \text{-------------} \quad (1)$$

Här är $dp = 0$ (nivåyta)

$X = \omega^2 x$

$Y = 0$

$Z = -g$

Insättning i ekv. (1) ger

$$\varrho\,\omega^2 x\,dx - \varrho\,g\,dz = 0 \text{ eller } dz = \frac{\omega^2}{g} x\,dx$$

Vi integrerar och får $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$

För $x = 0$ blir $z = 0$ och $C = 0$.

Då fås

$$z = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 \quad \text{-----------------} \quad (2)$$

För $x = r$

$$H = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} \quad \text{---------------} \quad (3)$$

Från matematiken vet vi att volymen under en rotationsparaboloid är hälften av omskrivna cylinderns volym. Vi kan då skriva (se fig.)

$$\frac{\pi r^2 H}{2} = \pi r^2 h$$

som ger

$$H = 2h \qquad (4)$$

Ekv. (4) anger att vätskan stiger lika mycket vid kärlväggen, som den sjunker i centrum.

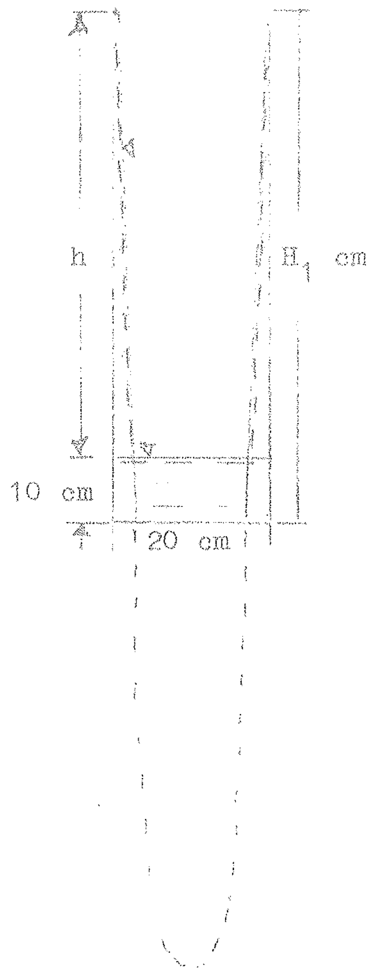
Insättning av detta samband i ekvation (3) ger

$$2h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

eller

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{4g} \qquad (5)$$

2. Ett cylindriskt kärl med en diameter av 20 cm är till en höjd av 10 cm fylld med vatten. Vilken höjd måste kärlet ha för att inget vatten skall rinna ut vid en rotation av 500 varv/min?



Lösning: Den sökta höjden H_1 bestämmes med hjälp av ekvationerna

$$H_1 = h + 10 \qquad (1)$$

och

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{4g} \qquad (2)$$

Vi omvandlar varv/min (r/min) till rad/sek.

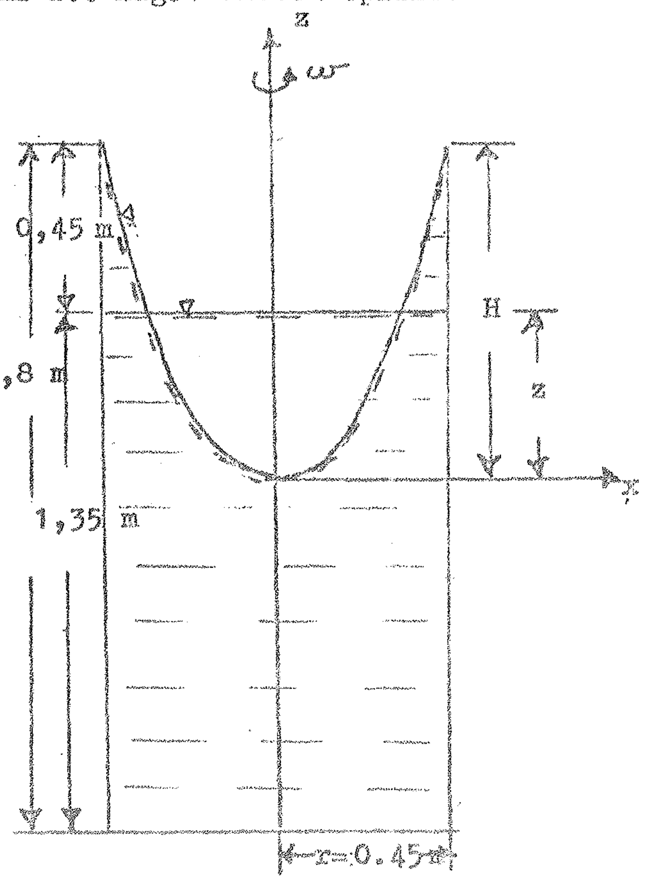
$$500 \text{ r/min} = \frac{500 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/sek} = \frac{50\pi}{3} \text{ rad/sek}$$

Då fås

$$H_1 - 10 = \frac{2500 \cdot \pi^2 \cdot 100}{9 \cdot 4 \cdot 981} = 69{,}9 \approx 70 \text{ cm}$$

$$\underline{H_1 = 10 + 70 = 80 \text{ cm}}$$

3. Med vilken hastighet kan det öppna kärlet i nedanstående figur rotera utan att något vatten spilles?



Lösning: Vi har (se problem 1) att volymen under en rotations paraboloid är hälften av den omskrivna cylinderns volym. Vi får då ur figuren

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 0{,}45^2(0{,}45 + z) =$$

$$= \pi\cdot 0{,}45^2\cdot z \quad - - - - - (1)$$

eller

$$z = 0{,}45$$

Vi har också (se problem 1) att

$$z = \frac{\omega^2\cdot r^2}{4g} \quad - - - - (2)$$

Insättning i ekv. (2) ger

$$0{,}45 = \frac{\omega^2\cdot 0{,}45^2}{4\cdot 9{,}81}$$

eller

$$\underline{\omega} = \sqrt{87{,}2} = \underline{9{,}34 \text{ rad/sek}}$$

4. Kärlet i föregående exempel är slutet och trycket ovanför vattenytan är 800 mm Hg. Om vinkelhastigheten vid rotation är 12 rad/sek. hur stort är då trycket i kp/cm^2 i punkterna C och D? ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3; ρ_{Hg} = 13600 kg/m^3.

Lösning: Eftersom luftvolymen i kärlet förblir konstant fås

$$\pi\cdot 0{,}45^2\cdot 0{,}45 = \frac{1}{2}\pi\cdot x^2\cdot z \quad - - - - - - - - - - - - - - (1)$$

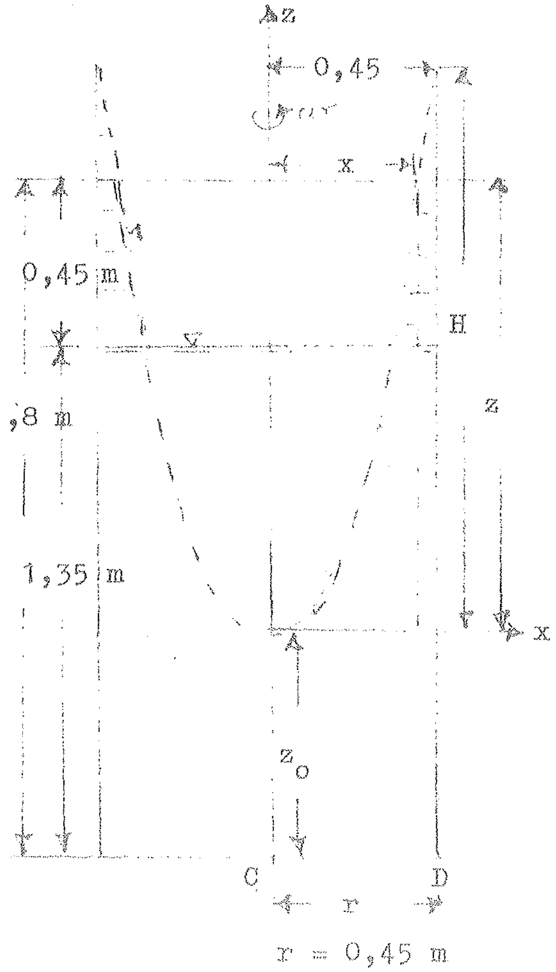
Vi har också att

$$z = \frac{12^2\cdot x^2}{2\cdot 9{,}81} \quad - - - - - - - - - - - - - - - - (2)$$

och att

$$H = \frac{12^2 \cdot 0{,}45^2}{2 \cdot 9{,}81} \quad \text{-----------------} \quad (3)$$

$$\underline{H = 1{,}486}$$



Ur ekv. (1) och (2) fås $z = \underline{1{,}157}$

Då blir

$z_o = 1{,}8 - 1{,}157 = \underline{0{,}643}$ och

$H + z_o = 1{,}486 + 1{,}157 = \underline{2{,}643}$

Trycket i punkterna C och D kan då tecknas

$p_C = p_o + \varrho \cdot g \cdot z_o$ resp.

$p_D = p_o + \varrho \cdot g \cdot (H + Z_o)$

$\underline{p_C} = 13600 \cdot g \cdot 0{,}8 + 1000 \cdot g \cdot 0{,}643 = 10880\ g + 643\ g = 11523\ g\ N/m^2 =$
$= 11523\ kp/m^2 = \underline{1{,}152\ kp/cm^2}$

$\underline{p_D} = 13600 \cdot g \cdot 0{,}8 + 1000 \cdot g \cdot 2{,}643 = 10880\ g + 2643\ g = 13523\ g\ N/m^2 =$
$= 13523\ kp/m^2 = \underline{1{,}352\ kp/cm^2}$

5. Ett öppet cylindriskt kärl med en diameter av 50 mm är till 50 mm höjd fylld med en vätska med tätheten 0,820 g/cm^3. Kärlet försättes i rotation med varvtalet 450 per min. Sök hydrostatiska trycket (absoluta trycket minus atmosfärstrycket) mot kärlväggen 40 mm från botten (punkten B fig. 1).

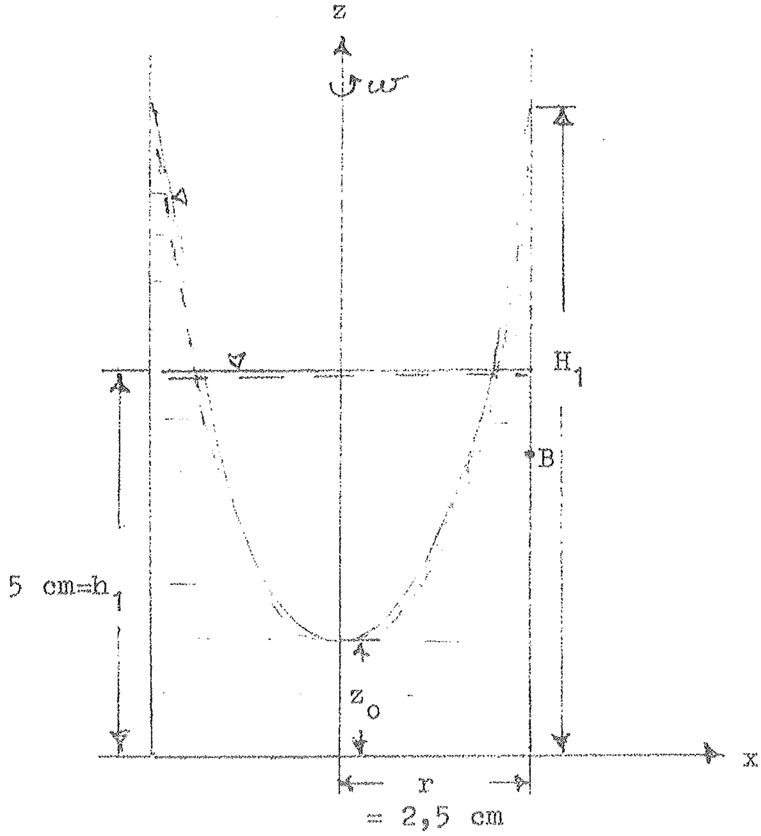


Fig. 1

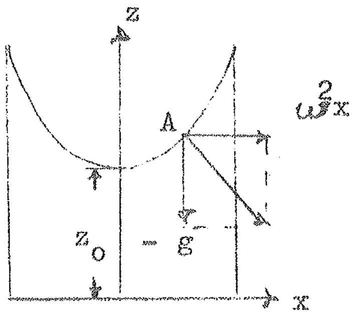


Fig. 2

Lösning: Vi härleder ett uttryck för tryckets variation i en vätska som roterar i ett kärl. I punkten A i fig. 2 utsätts ett masselement per massenhet för påverkan dels av tyngdkraften g dels av centrifugalkraften (tröghetskraften) $\omega^2 x$. Genom insättning av dessa värden i hydrostatikens grundekvation

$$dp = \rho X\, dx + \rho Y\, dy + \rho Z\, dz \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

$$(X = \omega^2 x; \quad Y = 0 \text{ och } Z = - g)$$

fås

$$dp = \rho \omega^2 x - \rho g\, dz$$

Integration ger

$$p = \frac{\rho \omega^2 x^2}{2} - \rho g Z + C$$

För $x = 0$ är $Z = Z_o$ och $p = p_o$ varför $C = p_o + \rho g Z_o$

$$\text{och} \quad p = p_o + \frac{\rho \omega^2 x^2}{2} + \rho g (Z_o - Z) \quad \text{- - - - - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

Enligt figur 1 är

$$H_1 = Z_o + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (3)$$

Vi har också att

$$\pi\, r^2(h_1 - Z_o) = \frac{1}{2}\pi\, r^2(H_1 - Z_o)$$

eller

$$H_1 + Z_o = 2\,h_1 \quad \text{------------------} \quad (4)$$

Kombination av ekv. (3) och (4) ger

$$H_1 = 2\,h_1 - H_1 + \frac{\omega^2\, r^2}{2g}$$

$$2\,H_1 = 2\,h_1 + \frac{\omega^2\, r^2}{2g}$$

$$H_1 = h_1 + \frac{\omega^2\, r^2}{4g} \quad \text{------------------} \quad (5)$$

Vi har att $h_1 = \underline{5\ \text{cm}}$; $\omega = \frac{450 \cdot 2\pi}{60} = \underline{15\pi\ \text{rad/sek}}$;

$r = \underline{2{,}5\ \text{cm}}$ och $g = \underline{981\ \text{cm/sek}^2}$

Insättning i ekv. (5) ger då

$$\underline{H_1} = 5 + \frac{15^2 \cdot \pi^2 \cdot 2{,}5^2}{4 \cdot 981} = 5 + 3{,}54 = \underline{8{,}54}$$

Ur ekv. (4) fås

$$Z_o = 10 - 8{,}54 = \underline{1{,}46}$$

Ekv. (2) ger då

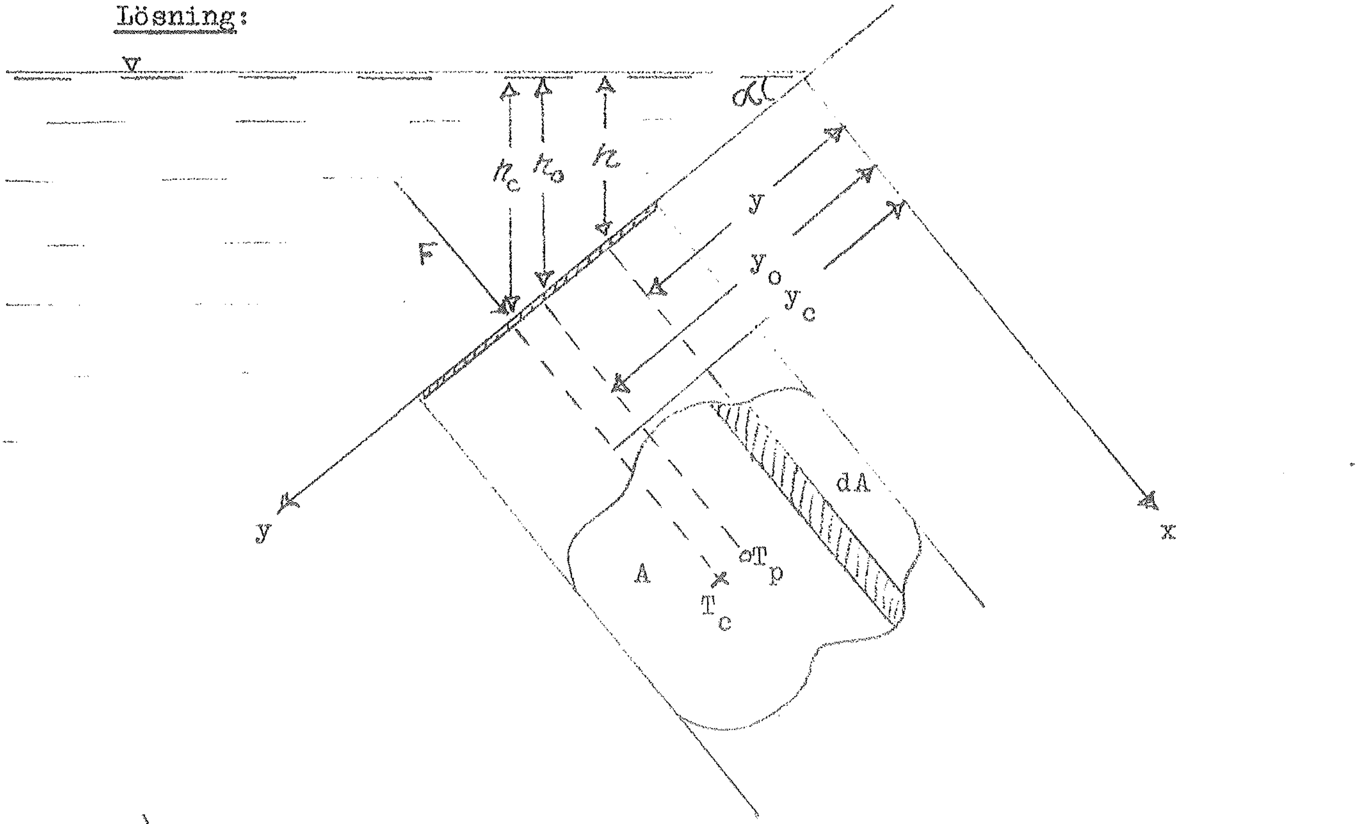
$$p - p_o = \frac{0{,}82 \cdot 15^2 \cdot \pi^2 \cdot 2{,}5^2}{2} + 0{,}82 \cdot 981(1{,}46 - 4)$$

$$p - p_o = 3647\ \text{dyn/cm}^2 = 365\ \text{N/m}^2.$$

HYDROSTATISK TRYCKKRAFT MOT PLANA YTOR

1. Härled a) ett uttryck för hydrostatiska tryckkraften mot en plan yta och b) bestäm tryckcentrums läge.

Lösning:



a)

Är F i figuren totala tryckkraften mot den plana ytan A och är trycket dF mot elementarytan dA så blir

$$dF = p\,dA = \rho g h\,dA \quad \text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --} \quad (1)$$

Nu är enligt figuren

$$h = y \sin\alpha$$

varför

$$dF = \rho g \sin\alpha\, y\, dA$$

Integration ger

$$F = \rho g \sin\alpha \int y\, dA$$

Från mekaniken vet vi att $\int y\, dA$ är lika med $y_o \cdot A$ varav fås

$$F = \rho g \sin\alpha \int y\, dA = \rho g \sin\alpha \cdot y_o \cdot A$$

Men $y_o \sin\alpha = h_o$ varför

$$\underline{\underline{F = \rho g \cdot h_o \cdot A}} \quad \text{-- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --} \quad (2)$$

b) Definitionen på tryckcentrum ger relationen

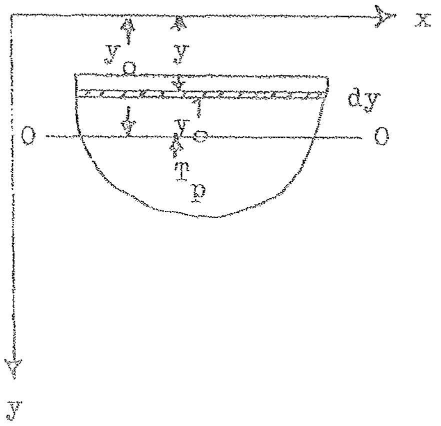
$$F \cdot y_c = \int y \, dF \quad \text{------------------} \quad (3)$$

Från ekv. (1) i a) har vi att

$$F \cdot y_c = \int y \rho g h \, dA \text{ eller}$$

$$\rho g \sin\alpha \cdot y_o \cdot A \cdot y_c = \rho g \sin\alpha \int y^2 \, dA \text{ dvs.}$$

$$y_c = \frac{y^2 \, dA}{y_o \cdot A} = \frac{I_x}{y_o \cdot A} \quad \text{------------------} \quad (4)$$



Enl. vidstående figur är

$$I_x = \int y^2 \, dA = \int (y_o - y^1)^2 \, dA =$$

$$= \int \left[y_o^2 + (y^1)^2 - 2 \, y_o y^1 \right] dA =$$

$$= y_o^2 \int dA + \int (y^1)^2 \, dA - 2 \, y_o \int y^1 \, dA$$

Här är värdet av $\int y^1 \, dA$ = ytans geometriska moment med avseende på linjen O ---- O. Då linjen går genom tyngdpunkten är $\int y' dA = 0$.

Då fås eftersom $\int (y^1)^2 \, dA = I_o$

$$I_x = y_o^2 \cdot A + I_o$$

eller

$$I_x = I_o + y_o^2 \cdot A \quad \text{------------------} \quad (5)$$

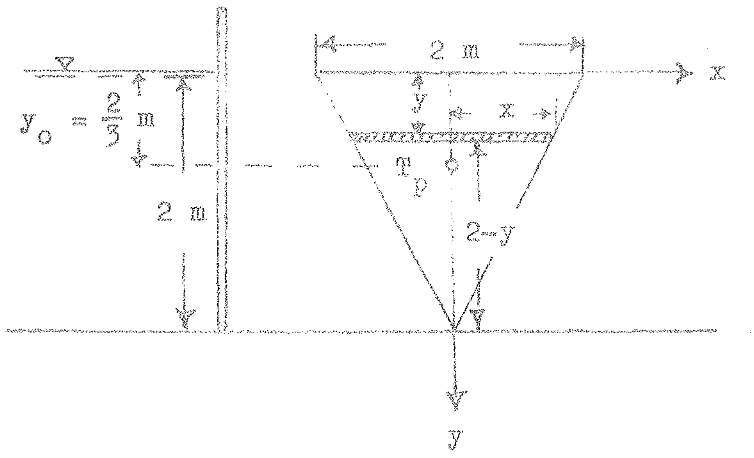
Ekvationen ovan kallas ibland för Steiners sats, ibland för parallellaxelteoremet.

Kombination av ekv. (4) och (5) ger

$$y_c = \frac{I_o + y_o^2 \cdot A}{y_o \cdot A}$$

$$y_c = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A} \quad \text{------------------} \quad (6)$$

2. Beräkna tryckkraften mot dammluckan i nedanstående figur. ρ_{H_2O} : 1000 kg/m^3.



Lösning:

I. Utan integration av tryckkraften F.

Vi har att

$$F = \rho g \cdot y_o \cdot A$$

där $\rho = 1000\ kg/m^3$

$g = 9{,}81\ m/sek^2$

y_o = Dammluckans tyngdpunktsavstånd från vattenytan = $\frac{2}{3}$ m

A = Dammluckans yta = $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2\ m^2$

Då fås

$$\underline{F} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \underline{13080\ N}$$

II. Med integration av tryckkraften.

Vi har grundekvationen

$$dF = p dA$$

där dF = elementarkraften

p = kraften per ytenhet

dA = elementarytan

Med hjälp av figuren fås $p = \rho g y$ och $dA = 2x\ dy$.

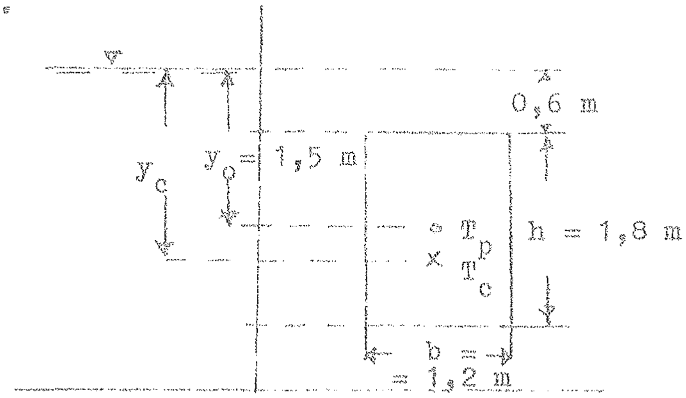
Likformighet ger $\frac{x}{1} = \frac{2-y}{2}$; $x = \frac{2-y}{2} = 1 - \frac{y}{2}$

Då fås

$$F = \rho g \int_0^2 y\ dA = \rho g \int_0^2 y \cdot 2(1 - \frac{y}{2})\ dy = 2 \rho g \int_0^2 y\ dy - \rho g \int_0^2 y^2\ dy$$

$$\underline{F} = \frac{4\,\rho\,g}{3} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 9{,}81}{3} = \underline{13080\ N}$$

3. Bestäm tryckcentrums läge för den rektangulära ytan i nedanstående figur.



I. Lösning: Vi har relationerna

$$y_c = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A} \qquad (1)$$

och

$$I_o = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad (2)$$

Här är $y_o = 1{,}5$ m; $A = 1{,}2 \cdot 1{,}8\ m^2$; $b = 1{,}2$ m och $h = 1{,}8$ m.

Då fås ur ekv. (1) och (2)

$$y_c = 1{,}5 + \frac{1{,}2 \cdot 1{,}8^3}{12 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}8} = 1{,}5 + 0{,}18 = \underline{1{,}68\ m}$$

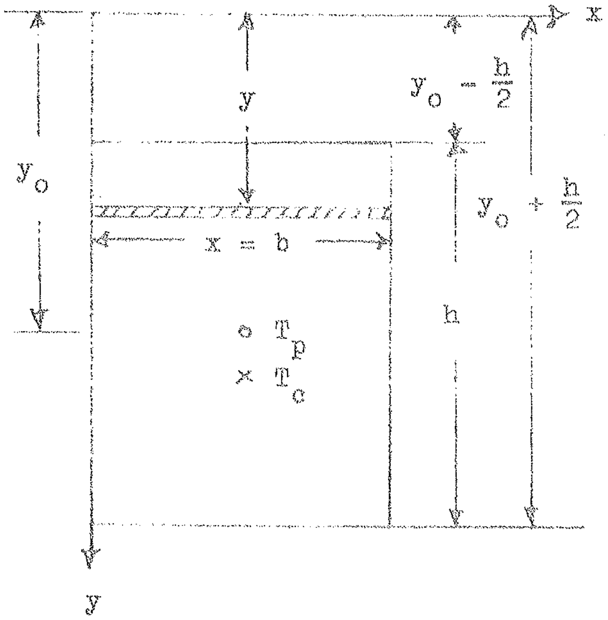
II. Problemet kan också lösas med utgångspunkt från följande grundekvationer

$$dF = p\ dA \qquad (3)$$

och

$$F \cdot y_c = \int y\ dF \qquad (4)$$

Ekv. (4) följer av definitionen på tryckcentrum om moment tages kring x-axeln.



Då fås enligt vidstående figur om $dA = x\ dy = b\ dy$ och $p = \varrho g y$

$$dF = \varrho g b \int_{y_o - \frac{h}{2}}^{y_o + \frac{h}{2}} y\ dy$$

eller

$$F = \frac{\varrho g b}{2} \Big[y^2 \Big]_{y_o - \frac{h}{2}}^{y_o + \frac{h}{2}}$$

$$F = \frac{\varrho g b}{2} \left[y_o^2 + \frac{h^2}{4} + y_o\ h - y_o^2 - \frac{h^2}{4} + y_o h \right] = \varrho g \cdot y_o \cdot b \cdot h \text{ - - } (5)$$

$$F \cdot y_c = \varrho g b \int_{y_o - \frac{h}{2}}^{y_o + \frac{h}{2}} y^2\ dy = \frac{\varrho g b}{3} \Big[y^3 \Big]_{y_o - \frac{h}{2}}^{y_o + \frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{\varrho g b}{3} \left[y_o^3 + \frac{3}{2} y_o^2 \cdot h + \frac{3}{4} y_o\ h^2 + \frac{h^3}{8} - y_o^3 + \frac{3}{2} y_o^2\ h - \frac{3}{4} y_o h^2 + \frac{h^3}{8} \right]$$

$$F \cdot y_c = \frac{\varrho g b}{3} \left(3 y_o^2\ h + \frac{h^3}{4}\right) \text{ - - - - - - - - - - - - } (6)$$

Kombination av ekv. (5) och (6) ger

$$\varrho g \cdot y_o \cdot b \cdot h \cdot y_c = \varrho \cdot g \cdot b \cdot h \cdot \left(y_o^2 + \frac{h^2}{12}\right)$$

eller

$$y_c = y_o + \frac{h^2}{12 y_o} \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - - } (7)$$

Insättning av givna värden i ekv. (7) ger

$$\underline{y_c} = 1,5 + \frac{1,8^2}{12 \cdot 1,5} = 1,5 + 0,18 = \underline{1,68\ m}$$

I ekv. (1) har vi att

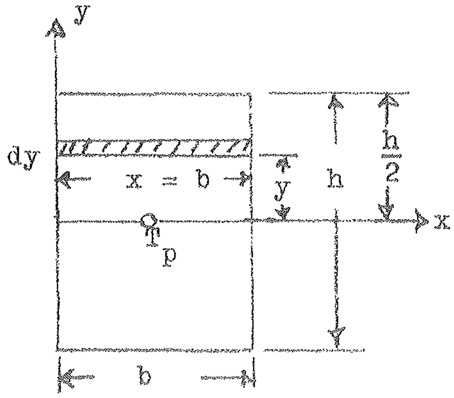
$$I_o = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Här är I_o rektangelns tröghetsmoment med avseende på en axel genom tyngdpunkten. Härledningen kan göras på följande sätt.

$$I_o = \int y^2 \, dA$$

och $dA = x\,dy = b\,dy$

Då fås

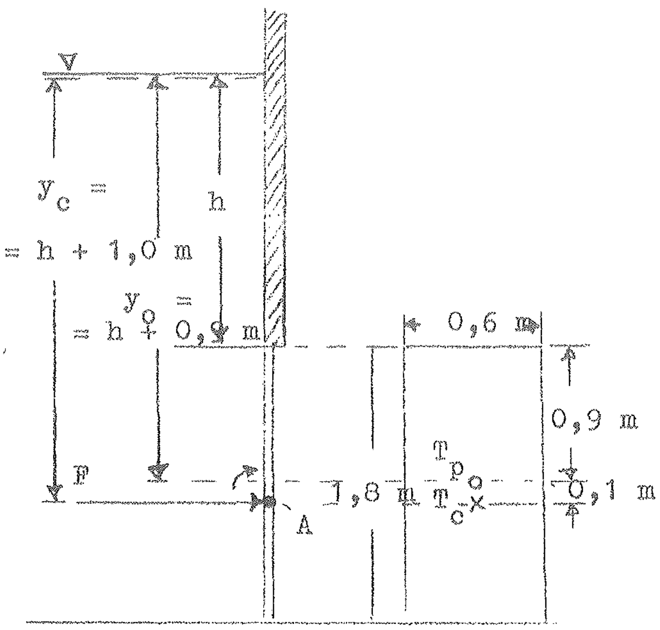


$$I_o = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, dy = b \Big]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^3}{3} =$$

$$= \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8}\right)\right]$$

$$\underline{I_o = \frac{b}{3} \cdot \frac{2\,h^3}{8} = \frac{b\,h^3}{12}}$$

4. Den rektangulära dammluckan i nedanstående figur är svängbar runt en horisontell axel genom punkten A belägen 10 cm under luckans tyngdpunkt. Till vilken höjd h kan vattnet stiga utan att luckan öppnas om friktionen försummas?



Lösning: Vi har att tryckkraftsresultanten F måste gå genom axeln. Då fås relationen

$$y_c = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A}$$

$$y_o = (h + 0{,}9)\text{m}$$

$$I_o = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}8^3}{12} \text{ m (se föreg. ex.)}$$

$$A = 0{,}6 \cdot 1{,}8 \text{ m}^2$$

$$y_c = h + 0{,}9 + 0{,}1 = (h + 1{,}0) \text{ m}$$

Vi kan då uppställa följande ekvation

$$y_c = h + 1{,}0 = h + 0{,}9 + \frac{0{,}6 \cdot 1{,}8^3}{12(h + 0{,}9) \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}8}$$

eller

$$0,1 = \frac{3,24}{12\ h + 10,8}$$

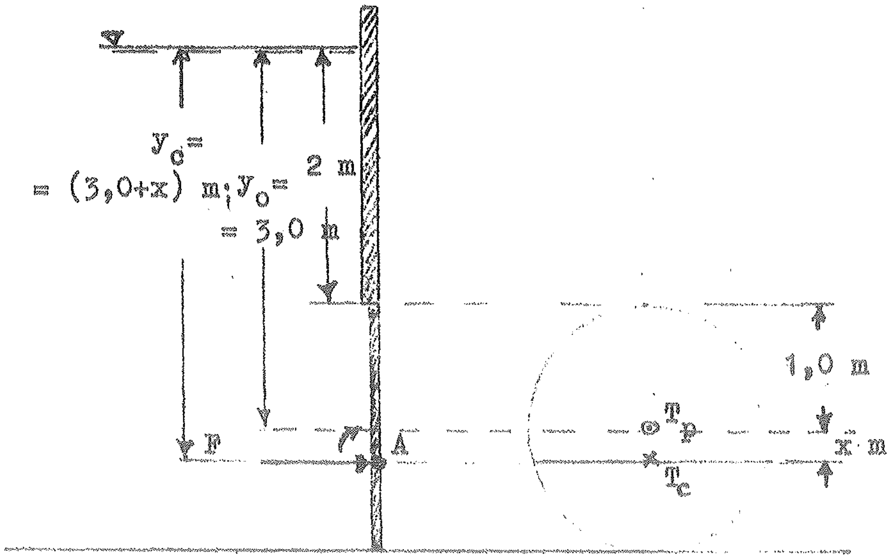
som ger

$$1,2\ h + 1,08 = 3,24$$

$$1,2\ h = 2,16$$

$$\underline{h = 1,8\ m}$$

5. Den cirkulära dammluckan i nedanstående figur är svängbar runt en horisontell axel genom punkten A. Bestäm x för det fall att luckan just håller på att öppnas.



Lösning: Kraftresultanten F måste under de givna förutsättningarna gå genom axeln.

Vi har också relationen

$$y_c = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A}$$

där $y_c = (3,0 + x)$ m

$y_o = 3,0$ m

$I_o = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4} = 0,7854$

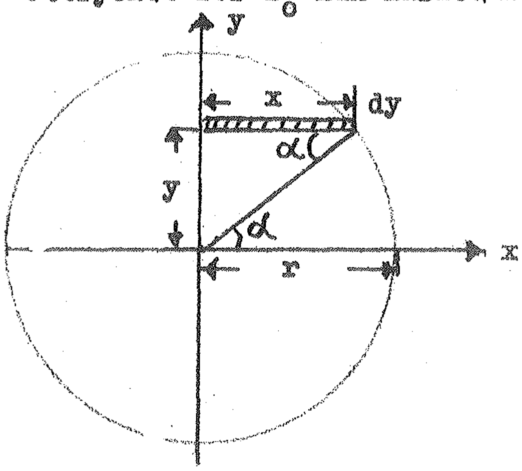
$A = \pi \cdot 1^2 = 3,1416$

Vi får då följande ekvation

$$y_c = 3,0 + x = 3,0 + \frac{0,7854}{3 \cdot 3,1416}$$

$$\underline{x = 0,083\ m}$$

Uttrycket för I_o kan härledas på följande sätt.



Vi har att

$$I_o = 4\int y^2\, dA \quad - - - - - - (1)$$

där $dA = x\, dy$ och $x = \sqrt{r^2 - y^2}$

Vi har också att

$y = r \sin\alpha$; $\quad dy = r\cos\alpha\, d\alpha$

$\sqrt{r^2 - y^2} = r\cos\alpha$;

$y^2 = r^2 \cdot \sin^2\alpha$

Då fås

Då fås

$$I_o = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\alpha \cdot r\cos\alpha \cdot r\cos\alpha \cdot d\alpha = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot d\alpha$$

$$I_o = r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\alpha \cdot d\alpha = \frac{r^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\alpha)\, d\alpha =$$

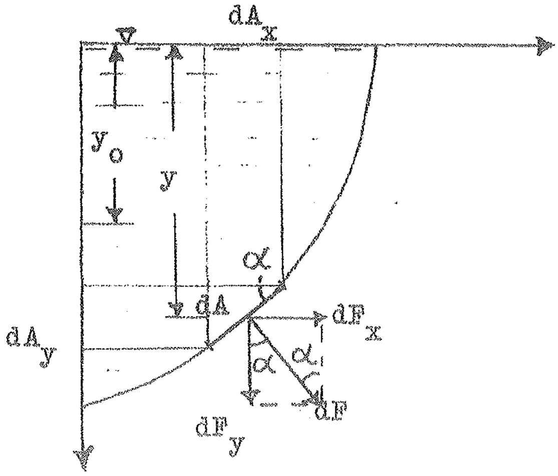
$$= \frac{r^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha - \frac{r^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\alpha\, d\alpha$$

$$\underline{I_o} = \frac{r^4}{2}\Big[\alpha\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{r^4}{2}\Big[\frac{\sin 4\alpha}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^4 \cdot \pi}{2\cdot 2} - 0 = \underline{\frac{\pi r^4}{4}}$$

HYDROSTATISK TRYCKKRAFT MOT BUKTIGA YTOR

1. Bevisa 1) att den hydrostatiska tryckkraftens horisontalkomponent på en buktig yta är lika med den kraft, som vätskan utövar på denna ytas vertikala projektion, 2) att den hydrostatiska tryckkraftens vertikalkomponent på en buktig yta är lika med tyngden av den vertikala vätskepelare, som nertill begränsas av den givna ytan och upptill av ytans projektion på den fria vätskeytan, likgiltigt om vätskan helt fyller detta rum eller ej.

__Lösning:__ Ur vidstående figur fås



$$dF = p\, dA = \rho\, g\, y\, dA \quad \text{- - - - - -} \quad (1)$$
$$dF_x = dF \sin\alpha = \rho\, g\, y\, dA \sin\alpha \quad (2)$$
$$dF_y = dF \cos\alpha = \rho\, g\, y\, dA \cos\alpha \quad (3)$$

Dessutom är

$dA_x = dA \cos\alpha$ och $dA_y = dA \sin\alpha$

Vi kan skriva $dF_x = \rho\, g\, y\, dA_y$ och $dF_y = \rho\, g\, y\, dA_x$

Integration över hela ytan A ger

$$F_x = \rho\, g \int y\, dA_y \quad \text{och} \quad F_y = \rho\, g \int y\, dA_x$$

Är A_y projektionen av hela ytan A på vertikalplanet och y_o är tyngdpunktsavståndet från A_y till vätskeytan gäller

$$\int y\, dA_y = y_o\, A_y$$

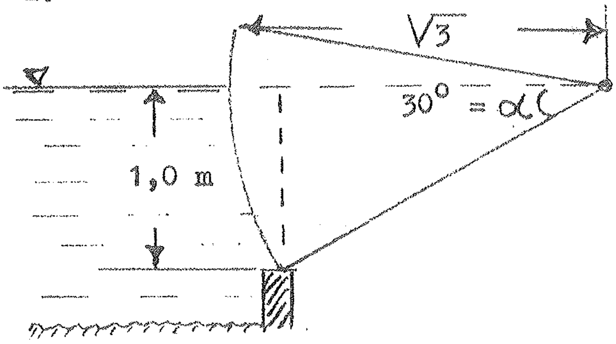
dvs.

$$F_x = \rho\, g\, y_o\, A_y \qquad \text{V.S.B.}$$

Av figuren framgår att

$$F_y = \rho\, g \int y\, dA_x = \rho\, g\, V \qquad \text{V.S.B.}$$

2.



Vidstående figur föreställer en tvärsektion av den dammlucka. Beräkna de av vattnet per breddenhet av dammluckan förorsakade horisontella och vertikala tryckkraftskomponenterna.

Lösning: Enligt relationen

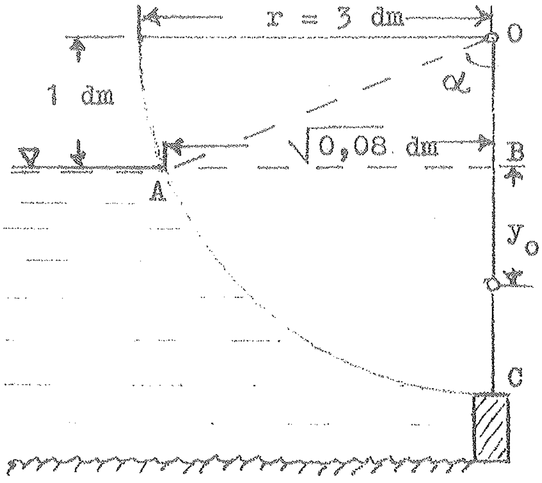
$F_h = \varrho g y_o A_y$ har vi att

$F_h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 1,0 \cdot 1 = 4905$ N

$F_v = \varrho V = 1000 \cdot 9,81\left(\frac{30 \cdot \pi \cdot 4}{360} - \frac{\sqrt{3} \cdot 1,0}{2}\right) = 1000 \cdot 9,81(1,047-0,866)$

$F_v = 9810 \cdot 0,181 = 1776$ N

3. Sök den av vattnet förorsakade tryckkraften i kp på modelldammluckan i nedanstående figur. Luckan har formen av en fjärdedels cylinder med radien 3 dm och bredden 9 dm. Vattnet står 1 dm under luckans översta kant.



Lösning: Vi har att

$F_h = \varrho \cdot y_o A_y$; $\varrho = 1000$ kg/m^3

$y_o = 0,1$ m

$A_y = 0,9 \cdot 0,2 = 0,18$ m^2

$F_h = 1000 \cdot 0,1 \cdot 0,18 = 18$ kp

$F_v = \varrho V$; $\cos\alpha = \frac{0,1}{0,3} = 0,3333$

$= \underline{70{,}^{\circ}53}$

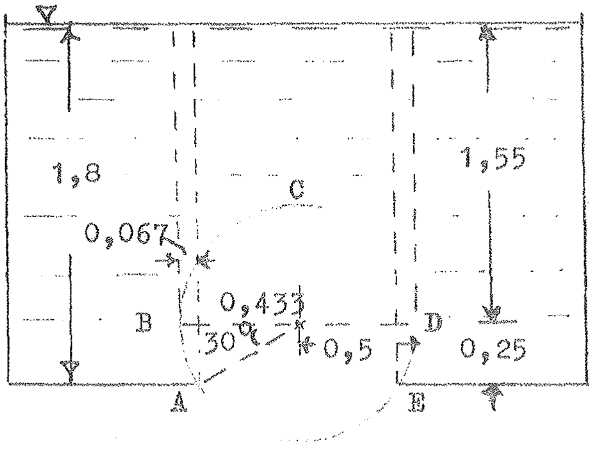
Sektorn AOC:s yta $= \frac{70,53}{360} \cdot 3,416 \cdot 0,09 = 0,0554$

$\triangle$ AOB:s yta $= 0,1\sqrt{0,08} = 0,0141$. Segmentet ABC:s yta $=$ $0,0554 - 0,0141 = \underline{0,0413}$. $\underline{V} = 0,9 \cdot 0,413 = \underline{0,0371}$

$F_v = 1000 \cdot 0,0371 = \underline{37,1 \text{ kp}}$

$\underline{F} = \sqrt{18^2 + 37,1^2} = \sqrt{1702} = \underline{41,3 \text{ kp}}$

4. En cylinder 1,0 m i diameter och 2,5 m lång täcker en rektangulär öppning i en vattenbehållare enligt nedanstående figur. Med vilken kraft i kp pressas cylindern mot behållarens botten om vattendjupet är 1,8 m?



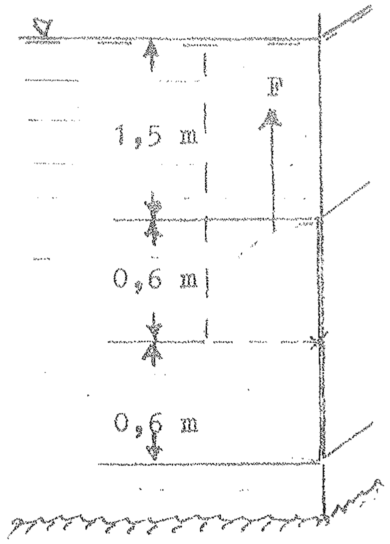
Lösning: Vi har att
F_v = nedåtriktade kraften på ytan 2,5 x sträckan BCD minus uppåtriktade krafterna på ytorna 2,5 x sträckorna AB och ED eller

$$F_v = \rho V = 1000 \cdot 2,5 \left[(1,55 \cdot 1,0 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0,5^2) - 2(1,55 \cdot 0,067 + \frac{30 \cdot \pi \cdot 0,5^2}{360} - \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 0,433 \right]$$

$$F_v = 2500 \left[1,5500 - 0,3927 - 2(0,1039 + 0,0545 - 0,0541) \right]$$

$$F_v = 2500 \cdot 0,9487 = 2371,75 \text{ kg} \approx \underline{2372 \text{ kp}}$$

5.



Den halvcylindriska dammluckan i vidstående figur är 1,2 m i diameter och 1,2 m bred. Om friktionskoefficienten mellan dammluckan och gåtarna är 0,1, vilken kraft fordras då för att lyfta dammluckan om den väger 500 kg?

Lösning: Den nedåtriktade tryckkraften mot den övre $\frac{1}{4}$ -delen av dammluckan blir i kp

$$F_v = 1000 \cdot 1,2 \left[2,1 \cdot 0,6 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 0,6^2 \right] = 1200(1,26 - 0,2828)$$

Den uppåtriktade tryckkraften mot den nedre $\frac{1}{4}$ -delen av dammluckan blir i kp

$$F_u = 1000 \cdot 1,2 \left[2,1 \cdot 0,6 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 0,6^2 \right] = 1200(1,26 + 0,2828)$$

Vi får alltså en uppåtriktad tryckresultant. (Kan också beräknas med Archimedes princip.)

$$F_{res} = F_u - F_v - 500 = 2 \cdot 1200 \cdot 0,2828 - 500 = 67817 - 500 =$$

$$= \underline{178,7\ kp}$$

Friktionen ger en nedåtriktad kraft $= 0,1 \cdot F_h$ där F_h = horisontella kraften mot gåtarna. Enl. det föregående har vi att

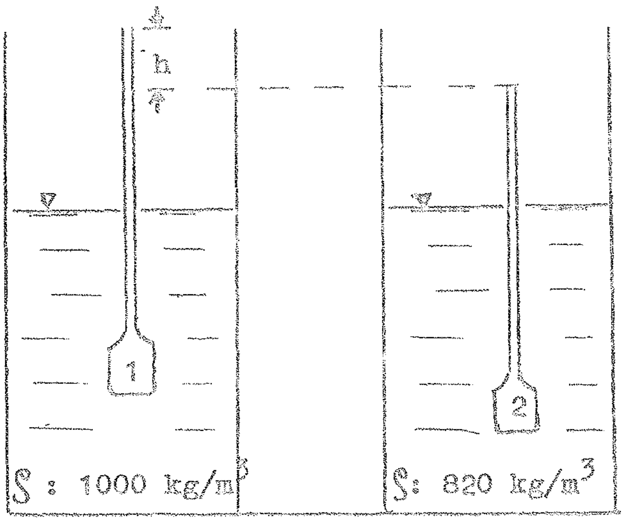
$$F_h = \varrho \cdot h_o \cdot A_y \quad \text{eller} \quad F_h = 1000 \cdot 2,1 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = \underline{3024}$$

$$0,1 \cdot 3024 = \underline{302,4}$$

Den erforderliga kraften blir då: $302,4 - 178,7 = 123,7$ kp $\approx \underline{124\ kp}$

ARCHIMEDES PRINCIP

1. En hydrometer väger 2,3 g och har en övre ända, som är cylindrisk med 3 mm diameter. Hur mycket djupare kommer den att flyta i alkohol (ρ = 820 kg/m^3) än i vatten (ρ = 1000 kg/m^3)?



<u>Lösning</u>: Vi har att i vatten undanträngs

$$2{,}3 \text{ g} = 2{,}3 \text{ cm}^3$$

I alkohol

$$\frac{2{,}3}{0{,}82} = 2{,}8 \text{ cm}^3$$

Skillnaden

$$2{,}8 - 2{,}3 = 0{,}5 \text{ cm}^3$$

måste då vara lika med volymen $\pi \cdot 0{,}15 \cdot h$

Alltså: $\pi \cdot 0{,}15^2 h = 0{,}5$; $\underline{h} = \underline{7{,}08 \text{ cm}}$

2. En aluminiumkub med 0,2 m sida väger nersänkt i vatten 13,6 kg. Vad blir motsvarande vikt i en vätska med tätheten 1250 kg/m^3 ?

<u>Lösning</u>: Kubens volym: $0{,}2^3 = 0{,}008$ m^3

Tecknas kubens vikt i luft med x kan vi skriva

$x \cdot g - 1000 \cdot g \cdot 0{,}008 = 13{,}6$ g där g är tyngdkraftsaccelerationen.

Då fås $\underline{x} = 8{,}0 + 13{,}6 = \underline{21{,}6 \text{ kg}}$

Tecknas kubens vikt i vätskan med tätheten 1250 kg/m^3 med y fås

$$21{,}6 \text{ g} - 1250 \text{ g} \cdot 0{,}008 = y \text{ g}$$

$$\underline{y} = 21{,}6 - 10{,}0 = \underline{11{,}6 \text{ kg}}$$

3. För att ett föremål med en volym av 150 cm^3 helt skall kunna hållas under vatten fordras en kraft av 270 N. Motsvarande kraft vid nedsänkning av föremålet i en annan vätska är 160 N. Bestäm vätskans täthet.

<u>Lösning</u>: Vi skaffar först ett uttryck på föremålets tyngd. Föremålets täthet = ρ_1, vattnets täthet = 1000 kg/m^3.

$$1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 - \rho_1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 - 270 = 0$$

$$1471{,}5 - \rho_1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 - 270 = 0$$

Föremålets tyngd $= \rho_1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 = 1201{,}5$

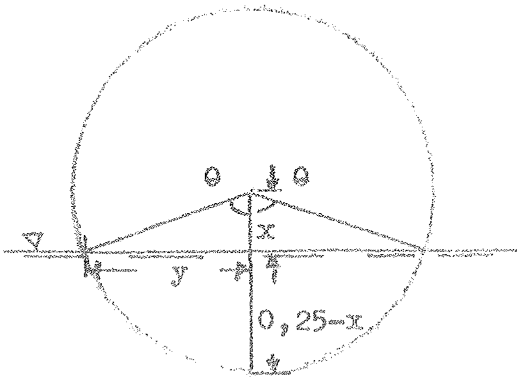
Sedan fås vätskans täthet ρ_2 ur ekvationen

$$\rho_2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 - 1201{,}5 - 160 = 0$$

$$0{,}14715 \cdot \rho_2 = 1201{,}5 + 160 = 1361{,}5$$

$$\underline{\rho_2} = \frac{1361{,}5}{0{,}14715} = \underline{925 \text{ kg/m}^3}$$

4. Till vilket djup kommer en timmerstock 0,5 m i diameter och 6 m lång ($\rho = 400$ kg/m^3) att sjunka i vatten?



Lösning: Vi har att i figuren är

$x = 0{,}25 \cos \theta$; $y = 0{,}25 \sin \theta$

Vi har också att

$$400\, g \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 \cdot 6 =$$

$$= 1000\, g \cdot 6\left(\frac{2\theta}{360} \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot \cos \theta \cdot 0{,}25 \sin \theta\right)$$

eller

$$0{,}4 \cdot \pi = \frac{\theta \cdot \pi}{180} - \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

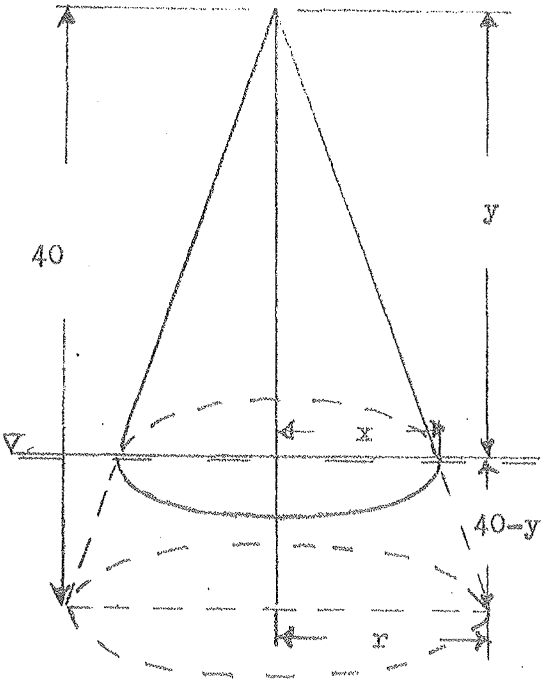
Vi löser sambandet medelst passning

$$\theta = 81^\circ \text{ ger}$$

$$1.2566 \neq 1.4137 - \frac{1}{2} \sin 18^\circ \neq 1.4137 - 0.1545 \neq 1.2592.$$

Nersjunkning: $0.25(1 - \cos 81^\circ) = 0.21$ m.

5. Hur djupt sjunker en 40 cm hög kon med tätheten 0,6 g/cm^3 i vatten om spetsen är vänd uppåt?



<u>Lösning</u>: Likformighet i vidstående figur ger

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{40} \ ; \quad x = \frac{ry}{40}$$

Vi får då, eftersom den stympade konens volym kan tecknas

$$\frac{\pi(40-y)}{3}\left(r^2 + \frac{r^2 y}{40} + \frac{r^2 y^2}{40^2}\right)$$

dvs.

$$\frac{\pi r^2}{3}\left(40 - \frac{y^3}{40^2}\right)$$

$$0,6 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 40}{3} \text{ g} = 1 \cdot \frac{\pi r^2}{3}\left(40 - \frac{y^3}{40^2}\right) \text{ g}$$

$$24 = 40 - \frac{y^3}{40^2} \ ; \quad \frac{y^3}{40^2} = 16 \ ; \quad y^3 = 8^3 \cdot 50$$

$$\underline{y} = 8\sqrt[3]{50} = 8 \cdot 3,684 = \underline{29,472}$$

$$\underline{40 - y} = 40 - 29,472 = 10,528 \approx \underline{10,5 \text{ cm}}$$

EXEMPEL UTAN LÖSNINGAR

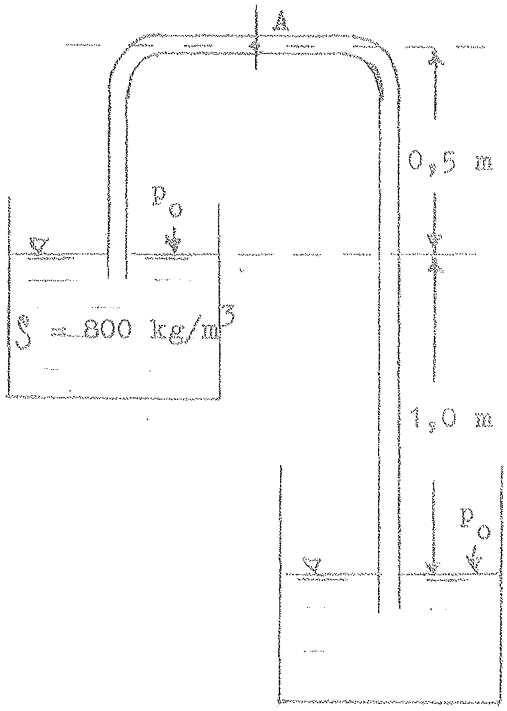
1. I en öppen behållare befinner sig två vätskor, som ej blandar sig med varandra. Den ena ($\rho_1 = 750$ kg/m^3) har djupet 1,3 m, den andra ($\rho_2 = 1250$ kg/m^3) har djupet 0,8 m. Hur stort är hydrostatiska trycket (absoluta trycket minus atmosfärstrycket) 1,5 m från den fria vätskeytan.

Svar: 12017 N/m^2

2. I ett U-rör hälles först kvicksilver ($\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3). Därefter tillsättes i den ena skänkeln vatten (ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3) till en höjd av 10 cm, i den andra skänkeln olja (ρ_{olja}: 800 kg/m^3) till en höjd av 30 cm. Beräkna höjdskillnaden mellan kvicksilverytorna.

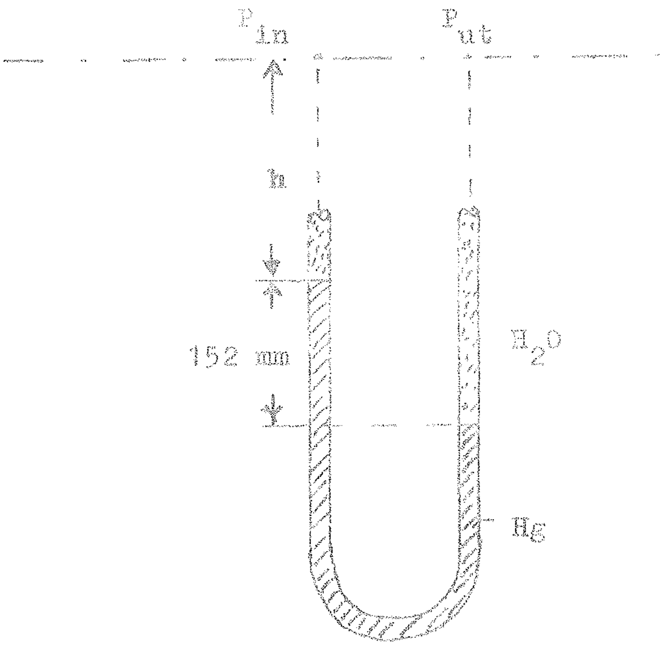
Svar: 10,3 mm

3. Hur stort är övertrycket från vänster till höger i punkten A på häverten i nedanstående figur i kp/cm^2 ?



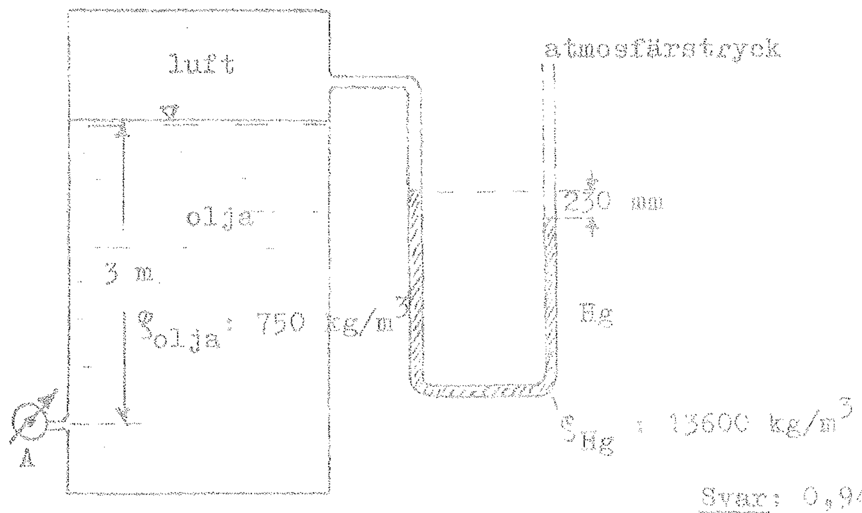
Svar: 0,08 kp/cm^2

4. Kvicksilvermanometern i nedanstående figur är kopplad till både insugningssidan och trycksidan på en vattenpump. Bestäm ökningen i det statiska trycket i kp/cm^2. $\rho_{H_2O} = 1000$ kg/m^3; $\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3.



Svar: 0,192 kp/cm^2

5. Behållaren i nedanstående figur innehåller olja. Vad är absoluta trycket i A i kp/cm^2 ? Lufttrycket är 762 mm. $\varrho_{olja} = 750\ kg/m^3$ $\varrho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$.



Svar: 0,949 kp/cm^2

6. Ett kärl, delvis fyllt med vatten framförs horisontellt med konstant acceleration a utan att något vatten går förlorat. Om vinkeln mellan vattenytan och horisontalplanet uppmäts till 35°, hur stor är då accelerationen a ?

Svar: 6,87 m/sek^2

7. En vattenbehållare på hjul får rulla nedför ett lutande plan. Bevisa att vattenytan i behållaren inställer sig parallellt med det lutande

planet om hjulfriktionen och vindmotståndet försummas.

8. En oljebehållare är till ett djup av 1,5 m fylld med olja vars täthet är 750 kg/m^3. Sök absoluta trycket i kp/cm^2 mot behållarens botten om a) accelerationen är 5,0 m/sek^2 riktad vertikalt uppåt b) accelerationen är 5,0 m/sek^2 riktad vertikalt nedåt. Atmosfärstrycket är 762 mm och ϱ_{Hg} : 13600 kg/m^3.

Svar: a) 1,206 kp/cm^2
b) 1,092 "

9. En kraft av 267 N accelererar ett kärl med 45 l vatten vertikalt uppåt. Om vattnet har ett djup av 90 cm hur stor är då tryckkraften mot kärlets botten? ϱ_{H_2O} = 1000 kg/m^3.

Svar: 708 N

10. En öppen behållare med vatten accelereras nedför ett plan, som lutar 15° mot horisontalplanet. Om vattenytans lutning mot horisontalplanet bestämmes till 30° hur stor är då accelerationen?

Svar: 5,08 m/sek^2

11. Ett slutet cylindriskt kärl 60 cm i diameter är helt fyllt med vatten. Om kärlet ges en rotation av 1200 varv/min sök absoluta trycket mot dess lock a) i lockets centrum b) vid lockets kontakt med kärlväggen. Atmosfärstrycket: 755 mm Hg. ϱ_{Hg} = 13600 kg/m^3.
ϱ_{H_2O} = 1000 kg/m^3.

Svar: a) 100 729 N/m^2
b) 811 344 N/m^2

12. En sluten cylindrisk behållare 1,8 m hög och 0,9 m i diameter är till ett djup av 1,35 m fylld med vatten. Om vinkelhastigheten vid rotation är konstant 20 rad/sek, hur stor del av behållarens bottenyta är då fri från vatten?

Svar: 0,02 m^2

13. En öppen cylindrisk behållare 1,0 m i diameter och 1,2 m djup är fylld med vatten. Behållaren försätts i rotation kring sin vertikala axel. Hur djupt står vattnet i centrum och hur mycket vatten spilles om varvtalet är 45 rpm.

Svar: 0,92 m
$0,111\ m^3$

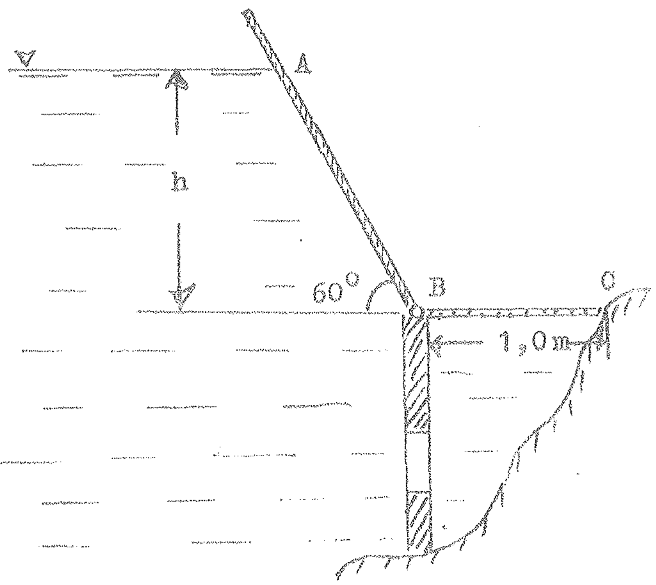
14. Vilken rotation i varv per minut måste behållaren i föregående exempel ha om vattenytan i centrum skall tangera botten?

Svar: 93 rpm

15. Ett öppet med vatten fyllt kärl roterar kring sin vertikala axel med en hastighet så avpassad att vattenytan 10 cm från axeln har en lutning av 45° mot horisontalplanet. Beräkna rotationshastigheten i rad/sek.

Svar: 9,9 rad/sek

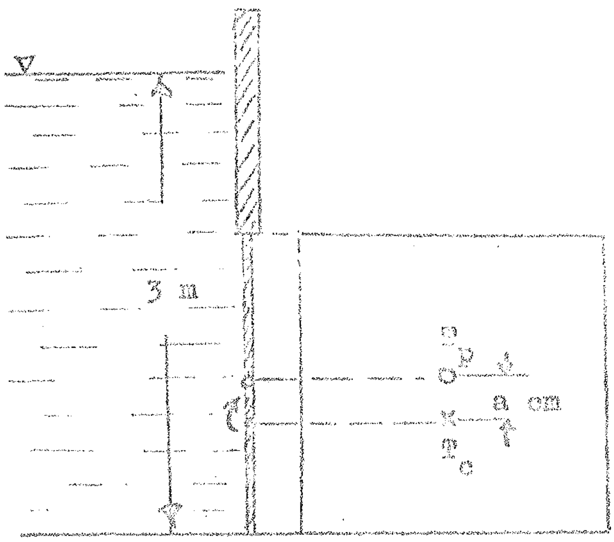
16.



Den rektangulära dammluckan ABC i vidstående figur är rörlig kring en axel i B. Bredden är 2 m. Bestäm h för det fall att jämvikt just inträtt. Luckans egen tyngd kan försummas.

Svar: h = 1,5 m

17.



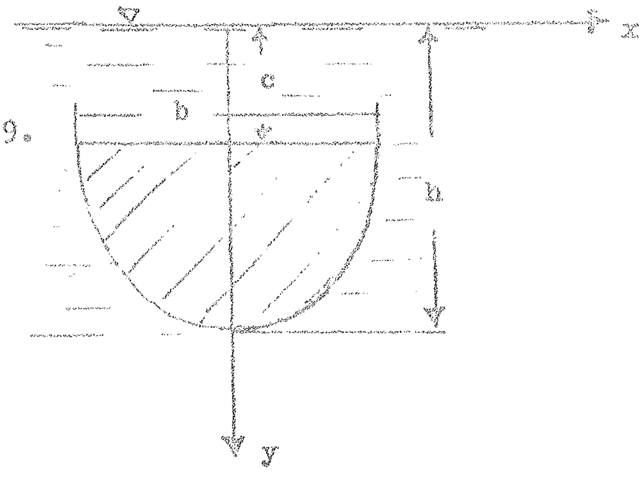
Den 2 m höga och 4 m breda rektangulära damluckan i vidstående figur är rörlig kring en axel i C a cm nedanför luckans tyngdpunkt. Vid vattendjupet 3 m är luckan stängd. Bestäm a.

Svar: a = 16,7 cm

18. En i vatten vertikalt ställd ellipsyta har axlarna 60 cm och 40 cm. Ellipsens mindre axel är horisontell och tyngdpunkten befinner sig 30 cm under vattenytan. Bestäm totala tryckkraften och tryckcentrums läge.

Svar: 555 N; 33,33 cm under vy

19.



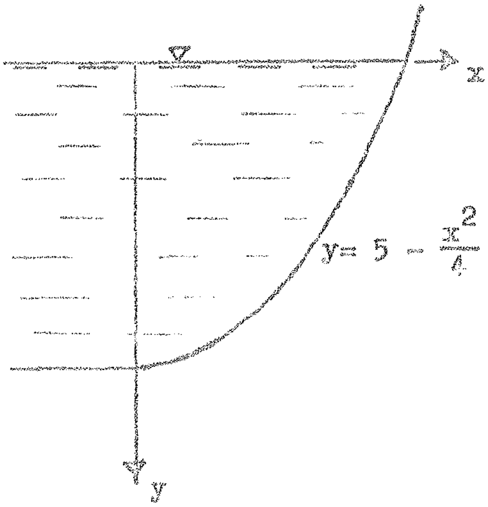
Bestäm totala tryckkraften mot parabelytan i vidstående figur.

Svar: $\frac{2}{15}\rho g\, b(2h^2 - hc - 3c^2)$

20. Ett öppet dike med bottenbredden 1 m, dagbredden 6 m och djupet 1,5 m uppdämmes. Vattendjupet innanför fördämningen är vid ett visst tillfälle 1 m. Hur stor är då tryckkraften mot fördämningen?

Svar: 10355 N, 1056 kp.

21.



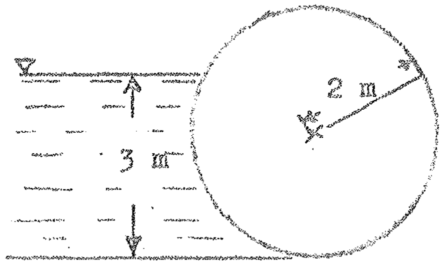
Vidstående figur föreställer ett tvärsnitt genom en i vatten nersänkt buktig yta. Beräkna den horisontella tryckkraftskomponenten per breddenhet av ytan.

Svar: 122 625 N

22. Beräkna den totala tryckkraften per breddenhet mot den buktiga ytan i exempel 21.

Svar: 190 850 N

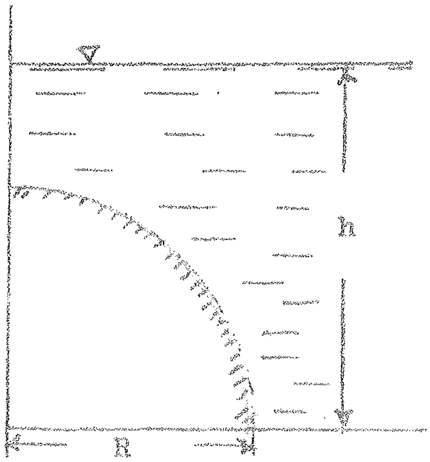
23.



Bestäm den vertikala tryckkraften på den cylindriska dammluckan i vidstående figur. Luckan är 4 m i diameter och 10 m bred; vattendjupet är 3 m.

Svar: 495 876 N

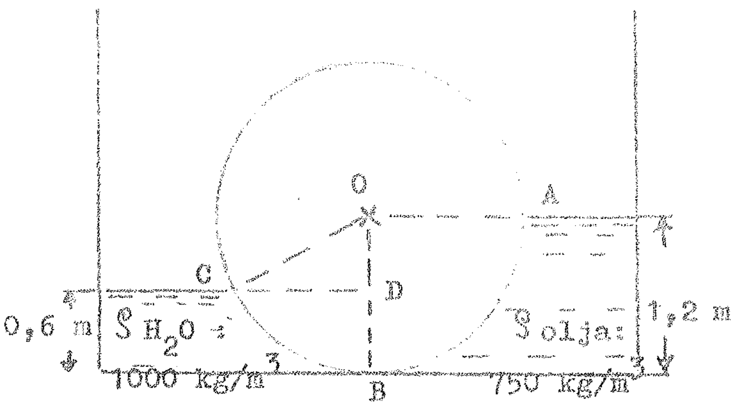
24.



Beräkna förhållandet mellan de horisontella och vertikala tryckkraftskomponenterna mot den i vatten nedsänkta sfäriska ytan i vidstående figur.

Svar: $\frac{3h\,\pi - 4R}{\pi(3h - 2R)}$

25.



På botten av en 1,2 m lång behållare vilar en cylinder 2,4 m i diameter. Den väger 250 kg. Se vidstående figur. Vatten påfylles till vänster om cylindern till en höjd av 0,6 m, olja till höger om cylindern till en höjd av 1,2 m. Beräkna de horisontella och vertikala kraftkomponenter, som fordras för att hålla cylindern i jämvikt enligt figuren.

Svar: 432 kp mot höger och
1299 kp nedåt.

26. En livboj är fylld med kork ($\varrho = 250$ kg/m^3) och har formen av en ring med cirkulär sektion. Om sektionens diameter är 30 cm och ringens yttre diameter 130 cm, hur stor är då lyftkraften i kp?

Svar: 166.55 kp.

27. Ett klot med radien 10 cm sjunker i vatten 6 cm. Vilken nedåtriktad kraft i N behöver insättas för att klotet helt skall befinna sig under vatten?

Svar: 32 N

28. En flottör är tillverkad av 2 mm kopparplåt (ϱ_{Cu}: 8900 kg/m^3). Bestäm flottörens ytterdiameter om nedsjunkningen i vatten beräknas uppgå till 3/4 av flottörens volym.

Svar: 13,8 cm

29. En kubisk behållare har sidan 1.0 m och väger 250 kg. Den är placerad i vatten och med en kedja förankrad vid ett cementblock, som väger 600 kg ($\varrho_{cement} = 2400$ kg/m^3). När kedjan mellan behållaren och cementblocket nätt och jämnt är sträckt ligger behållaren 0,25 m djupt. Vid vilken höjning av vattenståndet kommer cementblocket att lyftas?

Svar: 0,35 m

30. En hydrometer väger 12,5 g. Skillnaden i nedsjunkning i två vätskor med tätheten 1,25 g/cm^3 resp. 0,9 g/cm^3 är 21,7 cm. Bestäm sektionsarean för hydrometerns övre ända.

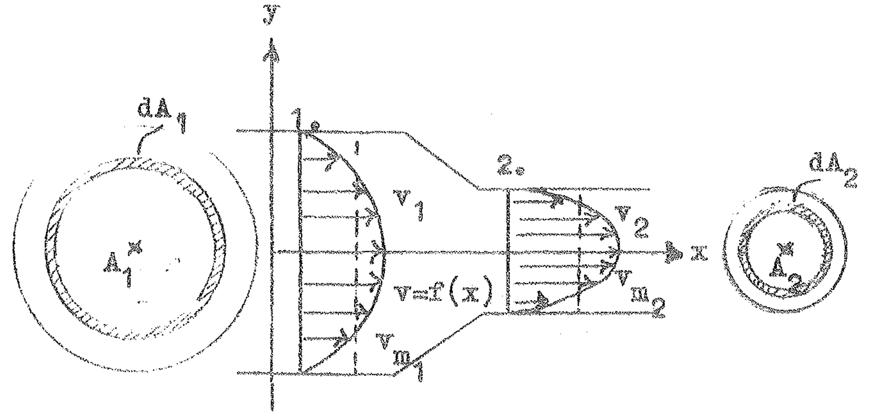
Svar: 0,18 cm^2

HYDRODYNAMIK

STRÖMNING

Allmänt

1. Härled kontinuitetsvillkoret gällande för medelhastigheten v_m vid stationär strömning.



Lösning: Vi härleder först ett samband mellan verkliga hastigheten v och medelhastigheten v_m. Figuren visar en längdsektion av ett rör med hastighetsfördelningen i två tvärsektioner före och efter en rörminskning.

Antar vi parallella strömlinjer kan rörelsen betraktas som endimensionell och i anslutning till figuren får vi då generellt att

$$\int v\, dA = \int f(x)\, dA = v_m\, A \qquad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Massan som passerar sektion 1 per tidsenhet kan tecknas

$$\rho_1 \int v_1 dA_1$$

den som passerar sektion 2

$$\rho_2 \int v_2 dA_2$$

Eftersom massan vid stationär strömning ej kan ändras med tiden utan är konstant fås

$$\rho_1 \int v_1 dA_1 = \rho_2 \int v_2 dA_2$$

Är vätskan inkompressibel kan ρ_1 sättas lika med ρ_2 och vi får

$$\int v_1 dA_1 = \int v_2 dA_2 \qquad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

Men enligt ekv. (1) är

$$\int v_1 dA_1 = v_{m_1} A_1$$

och

$$\int v_2 dA_2 = v_{m_2} \cdot A_2$$

varför ekv. (2) får formen

$$v_{m_1} \cdot A_1 = v_{m_2} \cdot A_2$$

Produkten $v_m \cdot A$ är lika med den vätskemängd, som per tidsenhet passerar ett godtyckligt tvärsnitt eller

$$q = v_m \cdot A$$

2. Är kontinuitetsekvationen för stationär inkompressibel strömning satisfierad för följande hastighetskomponenter?

$$v_x = 2x^2 - xy + z^2 \quad \text{-----------------} \quad (1)$$
$$v_y = x^2 - 4xy + y^2 \quad \text{-----------------} \quad (2)$$
$$v_z = -2xy - yz + y^2 \quad \text{-----------------} \quad (3)$$

Lösning: Kontinuitetsekv. vid stationär strömning i en inkompressibel vätska skrives

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{-------------} \quad (4)$$

Vi differentierar ekv. (1) - (3) och får

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 4x - y \; ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -4x + 2y \; ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -y$$

Insättning i ekv. (4) ger

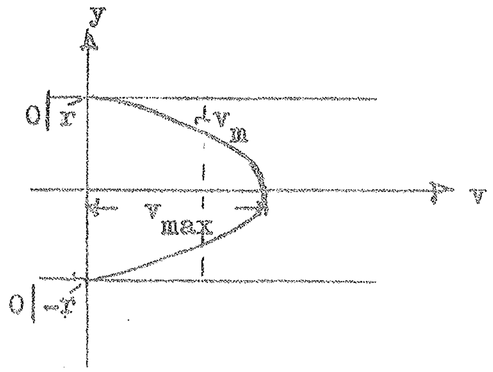
$$4x - y - 4x + 2y - y = 0$$
$$\underline{0 = 0}$$

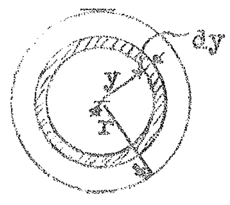
Kontinuitetsekv. är satisfierad

3. I ett cirkulärt rör är vid en tvådimensionell strömning hastighetsfördelningen i ett godtyckligt tvärsnitt given genom en parabel med

maximala hastigheten v_{max} i centrum av röret och hastigheten 0 vid rörets väggar. Sök medelhastighten v_m uttryckt i v_{max}.

I. Lösning:





Parabelns ekvation i grundform kan här skrivas

$$(y - \alpha)^2 = -4a(v - \beta)$$

där $\alpha = 0$ och $\beta = v_{max}$ alltså

$$y^2 = -4a(v - v_{max}) \quad \text{-------------} \quad (1)$$

För $y = \pm r$ är $v = 0$. Då fås: $r^2 = -4a \cdot - v_{max}$ eller

$$a = \frac{r^2}{4v_{max}}$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$y^2 = -\frac{r^2}{v_{max}}(v - v_{max}); \quad -y^2 \cdot v_{max} = r^2(v - v_{max})$$

$$v - v_{max} = -\frac{y^2}{r^2}v_{max}; \quad v = v_{max} - \frac{y^2}{r^2}v_{max} = v_{max}(1 - \frac{y^2}{r^2})$$

$$v = \frac{v_{max}}{r^2}(r^2 - y^2) \quad \text{------------------} \quad (2)$$

Enligt det föregående har vi att

$$v_m \cdot A = \int_A v\, dA$$

$dA = 2\pi y\, dy$ (se fig.) och $A = \pi r^2$

varför

$$v_m \cdot \pi \cdot r^2 = \int_0^r \frac{v_{max}}{r^2} (r^2 - y^2)\, 2\pi\, y\, dy$$

$$v_m \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{2\pi v_{max} \cdot r^2}{r^2} \int_0^r y\, dy - \frac{2\pi v_{max}}{r^2} \int_0^r y^3\, dy$$

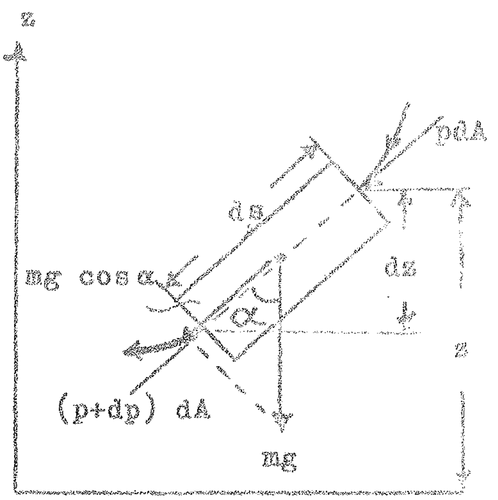
$$v_m = \frac{2v_{max}}{r^2} \Big|_0^r \frac{y^2}{2} - \frac{2v_{max}}{r^4} \Big|_0^r \frac{y^4}{4}$$

$$\underline{v_m} = v_{max} - \frac{v_{max}}{2} = \underline{\frac{v_{max}}{2}}$$

II. Tillämpar vi den matematiska regel, som säger att volymen under en rotationsparaboloid är hälften av den omskrivna cylinderns volym fås en mycket enkel lösning.

$$\underline{v_m} = \frac{\text{vol./sek}}{\text{basarea}} = \frac{\frac{1}{2}\pi\, r^2\, v_{max}}{\pi\, r^2} = \underline{\frac{v_{max}}{2}}$$

4. Härled rörelseekvationen för en inkompressibel, friktionsfri vätska endast utsatt för tyngdkraftens inverkan.



Lösning: I en inkompressibel friktionsfri vätska som strömmar endast utsatt för tyngdkraftens inverkan betraktar vi ett prismatiskt vätskeelement.
Dess längd i hastighetens dvs. strömlinjens riktning är ds, dess tvärsnitt dA.

Enligt Newtons lag II är $F = m\, a$ - - - - - - - - - - - - (1)
där enl. figuren

F = summan av de yttre krafterna i strömlinjens riktning
m = elementets massa
a = tangentialaccelerationen

De krafter, som verkar på vätskeelementet är 1) tryckkraften p dA mot elementets övre ända 2) tryckkraften (p + dp) dA mot elementets nedre ända och tyngdkraftens komponent i strömningsriktningen $m\ g\ \cos\alpha$.

Insättning i ekv. (1) ger då

$$p\ dA - (p + dp)dA + m\ g\ \cos\alpha = m\ a$$

som ger

$$-dp \cdot dA + m\ g\ \cos\alpha = m\ a$$

där $m = \rho\ ds \cdot dA$ och $\cos\alpha = -\frac{dz}{ds}$

Då fås

$$-dp \cdot dA - \rho\ g\ ds\ dA\frac{dz}{ds} = \rho\ ds\ dA \cdot a$$

och

$$a = -\frac{dp}{\rho\ ds} - g\frac{dz}{ds}$$

Men $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\ v = \frac{1}{2}\ \frac{d(v^2)}{ds}$

och

$$\frac{1}{2}\ \frac{d(v^2)}{ds} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{ds} + g\frac{dz}{ds} = 0$$

Integrering ger

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\ z = \text{konst.}$$

Bernoullis ekvation

5. Härled ett uttryck för rörelseenergien vid en inkompressibel vätskas stationära strömning.

<u>Lösning</u>: Rörelseenergien för en oändligt liten vätskepartikel kan tecknas

$$\frac{dm\ v^2}{2}$$ där m = partikelns massa och v dess hastighet.

Uttrycket för den totala rörelseenergien blir efter integrering

$$\frac{1}{2} \int_A v^2 \, dm \qquad \text{där } A = \text{tvärsnittsytan.}$$

Men $dm = \rho \, dV = \rho \, q = \rho \, v \, dA$

Uttrycket för rörelseenergien får då formen

$$\frac{\rho}{2} \int_A v^3 \, dA$$

6. Med utgångspunkt från svaret i föregående exempel härled ett uttryck för korrektionsfaktorn α, dvs. den faktor uttrycket för rörelseenergien skall multipliceras med om man i stället för den verkliga hastigheten v använder medelhastigheten v_m.

<u>Lösning</u>: Rörelseenergien beräknad med hjälp av v_m ger uttrycket

$$\frac{m \cdot v_m^2}{2} \quad \text{- -} \quad (1)$$

Men $m = \rho \cdot q = \rho \cdot v_m \cdot A$ varför ekv. (1) kan omformas till

$$\frac{\rho \cdot v_m^3 \cdot A}{2}$$

Vi kan då skriva

$$\alpha \cdot \frac{\rho \cdot v_m^3 \cdot A}{2} = \frac{\rho}{2} \int_A v^3 \, dA$$

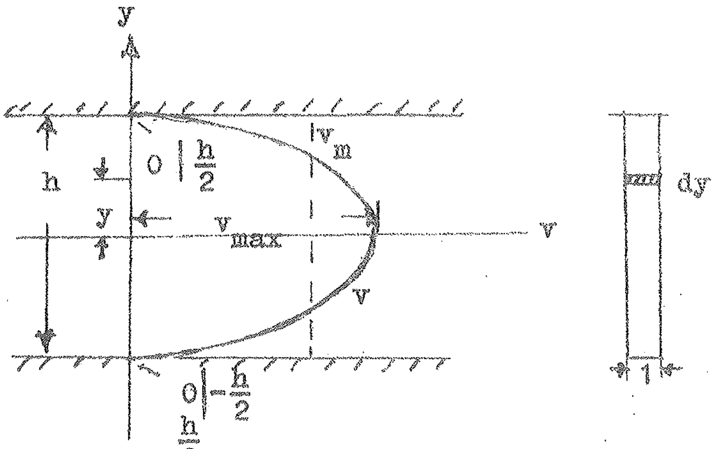
eller

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 \cdot A} \int_A v^3 \, dA$$

7. En vätska strömmar mellan två plattor på avståndet h från varandra. Hastighetsfördelningen är parabolisk och given genom ekvationen

$$v = \frac{v_{max}}{h^2} (h^2 - 4y^2) \qquad \text{(se fig.)}$$

Bestäm a) medelhastigheten v_m uttryckt i v_{max} b) korrektionsfaktorn α



Lösning: a) Vi har först relationen

$$v_m \cdot A = \int_A v \, dA \quad -- \quad (1)$$

där räknat på breddenheten

$A = 1 \cdot h$ och $dA = 1 \cdot dy$

Då fås i ekv. (1)

$$v_m \cdot h = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{v_{max}}{h^2}(h^2 - 4y^2)\, dy = \frac{v_{max}\, h^2}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy - \frac{4v_{max}}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, dy$$

$$v_m \cdot h = v_{max} \Big| _{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y - \frac{4v_{max}}{h^2} \Big| _{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^3}{3} = v_{max}\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \frac{4v_{max}}{h^2}\left(\frac{h^3}{8 \cdot 3} + \frac{h^3}{8 \cdot 3}\right)$$

$$v_m \cdot h = v_{max} \; h - \frac{v_{max} \cdot h}{3} \; ; \quad \underline{v_m = \frac{2\, v_{max}}{3}}$$

b) Vi har uttrycket på α

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 \cdot A} \int_A v^3 \, dA \quad ------------- \quad (1)$$

och

$$v_m = \frac{2\, v_{max}}{3} \quad ---------------- \quad (2)$$

Då fås för $v = \dfrac{v_{max}}{h^2}(h^2 - 4y^2)$

$$\alpha = \frac{v_{max}^3 \cdot 27}{8v_{max}^3 \cdot h \cdot h^6} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^2 - 4y^2)^3 \, dy$$

$$\alpha = \frac{27}{8h^7} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (h^6 - 12h^4y^2 + 48h^2y^4 - 64y^6) \, dy$$

$$\alpha = \frac{27}{8h^7} \left[h^6 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y - 12h^4 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^3}{3} + 48h^2 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^5}{5} - 64 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^7}{7} \right]$$

$$\alpha = \frac{27}{8h^7} \left| h^6(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - 12h^4(\frac{h^3}{8 \cdot 3} + \frac{h^3}{8 \cdot 3}) + 48h^2(\frac{h^5}{32 \cdot 5} + \frac{h^5}{32 \cdot 5}) - \right.$$

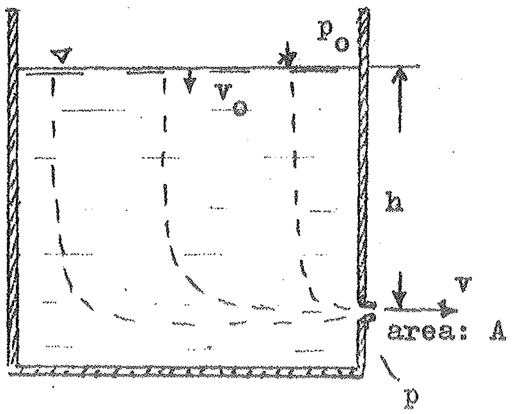
$$\left. - 64(\frac{h^7}{128 \cdot 7} + \frac{h^7}{128 \cdot 7}) \right|$$

$$\alpha = \frac{27}{8h^7} \left| h^7 - h^7 + \frac{3h^7}{5} - \frac{h^7}{7} \right| = \frac{27 \ h^7}{8h^7} (\frac{3}{5} - \frac{1}{7})$$

$$\underline{\alpha} = \frac{27(21 - 5)}{8 \cdot 35} = \frac{27 \cdot 16}{8 \cdot 35} = \frac{54}{35} = \underline{1{,}54}$$

UTSTRÖMNING VID KONSTANT TRYCKHÖJD

1. I behållaren i nedanstående figur befinner sig en ideal vätska med arean A_o. På djupet h under den fria vätskeytan finns en i förhållande till A_o liten öppning med arean A. Vätskeytan hålls genom tillrinning konstant på konstant nivå. Härled med hjälp av i figuren lämnade uppgifter ett uttryck på utströmningshastigheten v.



Lösning: Enligt Bernoullis ekv. har vi att

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\rho g} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + 0$$

Vi löser ut v och får

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o - p}{\rho g} + h$$

$$v^2 = v_o^2 + 2g(h + \frac{p_o - p}{\rho g})$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2g(h + \frac{p_o - p}{g})} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - - (1)}$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$v \cdot A = v_o \cdot A_o \quad \text{eller} \quad v_o = v \cdot \frac{A}{A_o}$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$v = \sqrt{v^2 (\frac{A}{A_o})^2 + 2g(h + \frac{p_o - p}{\rho g})} \; ; \; v^2 = v^2(\frac{A}{A_o})^2 + 2g(h + \frac{p_o - p}{\rho g}) \; ;$$

$$v^2 \left[1 - (\frac{A}{A_o})^2\right] = 2g(h + \frac{p_o - p}{\rho g}) \; ; \quad v = \sqrt{\frac{2g(h + \frac{p_o - p}{\rho g})}{1 - (\frac{A}{A_o})^2}} \quad \text{- - (2)}$$

Är A mycket liten i förhållande till A_o kan $(\frac{A}{A_o})^2$ försummas. Ekvation (2) får då formen

$$v = \sqrt{2g(h + \frac{p_o - p}{\rho g})} \quad \text{- - - - - - - - - - - (3)}$$

I allmänhet är $p_o = p$ = atmosfärstrycket vid vätskors utströmning, vilket ger

$$v = \sqrt{2g\ h} \qquad \text{Toricellis lag}$$

2. Hur mycket vatten kan per minut erhållas genom en 12 mm avtappningskran om övertrycket i vattenledningen är 1,5 kp/cm^2 ? Utströmningskoefficienten $\mu = 0,8$.

Lösning: Vi har att

$$v = \mu\sqrt{2\ g\ H} \qquad \text{där } \mu = 0,8$$
$$g = 9,81\ \text{m/sek}^2$$
$$H = 1,5\ \text{kp/cm}^2 = 15\ \text{m aq}$$

Då fås

$$v = 0,8\ \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 15} = 0,8\ \sqrt{30 \cdot 9,81} = 0,8\sqrt{294,3} = 0,8 \cdot 17,2 =$$
$$= 13,8\ \text{m/sek}$$

$$Q = q\ t = v\ A\ t = 13,8 \cdot 3,1416 \cdot 0,006^2 \cdot 60 = 43,35 \cdot 0,00216 =$$
$$= 0,0936\ \text{m}^3\text{/min} = \underline{93,6\ \text{l/min}}$$

3. I en vattenbehållare står vattnet 0,75 m över en utströmningsöppning vars diameter är 50 mm. Om övertrycket i behållaren är 0,5 kp/cm^2 vad är då den utströmmande vattenmängden? Utströmningskoefficienten $\mu = 0,8$

Lösning: Enligt Toricellis lag har vi att

$$v = \mu\sqrt{2g(h + \frac{p - p_o}{\rho\ g})} \qquad (1)$$

Här är $\mu = 0,8$; $g = 9,81$ m/sek^2; $h = 0,75$ m.

Dessutom är 0,5 kp/cm^2 = 5 m aq.

Då fås

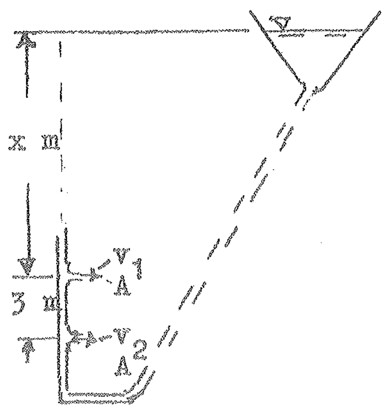
$$v = 0,8\sqrt{2 \cdot 9,81(0,75 + 5)} = 0,8\sqrt{19,62 \cdot 5,75} = 0,8\sqrt{112,8} =$$
$$= 0,8 \cdot 10,6 = \underline{8,5}$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$\underline{q} = v\ A = 8,5 \cdot 3,1416 \cdot 0,025^2 = 26,7 \cdot 0,000625 = 0,017\ m^3/sek =$$

$$= \underline{17\ l/sek}$$

4. Ett vertikalt vattenledningsrör anslutet till en högre belägen vattenreservoar har två tappställen av lika dimension. Avståndet mellan dem är 3 m. Om det övre tappstället ger 5 % mindre vatten per tidsenhet än det nedre, och om man bortser från strömningsförlusterna i tillloppsledningen, hur högt är då den fria vattenytan i reservoaren belägen i förhållande till det övre tappstället?



__Lösning:__ Vi kan i anslutning till figuren teckna

$$v_1 = \mu\sqrt{2gx}; \quad q_1 = 0,95 \cdot q_2 = v_1 \cdot A$$

$$v_2 = \mu\sqrt{2g(x+3)}\ ; \qquad q_2 = v_2 \cdot A$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{0,95\ q_2}{q_2} = \frac{\mu\sqrt{2gx}\cdot A}{\mu\sqrt{2g(x+3)}\ A}$$

$$0,9025 = \frac{2gx}{2g(x+3)}$$

$$0,9025x + 2,7075 = x\ ; \quad 0,0975x = 2,7075$$

$$\underline{x} = 27,8 \approx \underline{28\ m}$$

5. Från en behållare strömmar vatten genom ett litet hål ut i vacuum. Om utströmningshastigheten uppmäts till 25 m/sek, hur stort är då trycket i behållaren uttryckt i bar?

__Lösning:__ Enl. Toricellis lag har vi att

$$25 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot H}$$

där H = trycket i behållaren i m aq.

Då fås

$$625 = 19{,}62 \cdot H; \quad \underline{H = 31{,}9 \text{ m aq}}$$

Detta ger

$$1000 \cdot 9{,}81 \cdot 31{,}9 \text{ N/m}^2 = 312\ 939 \text{ N/m}^2$$

$$10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar varför}$$

$$312\ 939 \text{ N/m}^2 = \underline{3{,}129 \text{ bar}}$$

6. Härled ett uttryck för utströmningsmängden per tidsenhet genom en större öppning med utgångspunkt från att utströmningshastigheten varierar från punkt till punkt av utloppsöppningens area.

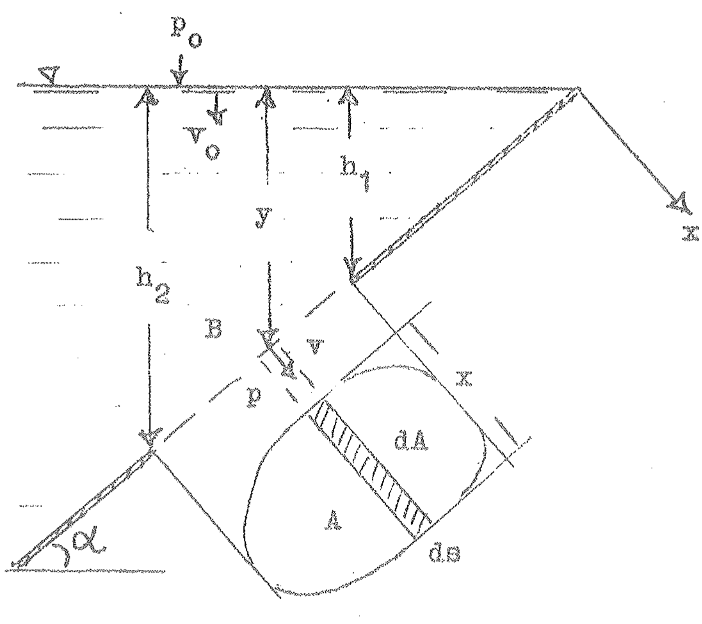


Fig. 1

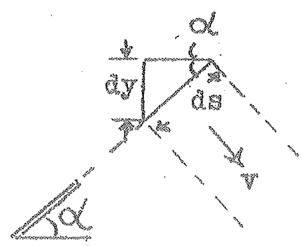


Fig. 2

<u>Lösning</u>: I ovanstående figur gäller enl. Bernoullis ekv. för ett referensplan genom punkten B

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\varrho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varrho g}$$

eller

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2\,g\left(y + \frac{p_o - p}{\varrho\, g}\right)}$$

Tas hänsyn till uppkomna strömningsförluster kan vi skriva

$$v_v = \alpha \sqrt{v_o^2 + 2\,g(y + \frac{p_o - p}{\varrho\, g})}$$

Vad beträffar utströmningsytan har vi att

$$A_v = \beta \cdot A \quad \text{och} \quad dA_v = \beta \cdot dA$$

Dessutom kan vi sätta $\alpha \cdot \beta = \mu$

Vi kan då teckna flödet q genom A. Då fås

$$dq = v_v \quad dA_v = \alpha \quad v_o^2 + 2\,g(y + \frac{p_o - p}{g}) \cdot \beta \cdot dA$$

$$dq = \mu\, v\; dA = \mu \sqrt{v_o^2 + 2\,g(y + \frac{p_o - p}{\varrho\, g})}\; dA \quad \text{- - - - - - - - - - (1)}$$

I fig. 2 har vi att $dA = x\; ds = x\,\frac{dy}{\sin\alpha}$

Vi substituerar dA i ekv. (1) med $x\,\frac{dy}{\sin\alpha}$ och integrerar mellan h_1 och h_2

$$q = \frac{\mu}{\sin\alpha} \int_{h_1}^{h_2} x \sqrt{v_o^2 + 2\,g(y + \frac{p_o - p}{\varrho\, g})}\; dy \quad \text{- - - - - - - - (2)}$$

För att denna integral skall kunna lösas måste x kunna uttryckas som en funktion av y.

Ofta kan p_o sättas = p (atmosfärstryck), $\alpha = 90^o$ och x = b = konstant. Vi får då <u>utströmning genom rektangulär öppning i vertikal vägg</u>. Ekv. (2) får då formen

$$q = \mu\, b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{\frac{v_o^2}{2g} + y}\;\; dy \quad \text{- - - - - - - - - - - - - (3)}$$

Vi integrerar och får

$$\mu\, b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} (\frac{v_o^2}{2g} + y)^{\frac{1}{2}}\, dy = \mu\, b \sqrt{2g} \Big[_{h_1}^{h_2} \frac{(\frac{v_o^2}{2g} + y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$q = \frac{2}{3}\mu\, b \sqrt{2g} \left[(\frac{v_o^2}{2g} + h_2)^{\frac{3}{2}} - (\frac{v_o^2}{2g} + h_1)^{\frac{3}{2}} \right] \quad \text{- - - - - - - - - - (4)}$$

Då v_o är litet i förhållande till värden på h_1 och h_2 kan detta försummas och vi kan ofta skriva

$$q = \frac{2}{3}\mu\, b \sqrt{2g}\, (h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}) \qquad (5)$$

7. Vatten står konstant 2 m över botten i en vattenbehållare. I den vertikala väggen finns en rektangulär öppning med höjden 40 cm och bredden 20 cm. Om öppningens underkant befinner sig 1,6 m under vattenytan, hur mycket vatten utströmmar då per minut ur behållaren? $\mu = 0,60$.

Lösning: Vi använder relationen för utströmning genom rektangulär öppning i vertikal vägg

$$q = \frac{2}{3}\, u\, b \sqrt{2g}\, (h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}) \qquad (1)$$

där $\mu = 0,60$; $b = 0,2$ m ; $g = 9,81$ m/sek^2 ; $h_2 = 1,6$ m och $h_1 = 1,2$m

Ekv. (1) ger då

$$q = \frac{2}{3} \cdot 0,6 \cdot 0,2 \sqrt{19,62}\, (1,6^{\frac{3}{2}} - 1,2^{\frac{3}{2}})\ ;$$

$$q = 0,08 \cdot 4,43\, (\sqrt{1,6^3} - \sqrt{1,2^3})$$

$$q = 0,3544(\sqrt{4,096} - \sqrt{1,728}) = 0,3544(2,024 - 1,314) =$$

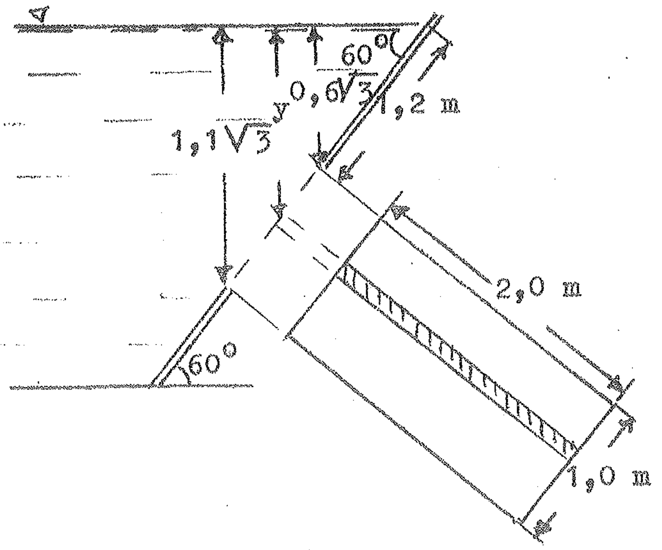
$$= 0,3544 \cdot 0,71 = 0,252\ \text{m}^3/\text{sek.}$$

$$\underline{Q} = q \cdot t = 0,252 \cdot 60 = \underline{15,12\ \text{m}^3/\text{min.}}$$

8. I en fördämning finns en rektangulär dammlucka enligt nedanstående figur. Luckans bredd är 2 m och dess höjd (mätt längs väggen) 1 m. Avståndet från luckans överkant till väggens överkant (mätt längs väggen) är 1,2 m. Bestäm den utströmmande vattenmängden per sek om $\mu = 0,60$ och vinkeln $\alpha = 60^\circ$.

Lösning: Vi använder ekv. (2) i problem 6.

$$q = \frac{\mu}{\sin\alpha} \int_{h_1}^{h_2} x \sqrt{v_o^2 + 2g(y + \frac{p_o - p}{\rho g})}\, dy \qquad (1)$$



Här kan v_o försummas och p sättas = p_o varför ekv. (1) förenklas till

$$q = \frac{\mu}{\sin\alpha} \int_{h_1}^{h_2} x\sqrt{2gy}\, dy = \frac{\mu}{\sin\alpha}\sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} x\sqrt{y}\, dy \quad \text{-----} \quad (2)$$

Här är $\mu = 0,60$; $\sin\alpha = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = 2,0$ m och $g = 9,81$ m/sek^2, varför

$$q = \frac{0,6\sqrt{19,62} \cdot 2}{\sqrt{3}} \int_{0,6\sqrt{3}}^{1,1\sqrt{3}} y^{\frac{1}{2}}\, dy$$

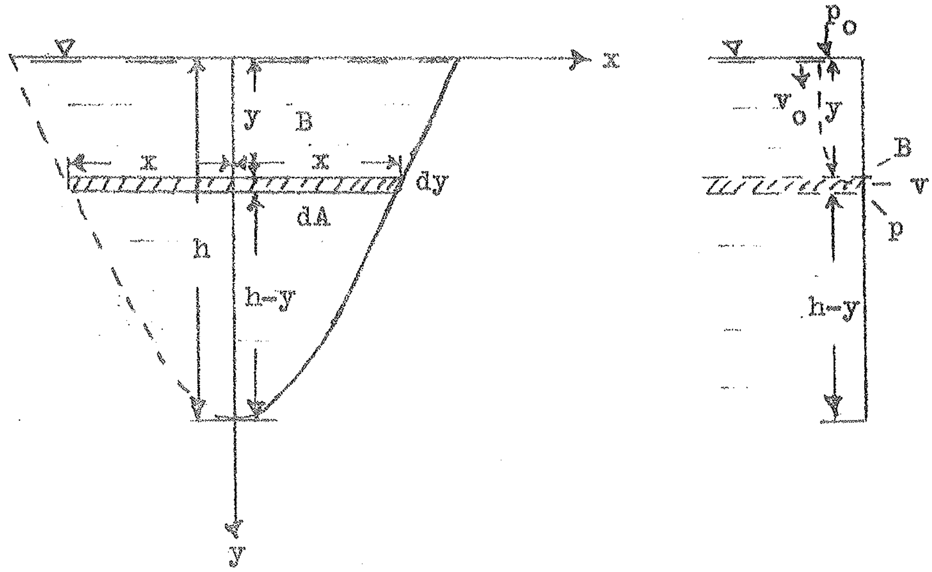
$$q = \frac{1,2 \cdot 4,43}{3} \Bigg|_{0,6\sqrt{3}}^{1,1\sqrt{3}} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \cdot 5,316}{3 \cdot \sqrt{3}} \left[(1,1\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} - (0,6\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= 2,046(\sqrt{1,905^3} - \sqrt{1,039^3})$$

$\underline{q} = 2,046(2,630 - 1,059) = 2,046 \cdot 1,571 = \underline{3,214 \text{ m}^3/\text{sek}}$

9. Nedanstående figur föreställer ett skarpkantat, symmetriskt och vertikalt ställt fritt överfall. Beräkna utströmningsmängden per tidsenhet q som funktion av vattendjupet h. För $x = \frac{b}{2}$ = konstant fås formeln för rektangulärt fritt överfall, för $x = h - y$ fås formeln för

triangulärt överfall med 90° vinkel.



Lösning: Vi har att

$$dq = v \cdot dA = v \cdot 2x \cdot dy \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Enligt Bernoullis ekv. kan vi skriva för ett referensplan genom B (ideal vätska)

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\rho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$$

Då initialhastigheten v_o i allmänhet är liten kan v_o försummas. Likaså är ofta $p = p_o$ = atmosfärstrycket. Då fås

$$v = \sqrt{2g\,y} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

Ekv. (1) kan då skrivas, om utströmningskoefficienten betecknas med μ

$$dq = 2\mu\, x\sqrt{2\,g\,y}\;\; dy$$

Vi integrerar och får

$$q = 2\mu\sqrt{2g}\int_0^h x\sqrt{y}\; dy \quad \text{- - - - - - - - - -} \quad (3)$$

För att lösa denna integral måste vi kunna sätta x konstant eller uttrycka x som funktion av y. I första fallet har vi givet $x = \frac{b}{2}$. Då fås ekv. (3) till

$$q = 2\mu\sqrt{2g}\int_0^h \frac{b}{2}\sqrt{y}\,dy = \mu b\sqrt{2g}\int_0^h y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$q = \mu b\sqrt{2g}\left|\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^h = \underline{\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,h^{\frac{3}{2}}}$$

För x = h − y får ekv. (3) formen

$$q = 2\mu\sqrt{2g}\int_0^h (h-y)\sqrt{y}\,dy$$

Vi sätter $2\mu\sqrt{2g} = k$ och får

$$q = k\int_0^h (h-y)\,y^{\frac{1}{2}}\,dy = kh\int_0^h y^{\frac{1}{2}}\,dy - k\int_0^h y^{\frac{3}{2}}$$

$$q = kh\left|\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^h - k\left|\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^h = \frac{2}{3}khh^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}kh^{\frac{5}{2}}$$

$$\underline{q} = \frac{4}{15}kh^{\frac{5}{2}} = \underline{\frac{8}{15}\mu\sqrt{2g}\,h^{\frac{5}{2}}}$$

10. Beräkna den mängd vatten, som per minut utströmmar genom ett vertikalt, skarpkantat, fritt överfall i form av en liksidig triangel med 100 cm sida, då en sida ligger i vattenytan. $\mu = 0{,}60$.

<u>Lösning:</u> Vi använder formeln

$$q = \frac{8}{15}\mu\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}\,h^{\frac{5}{2}} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Här är $\mu = 0{,}60$; $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$; $g = 9{,}81\ \mathrm{m/sek^2}$ och $h = 0{,}5\sqrt{3}$ m

Insättning i ekv. (1) ger då

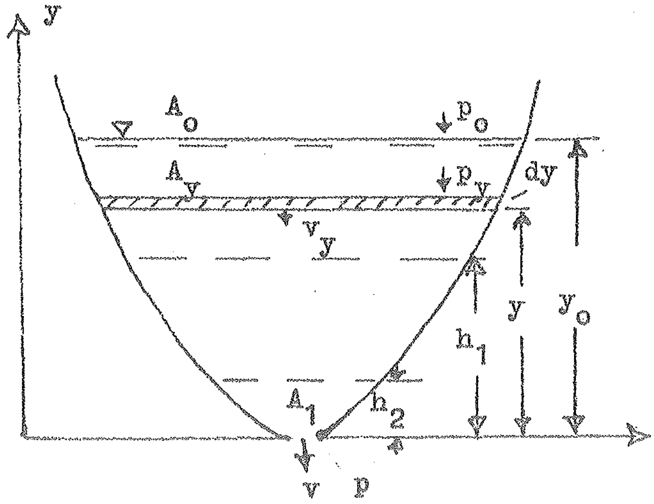
$$q = \frac{8}{15}\ \ 0{,}6\ \text{tg}\ 30^{\circ}\ \sqrt{19{,}62}\ (0{,}5\sqrt{3})^{\frac{5}{2}}$$

$$Q = qt = 60 \cdot \frac{8}{15} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5774 \cdot 4{,}43 \sqrt{0{,}866^{\,5}}$$

$$\underline{Q} = 19{,}2 \cdot 2{,}558 \cdot 0{,}698 = 49{,}11 \cdot 0{,}698 = \underline{34{,}28\ \text{m}^3/\text{min}}$$

UTSTRÖMNING VID VARIABEL TRYCKHÖJD

1. Ett kärl av godtycklig form är fyllt med en vätska (se fig.). I botten på kärlet finns en utloppsöppning vars area är liten i förhållande till den ursprungliga vätskeytan. Härled med hjälp av de i figuren införda symbolerna ett uttryck för den tid, som åtgår för vätskan att sjunka från höjden h_1 till höjden h_2 över utloppsöppningen om ingen tillrinning tänkes ske.



Lösning: Bernoullis ekv. ger

$$\frac{v_y^2}{2g} + \frac{p_y}{\varrho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varrho g} + 0 \quad \text{-- --(1)}$$

Om som ofta är fallet $p_y = p_o =$ = atmosfärstrycket övergår ekv. (1) till

$$\frac{v_y^2}{2g} + y = \frac{v^2}{2g} \quad \text{- - - - - - - - (2)}$$

Enl. kontinuitetsvillkoret är

$v_y \cdot A_y = v \cdot A_1$ eller $v_y = v\,\frac{A_1}{A_y}$ och alltså efter insättning i ekv. (2)

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{A_1}{A_y}\right)^2 + y = \frac{v^2}{2g} \quad \text{eller} \quad \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_y}\right)^2\right] = y \quad \text{varav fås}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gy}{1 - \left(\frac{A_1}{A_y}\right)^2}} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - (3)}$$

På tiden dt sjunker vattenytan från y till (y - dy) varvid vattenmängderna $dQ = -A_y dy$ utströmmar. Detta kan också tecknas

$$dQ = \mu A_1 v \, dt$$

dvs. efter insättning av värdet på v i ekv. (3)

$$\mu A_1 \sqrt{\frac{2gy}{1 - (\frac{A_1}{A_2})^2}}\, dt = - A_y dy$$

eller

$$dt = - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{A_y}{A_1} \sqrt{\frac{1 - (\frac{A_1}{A_y})^2}{2gy}}\, dy \quad \text{-------------} \quad (4)$$

För att sänka vattenytan från höjden h_1 till höjden h_2 över kärlets botten åtgår tiden

$$t = - \frac{1}{\mu \sqrt{2g}\, A_1} \int_{h_1}^{h_2} A_y \sqrt{\frac{1 - (\frac{A_1}{A_y})^2}{y}}\, dy \quad \text{-----------} \quad (5)$$

Är som angivits utströmningsöppningens area A_1 liten i förhållande till A_y kan termen $(\frac{A_1}{A_y})^2$ försummas och ekv. (5) får då formen

$$t = - \frac{1}{\mu A_1 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{A_y}{\sqrt{y}}\, dy \quad \text{--------------} \quad (6)$$

Då man i allmänhet har att göra med kärl av regelbunden form kan man få fram enkla samband mellan y och A_y. Ofta är sektionsarean konstant A_o. Ekv. (6) blir då

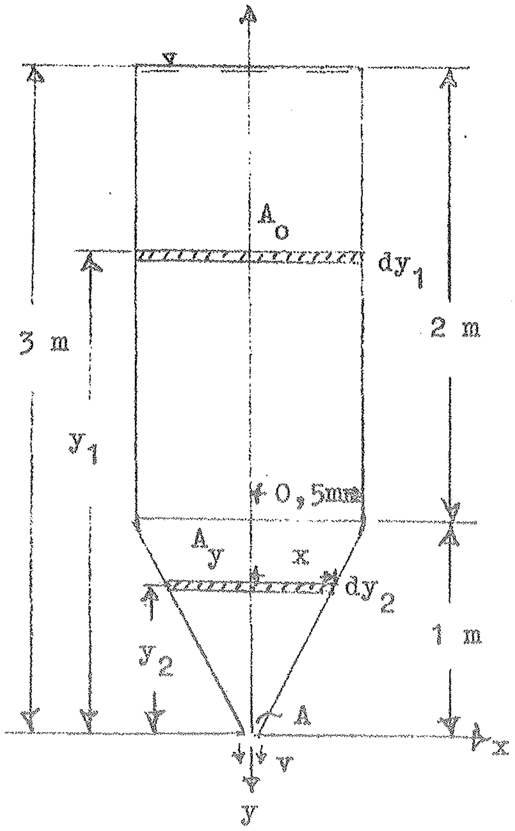
$$t = - \frac{A_o}{\mu A_1 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy \quad \text{-------------} \quad (7)$$

Vi integrerar efter omkastning av integrationsgränserna. Då fås

$$t = \frac{A_o}{\mu A_1 \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \frac{A_o}{\mu A_1 \sqrt{2g}} \Big[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big]_{h_2}^{h_1} \quad \text{och till slut}$$

$$\underline{t = \frac{2A_o}{\mu A_1 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}$$

2. En öppen behållare fylld med vatten är sammansatt av en prismatisk del med kvadratisk tvärsektion 1x1x2 m och under denna en pyramid med 1 m höjd. Vid pyramidens spets längst ner finns en kvadratisk öppning med 2 cm sida. Om $\mu = 0{,}75$, bestäm den tid som åtgår innan kärlet är tomt.



Lösning: Prismatisk tvärsnittet: A_o, utströmingsöppn. area: A.

1. Från det föregående har vi följande uttryck på v (A liten i förhållande till A_o)

$$v = \sqrt{2gy_1}$$

Då fås för den prismatiska delen

$$dQ = \mu vA\ dt_1 = -A_o\ dy_1$$

eller

$$dt_1 = -\frac{A_o}{\mu A\cdot\sqrt{2gy_1}}\,dy_1$$

och

$$t_1 = -\frac{A_o}{\mu A\ \sqrt{2g}}\int_3^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy_1 =$$

$$= \frac{2A_o}{\mu A\ \sqrt{2g}}\Big[\, y_1^{\frac{1}{2}} \Big]_1^3$$

För den prismatiska delen har vi då $A_o = 1x1 = 1\ m^2$; $\mu = 0{,}75$; $A = 0{,}02\cdot 0{,}02 = 0{,}0004\ m^2$; $g = 9{,}81\ m/sek^2$.

$$\underline{t_1} = \frac{2\cdot 1}{0{,}75\cdot 0{,}0004\cdot\sqrt{19{,}62}}(\sqrt{3}-\sqrt{1}) = \frac{0{,}732}{0{,}0006645} = \underline{1102\ sek}$$

2. För pyramiddelen gäller

$$dq_2 = \mu A\ \sqrt{2gy_2}\cdot dt_2 = -A_y\ dy$$

$\frac{A}{A_o}$ är litet varför pyramiden ej behöver anses som stympad. Ett längdtvärsnitt blir då en triangel (se fig.)

Likformighet ger då

$$\frac{A_y}{A_o} = \frac{y_2^2}{1^2} \quad \text{eller} \quad A_y = y_2^2 \cdot A_o$$

Då fås

$$dt_2 = -\frac{A_o y_2^2}{\mu A \sqrt{2gy_2}} dy_2$$

och

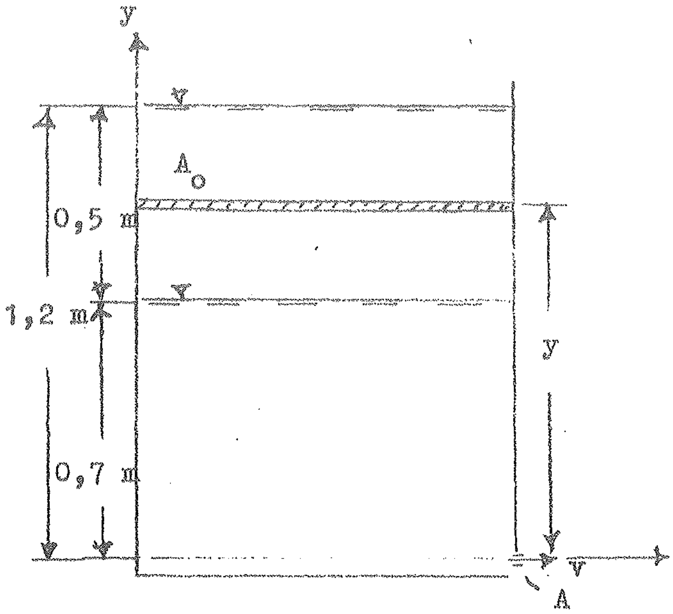
$$t_2 = -\frac{A_o}{\mu A \sqrt{2g}} \int_1^0 y_2^{\frac{3}{2}} dy_2 = \frac{2}{5} \frac{A_o}{\mu A \sqrt{2g}} \Big|_0^1 y_2^{\frac{5}{2}}$$

Insättning ger

$$\underline{t_2} = \frac{2}{5} \frac{1}{0,75 \cdot 0,0004 \cdot 4,43} (1 - 0) = \frac{1}{0,003323} = \underline{30 \text{ sek}}$$

$$\underline{t} = t_1 + t_2 = 1102 + 30 = \underline{1132 \text{ sek}} = \underline{18 \text{ min } 50 \text{ sek}}$$

3. En öppen cylindrisk vattenbehållare med 1 m diameter har en 38 mm avtappningskran. Om vattnet vid ett visst tillfälle står 1,2 m över avtappningskranen hur lång tid åtgår för vattnet att sjunka 0,5 m? $\mu = 0,60$.



Lösning: Vi beräknar vattenbehållarens tvärsnittsarea A_o och utströmningsarean A

$$\underline{A_o} = 3,1416 \cdot 0,5^2 = \underline{0,7854 \text{ m}^2}$$

$$\underline{A} = 3,1416 \cdot 0,019^2 = \underline{0,001134 \text{ m}^2}$$

Ett vätskeskikt på avståndet y över kranen sjunker på tiden dt ett stycke dy. Vi kan skriva

$$dQ = \mu vA \, dt = -A_o dy; \quad v = \sqrt{2gy} \quad \text{varför} \quad dt = -\frac{A_o}{\mu A \sqrt{2gy}} dy$$

Integration ger

$$t = -\frac{A_o}{\mu A\sqrt{2g}}\int_{1,2}^{0,7} y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \frac{2A_o}{\mu A\sqrt{2g}}\Big|_{0,7}^{1,2}\sqrt{y}$$

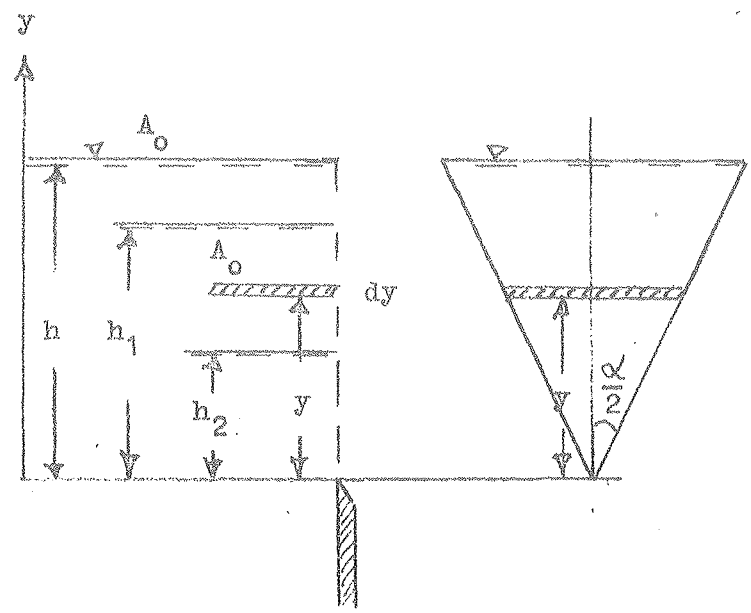
Vi har att

$$t = \frac{2\cdot 0,7854}{0,6\cdot 0,001134\cdot 4,43}\left(\sqrt{1,2}-\sqrt{0,7}\right) = \frac{7854(1,0954-0,8367)}{15,07}$$

$$t = \frac{7854\cdot 0,2587}{15,07} = \frac{2031,8}{15,07} = 134,8 \approx 135 \text{ sek}$$

$$\underline{t = 2 \text{ min } 15 \text{ sek}}$$

4. Härled ett uttryck för utströmningstiden över ett triangulärt fritt överfall om ingen tillströmning äger rum. Det triangulära överfallets höjd = h, utströmningskoefficienten = μ.



<u>Lösning:</u> Vi har att

$$dQ = q\,dt = -A_o\,dy$$

där $q = \frac{8}{15}\mu \,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}\;y^{\frac{5}{2}}$

Då fås

$$dt = -\frac{A_o}{q}\,dy = -\frac{15A_o}{8\mu\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\ \sqrt{2g}}\ y^{-\frac{5}{2}}\,dy$$

Vi sätter $\dfrac{15A_o}{8\mu\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\ \sqrt{2g}} = k$ och får

$$t = -k\int_{h_1}^{h_2} y^{-\frac{5}{2}}\,dy = -k\,\Big|_{h_1}^{h_2}\ \frac{y^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}k\left(\frac{1}{\sqrt{h_2^3}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^3}}\right)$$

Till slut

$$\underline{t} = \frac{2}{3}\cdot\frac{15A_o}{8\mu\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_2^3}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^3}}\right) = \underline{\frac{5A_o}{4\mu\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_2^3}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^3}}\right)}$$

5. En vattenbehållare med vertikala väggar och horisontell botten med arean 4 m^2 har i en av väggarna en lucka i form av en liksidig triangel. Den triangulära luckan har spetsen i behållarens botten och basen i väggens överkant. Vid ett tillfälle när vattnet står 1,0 m över botten öppnas luckan plötsligt helt. Hur lång tid åtgår det för vattenytan att sjunka 0,5 m? $\mu = 0{,}65$.

Lösning: Vi har att

$$dQ = q\ dt = -A_o\ dy \text{ där } q = \frac{8}{15}\mu \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}\ \ y^{\frac{5}{2}}$$

Då fås

$$dt = -\frac{A_o}{q}\ dy = -\frac{15A_o}{8\mu \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}}\ y^{-\frac{5}{2}}\ dy$$

$$t = -\frac{15A_o}{8\mu \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h_2} y^{-\frac{5}{2}}\ dy$$

Här är $A_o = 4\ m^2$; $\mu = 0{,}65$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 30^o = 0{,}5774$;
$g = 9{,}81\ m/sek^2$; $h_1 = 1$ m och $h_2 = 0{,}5$ m

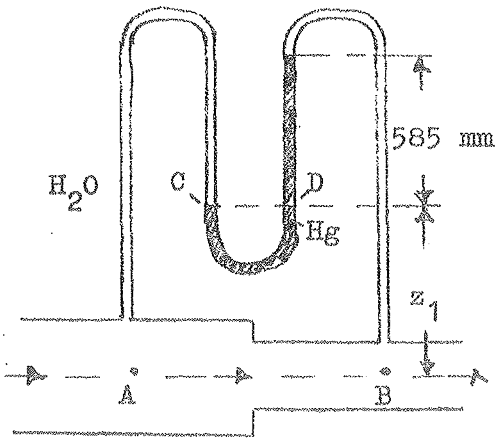
Då fås

$$t = -\frac{15\ \ 4}{8\cdot 0{,}65\cdot 0{,}5774\cdot 4{,}43}\int_{1{,}0}^{0{,}5} y^{-\frac{5}{2}} = -4{,}511\ \Big[\frac{y^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\Big]_{1{,}0}^{0{,}5}$$

$$\underline{t} = \frac{4{,}511\cdot 2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}5^3}} - \frac{1}{\sqrt{1^3}}\right) = 3{,}007(2{,}828 - 1) = \underline{5{,}5\ \text{sek.}}$$

BESTÄMNING AV VÄTSKETRYCK, VÄTSKEHASTIGHETER OCH FRAMSTRÖMMANDE VÄTSKEMÄNGDER I RÖR

1. En kvicksilvermanometer är som framgår av nedanstående figur anbringad till två tvärsektioner A och B i en horisontell rörledning där vatten strömmar. Skillnaden mellan kvicksilverytorna är 585 mm. Beräkna skillnaden i statiska trycket mellan punkterna A och B i N/m^2. ρ_{Hg} = = 13600 kg/m^3, ρ_{H_2O} = 1000 kg/m^3.



Lösning: Trycket vid C = trycket vid D. Då fås

$$p_A - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot z_1 = p_B - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot z_1$$

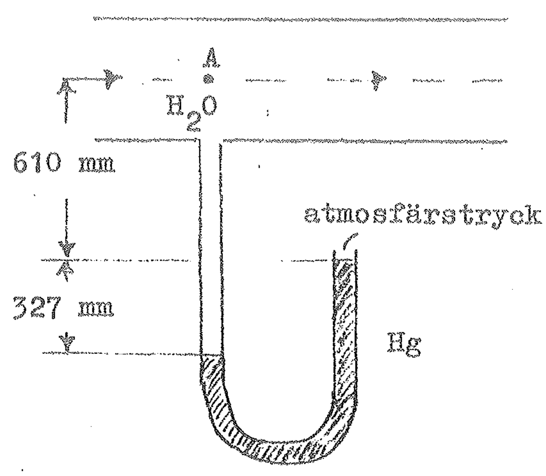
$$- 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}585 + 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}585$$

eller

$$p_A - p_B = 9{,}81 \cdot 0{,}585(13600 - 1000)$$

$$\underline{p_A - p_B = 72310 \text{ N/m}^2}$$

2. Vatten flyter genom ett rör enligt nedanstående figur. Bestäm det statiska övertrycket i punkten A i kp/cm^2. ρ_{Hg} = 13600 kg/m^3; ρ_{H_2O} = 1000 kg/m^3.



Lösning: Kallar vi det statiska trycket i punkten A för p_A så har vi om trycket räknas i kp/m^2

$$p = p_o + \rho h$$

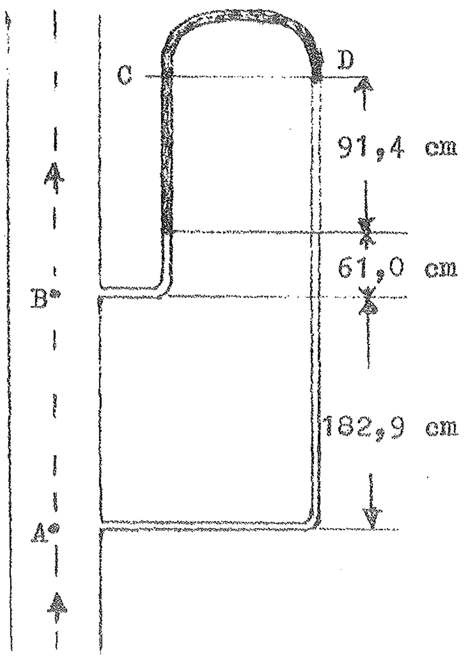
Då fås

$$p_A + \frac{1000(0{,}61 + 0{,}327)}{10000} =$$

$$= p_o + \frac{13600 \cdot 0{,}327}{10000} \text{ (i kp/cm}^2\text{)}$$

Statiska övertrycket: $p_A - p_o = \underline{0{,}351 \text{ kp/cm}^2}$

3. Nedanstående figur föreställer en vertikal del av en rörledning, där en vätska med tätheten 1500 kg/m^3 strömmar. Vätksan i manometern har tätheten 750 kg/m^3. Bestäm ur de angivna förutsättningarna skillnaden i statiskt tryck mellan punkterna A och B i N/m^2.



<u>Lösning</u>: Trycket vid C = trycket vid D.

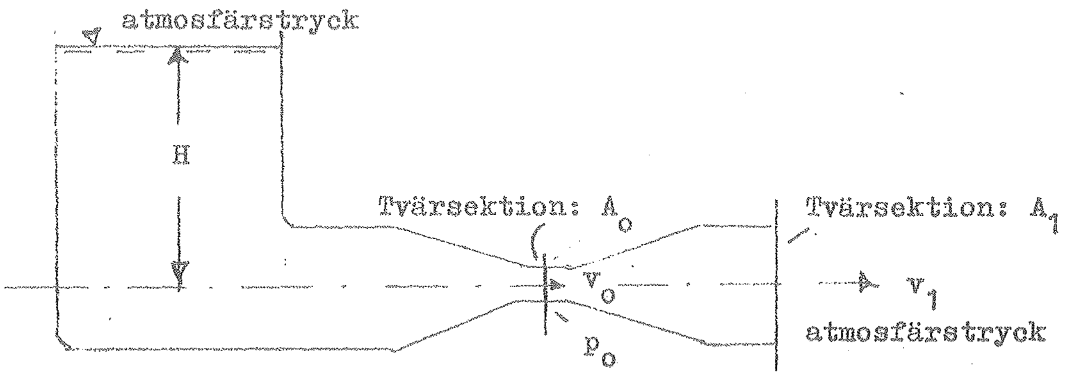
Då fås

$$p_B - 1500 \cdot 9,81 \cdot 0,61 -$$
$$- 750 \cdot 9,81 \cdot 0,914 =$$
$$= p_A - 1500 \cdot 9,81(1,829+0,61+0,914)$$

$$p_A - p_B = 1500 \cdot 9,81 \cdot 2,743 -$$
$$- 750 \cdot 9,81 \cdot 0,914$$

$$\underline{p_A - p_B} = 40363 - 6725 = \underline{33638\ N/m^2}$$

4. Visa att, om en vätska fritt får utströmma i luft enligt de på figuren angivna villkoren, så uppkommer ett undertryck vid A. Härled ett uttryck för dettas storlek.



<u>Lösning</u>: Enl. Bernoullis ekv. kan vi skriva

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\varrho g} = \frac{v_1^2}{2g} = H \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Ekv. (1) kan skrivas

$$p_o = \frac{\varrho}{2}(v_1^2 - v_o^2) \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$v_o \cdot A_o = v_1 \cdot A_1, \quad \text{där } A_1 > A_o$$

$$v_o = v_1 \frac{A_1}{A_o}$$

Insättning i ekv. (2) ger

$p_o = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2}\left[1 - (\frac{A_1}{A_o})^2\right]$; Parentesen $\left[1 - (\frac{A_1}{A_o})^2\right]$ blir negativ då

$(\frac{A_1}{A_o})^2 > 1$, varför p_o blir negativt, dvs. det blir undertryck vid A_o.

V.S.B.

Storleken på p_o fås ur ekv. (1)

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\rho g} = H; \quad \underline{p_o} = \underline{\rho g(H - \frac{v_o^2}{2g})}$$

Parentesen $(H \frac{v_o^2}{2g})$ blir negativ då $v_o > v_1$ och $H = \frac{v_1^2}{2g}$

5. I en kondensor råder 60 procent vacuum. Om vattnet skall lyftas 2,5 m med hur stor hastighet kommer det att inströmma i kondensorn? Barometerståndet 760 mm Hg. ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3; ρ_{Hg}: 13600 kg/m^3.

Lösning: För ett referensplan genom vattenytan kan vi skriva Bernoullis ekv.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + 3 \quad \text{-----------------} \quad (1)$$

Här är $v_1 = 0$; $g = 9,81$ m/sek^2; $p_1 - p_2 = 0,6 \cdot 780 = 468$ m Hg =

$= 0,468 \cdot 13600g = 6365$ N/m^2

Vi kan då skriva ekv. (1)

$$\frac{v_2^2}{19,62} = \frac{p_1 - p_2}{1000 \cdot 9,81} - 3 = \frac{6365 \cdot 9,81}{1000 \cdot 9,81} - 3$$

$$\frac{v_2^2}{19,62} = 3,365; \quad \underline{v_2} = \sqrt{3,365 \cdot 19,62} = 8,126 \approx \underline{8,1\ m/sek}$$

6. Vatten strömmar genom ett horisontellt rör. Vid A är diametern 200 mm vid B 100 mm. Skillnaden i statiskt tryck mellan A och B är 2 bar. Om ingen hänsyn behöver tas till eventuella strömningsförluster, beräkna vattenhastigheten vid B. ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3

Lösning: Bernoullis ekv. ger

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} \quad \text{-----------------------} \quad (1)$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$q = v_A \cdot \pi \cdot 0,1^2 = v_B \cdot \pi \cdot 0,05^2 \quad \text{-------------} \quad (2)$$

Dessutom har vi att

$$p_A - p_B = 20\ 000\ N$$

Ur ekv. (2) fås

$$\underline{v_A} = \frac{0,0025}{0,01} v_B = \underline{0,25\ v_B}$$

Ekv. (1) ger då

$$\frac{p_A - p_B}{1000} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$$

eller

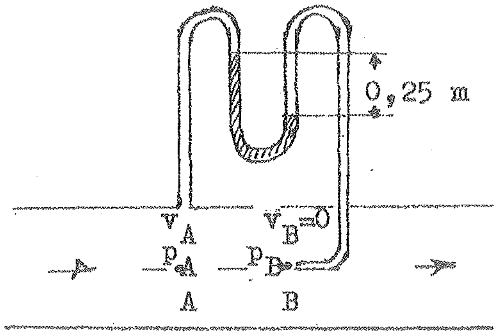
$$\frac{20000}{1000} = \frac{v_B^2 - 0,0625\ v_B^2}{2}$$

$$40 = 0,9375\ v_B^2$$

$$v_B^2 = 42,67$$

$$\underline{v_B} = 6,53 \approx \underline{6,5\ m/sek}$$

7. Ett Prandtls rör med koefficienten 0,98 används för att mäta vattenhastigheten i centrum av ett horisontellt rör. Skillnaden mellan stagnationstrycket och det statiska trycket uppmättes till 0,25 m aq. Bestäm vattenhastigheten. ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.



Lösning: Framför den öppna änden av mätröret (vid B) är vattenhastigheten = 0.

Vi använder Bernoullis ekvation för en ideell vätska och får enligt figurens beteckningar

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} = 0 + \frac{p_B}{\rho g}$$

eller

$$v_A = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}} \quad \text{-------------------} \quad (1)$$

Då vätskan ej är ideell inför vi för mätröret en koefficient C = 0,98. Den verkliga vattenhastigheten blir då

$$v_A = 0{,}98\sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}} \quad \text{----------------} \quad (2)$$

Här är $p_A - p_B = 0{,}25$ m aq $= 0{,}25 \cdot 1000 \cdot 9{,}81$ N

Då fås

$$v_A = 0{,}98\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 1000 \cdot 9{,}81}{1000}}$$

$$\underline{v_A} = 0{,}98\sqrt{4{,}905} = 0{,}98 \cdot 2{,}214 \approx \underline{2{,}2 \text{ m/sek}}$$

8. I en ledning framrinner per tidsenhet en vattenmängd bestämd av uttrycket

$$q = 100 - 5t \text{ l/min} \quad \text{-------------} \quad (1)$$

Hur stor vattenmängd passerar ledningen från tiden $t_1 = 5$ min t.o.m. $t_2 = 15$ min.

Lösning: I. Vi har att

$$dQ = q\ dt \quad \text{eller } Q = \int_{t_1}^{t_2} q\ dt = \int_{5}^{15} (100 - 5t)\ dt$$

$$Q = 100 \int_{5}^{15} dt - 5 \int_{5}^{15} t\ dt = 100 \Big]_{5}^{15} t - 5 \Big]_{5}^{15} \frac{t^2}{2}$$

$$\underline{Q} = 100(15 - 5) - 5\left(\frac{225 - 25}{2}\right) = 1000 - 500 = \underline{500\ l}$$

II. Ur ekv. (1) fås att vid $t_1 = 5$ är vattenmängden

$$q = 100 - 5 \cdot 5 = 75\ l/min$$

vid tiden $t_1 = 15$

$$q = 100 - 5 \cdot 15 = 25\ l/min$$

Då sambandet är lineärt har vi att det i medeltal framrinner

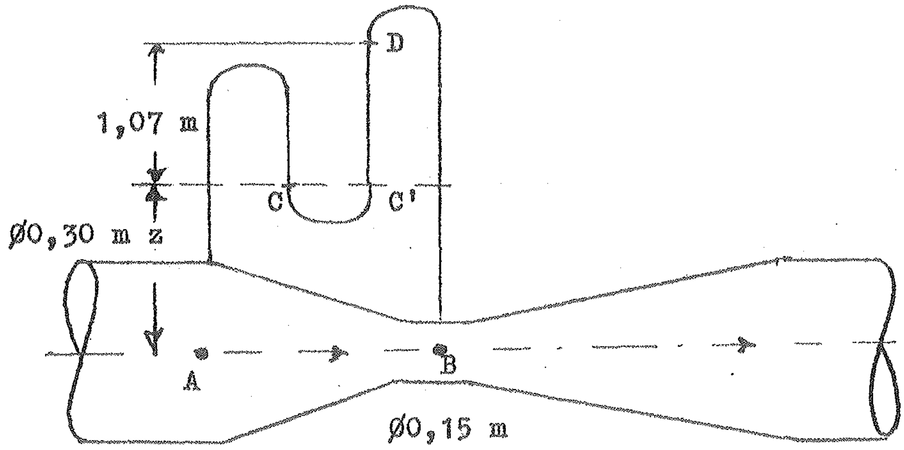
$$\frac{75 + 25}{2} = 50\ l/min$$

mellan $t_1 = 5$ och $t_2 = 15$ min.

På 10 min framrinner då

$$\underline{10 \cdot 50} = \underline{500\ l}$$

9. Vatten strömmar genom en horisontellt placerad 30x15 cm venturimeter enligt nedanstående figur. Skillnaden mellan vätskeytorna i manometern är 1,07 m och tätheten hos vätskan där är $\rho_m = 1250\ kg/m^3$. Om venturimätarens koefficient = 0,98 bestäm flödet i l/sek. ρ_{H_2O}: $1000\ kg/m^3$.



<u>Lösning</u>: Vi tillämpar Bernoullis ekv. och får

$$\frac{v_{0,3}^2}{2g} + \frac{p_A}{\varrho g} = \frac{v_{0,15}^2}{2g} + \frac{p_B}{\varrho g} \qquad (1)$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$v_{0,3} \cdot A_{0,3} = v_{0,15} \cdot A_{0,15} \qquad (2)$$

Ur ekv. (1) fås då

$$\frac{v_{0,15}^2 - v_{0,3}^2}{2} = \frac{p_A - p_B}{\varrho}$$

och ur ekv. (2)

$$v_{0,3} = v_{0,15} \cdot \frac{A_{0,15}}{A_{0,30}} \quad \text{varför}$$

$$\frac{v_{0,15}^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_{0,15}}{A_{0,30}}\right)^2\right] = \frac{p_A - p_B}{\varrho} \quad \text{och} \quad v_{0,15} = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\varrho\left[1 - \left(\frac{A_{0,15}}{A_{0,30}}\right)^2\right]}} \qquad (3$$

Den verkliga vattenhastigheten och därmed också det verkliga värdet på q fås genom att multiplicera idealvärdet med venturimätarens koefficient C eller

$$q = v_{0,15} \cdot A_{0,15} = A_{0,15}\, C \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\varrho\left[1 - \left(\frac{A_{0,15}}{A_{0,30}}\right)^2\right]}} \qquad (4)$$

För tryckskillnaden gäller $p_c = p_c'$ eller

$$p_A - 1000 \cdot 9{,}81\, z = p_B - 1000 \cdot 9{,}81(z + 1{,}07) + 1250 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}07$$

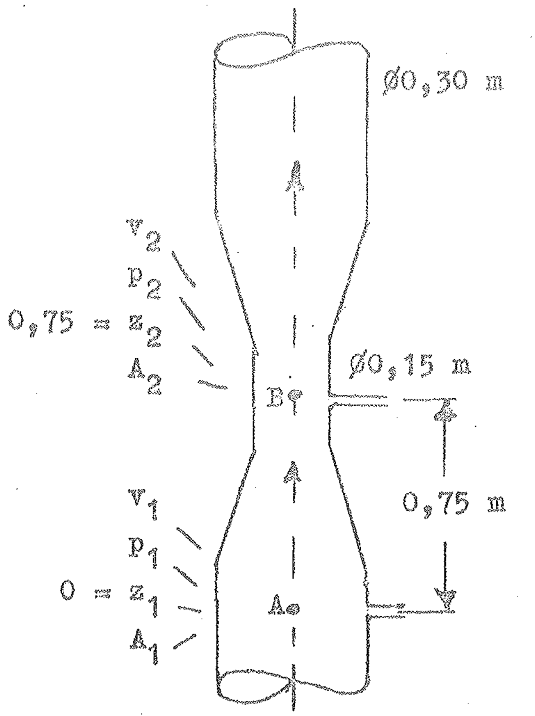
$$p_A - p_B = -1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}07 + 1250 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}07 = 250 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}07$$

Insättning i ekv. (4) ger

$$q = \pi \cdot \frac{0{,}15^2}{4} \cdot 0{,}98 \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}07}{1000\left[1 - \left(\frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{\pi \cdot 0{,}30^2}\right)^2\right]}} = \pi \frac{0{,}15^2}{4} \cdot 0{,}98 \sqrt{\frac{5{,}248}{0{,}9395}}$$

$$\underline{q} = 0{,}0177 \cdot 0{,}98 \cdot \sqrt{5{,}598} = 0{,}0173 \cdot 2{,}366 = 0{,}041\ \text{m}^3/\text{sek} \approx \underline{41\ \text{l/sek}}$$

10. Vatten flyter uppåt genom en vertikal 30x15 cm venturimeter enligt nedanstående figur. Skillnaden i hydrostatiskt tryck mellan punkterna A och B är uppmätt till 0,533 kp/cm^2. Om strömningen förutsättes förlustfri bestäm flödet q i l/sek.



Lösning: Bernoullis ekv. ger för ett plan genom A

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + 0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + 0{,}75$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + 0{,}75 \quad - - - - (1)$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2; \quad v_1 = v_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

$$\underline{v_1} = v_2 \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{\pi \cdot 0{,}15^2} = \underline{v_2\, 0{,}25}$$

Insättning i ekv. (1) ger efter överförande av 0,533 kp till N/m^2 dvs. $5330 \cdot 9{,}81$ N/m^2

$$\frac{5330 \cdot 9{,}81}{1000 \cdot 9{,}81} = \frac{v_2^2\,(1 - 0{,}25^2)}{2 \cdot 9{,}81} + 0{,}75$$

$$5,33 = 0,04778\, v_2^2 + 0,75$$

$$v_2^2 = 95,856; \quad \underline{v_2} = \underline{9,79}$$

$$q = v_2\, A_2 = 9,79 \cdot 3,1416 \cdot 0,075^2 = \underline{0,173\ m^3/sek}$$

LAMINÄR OCH TURBULENT STRÖMNING I RÖR

Re_{krit}

1. Beräkna nedre kritiska hastigheten för en ledning med 100 mm inre diameter, som leder vatten av temperaturen 10°C. Re_{krit}: 2300 och kinematiska viskositeten ν vid temperaturen 10°C: 0,0131 cm^2/sek.

Lösning: Vi har att

$$\frac{v_c \cdot l}{\nu} = Re_{krit}$$

eller

$$\frac{v_c \cdot 10}{0{,}0131} = 2300$$

$$\underline{v_c} = 3{,}01 \approx \underline{3 \text{ cm/sek}}$$

2. Vilken dimension bör en ledning för brännolja ha för att med bibehållen laminär strömning i ledningen kunna ge 180 l/min vid temperaturen 5°C. Re_{krit} : 2300 och ν_{olja} vid temperaturen 5°C: 0,0608 cm^2/sek.

Lösning: Vi har att

$$Q = qt = vAt$$

eller

$$180\ 000 = v \cdot 3{,}1416 \cdot \frac{d^2}{4} \cdot 60$$

$$v = \frac{3820}{d^2}$$

Dessutom kan vi skriva

$$\frac{vd}{\nu} = 2300 \text{ eller}$$

$$\frac{3820 \cdot d}{d^2 \cdot 0{,}0608} = 2300; \quad 139{,}8d = 3820; \quad d = 27{,}3 \text{ cm}$$

Dimensionen bör vara <u>300 mm</u>

3. Bestäm strömningstypen i en ledning med inre diametern 300 mm om där strömmar a) vatten med temperaturen 15°C och hastigheten 1,1 m/sek b) tjockolja med samma temperatur och med samma hastighet. Kinematiska viskositeten ν är vid 15°C för vatten 0,0114 cm^2/sek, för tjockolja 2,053 cm^2/sek.

Lösning: Vi får

för a)

$$\frac{110 \cdot 30}{0{,}0114} \approx 28900 > 2300 \quad \text{strömningen är turbulent}$$

b)

$$\frac{110 \cdot 30}{2{,}053} \approx 1600 < 2300 \quad \text{strömningen är laminär}$$

4. Vatten med en temperatur av 15°C strömmar över en bred asfalterad bana. Vid vilken hastighet inträder turbulens om vattendjupet i genomsnitt är 2 cm. Re_{krit}: 580 och ν vid temperaturen 15°C 0,0114 cm^2/sek.

Lösning: Vi har relationen

$$\frac{v_c \cdot 4R_h}{\nu} = Re_{krit}$$

eller

$$\frac{v_c \cdot 4R_h}{0{,}0114} = 580 \qquad \text{-------------------} (1)$$

För R_h kan vi uppställa följande relation om bredden sättes till b m = 100 b cm

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{100b \cdot 2}{100b + 4} = \frac{2}{1 + \frac{4}{100b}} \qquad \text{-------------------} (2)$$

Av ekv. (2) framgår att då bredden är stor i förhållande till vattendjupet kan kvoten $\frac{4}{100b}$ försummas och vi får

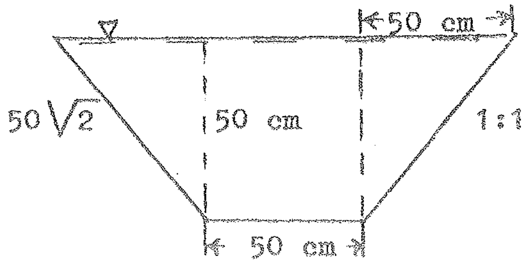
$$\underline{R_h} \approx \underline{2 \text{ cm}}$$

Insättning i ekv. (1) ger då

$$\frac{v_c \cdot 8}{0{,}0114} = 580$$

$$\underline{v_c} = 0{,}83 \text{ cm/s}$$

5. Bestäm den högsta vattenhastighet vid vilken strömningen fortfarande är laminär i ett dike med släntlutningen 1:1 om vattendjupet är 50 cm och bottenbredden 50 cm. Re_{krit}: 580 och $\nu = 0{,}0114$ cm^2/sek.



<u>Lösning</u>: Vi kan skriva

$$\frac{v_c \; 4R_h}{0{,}0114} = 580 \quad - - - - - (1)$$

och

$$\underline{R_h} = \frac{A}{P} = \frac{50(150 + 50)}{2(50 + 2 \cdot 50\sqrt{2})} = \frac{100}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{100}{3{,}828} = \underline{26{,}1 \text{ cm}}$$

Ekv. (1) ger då

$$\frac{v_c \cdot 104{,}4}{0{,}0114} = 580; \quad v_c = \frac{6{,}612}{104{,}4} = \underline{0{,}06 \text{ cm/sek}}$$

Anm.: Turbulens inträder tydligen vid mycket låg hastighet

STRÖMNING I RÖR VID KONSTANT TRYCKHÖJD

1. I en horisontell rörledning med 300 mm diameter har vattnet en hastighet av 1,5 m/sek. På en sträcka av ledningen av 100 m uppmäts ett tryckfall av 1,2 m aq. Beräkna friktionskoefficienten λ och motståndstalet ψ.

Lösning: Allmänna friktionsformeln ger

$$1,2 = \lambda \cdot \frac{100}{0,3} \cdot \frac{1,5^2}{2 \cdot 9,81} = \lambda \cdot \frac{100 \cdot 2,25}{0,3 \cdot 19,62}$$

$$\lambda = \frac{0.36 \cdot 19.62}{225} = \frac{7.063}{225} = 0.0314.$$

$$\psi = \frac{\lambda}{4} = \frac{0.0314}{4} = 0.0079.$$

2. Vid en experimentell bestämning av rörfriktionskoefficienten λ utnyttjades en 150 m lång ledning från en vattencistern. Rörledningens inre diameter var 100 mm och rörledningens mynning låg konstant 4 m under vattenytan i cisternen. Den framströmmande vattenmängden uppmättes till 10,2 l/sek. Bestäm λ.

Lösning: Kontinuitetsvillkoret ger

$$q = vA = 0,0102 = v \cdot 3,1416 \cdot 0,05^2$$

dvs.

$$0,007854v = 0,0102$$

eller

$$\underline{v = 1,30 \text{ m/sek}}$$

Vi kan då skriva

$$H - \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

eller

$$4 - \lambda \cdot \frac{150}{0,1} \cdot \frac{1,3^2}{2 \cdot 9,81} = \frac{1,3^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$4 - 1500 \cdot 0,0861 \cdot \lambda = 0,0861$$

$$129,2 \cdot \lambda = 3,914; \qquad \underline{\lambda = 0,030}$$

3: En vattenledning med 200 mm diameter har fallet 20:1000. Bestäm skillnaden i statiskt tryck i kp/cm^2 mellan två punkter i ledningen a) då vattnet strömmar utför b) då det strömmar uppför. Vattnets hastighet är i båda fallen 1,5 m/sek och $\lambda = 0{,}030$.

Lösning:

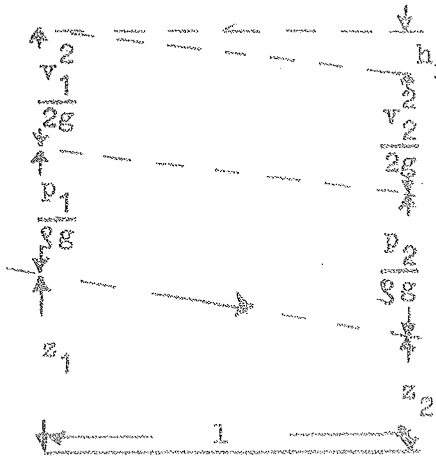


Fig. 1

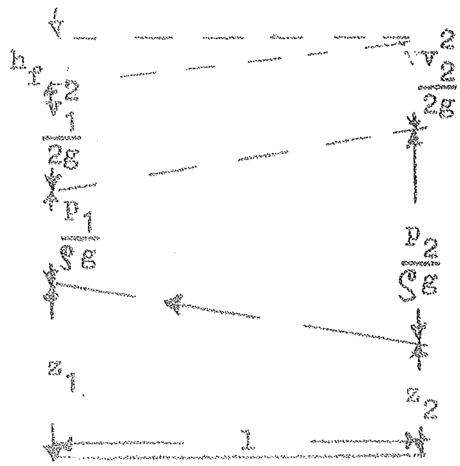


Fig. 2

Med hjälp av fig. 1 kan vi uppställa följande relationer för fall a)

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varrho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varrho g} + z_2 + h_f \qquad \text{-------------} \quad (1)$$

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}030 \cdot \frac{l}{0{,}2} \cdot \frac{1{,}5^2}{2g} \qquad \text{-------------} \quad (2)$$

För likformig strömning gäller $v_1 = v_2 = v$ och ekv. (1) får formen

$$p_1 - p_2 = \varrho g(z_2 - z_1) + \varrho g h_f$$

Här är $z_1 - z_2 = 0{,}02l$ och vi får

$$p_1 - p_2 = -1000g \cdot 0{,}02l + 1000g - 0{,}03 \cdot \frac{l}{0{,}2} \cdot \frac{2{,}25}{19{,}62}$$

$$p_1 - p_2 = -20gl + 17{,}2gl = -2{,}8gl \ \mathrm{N/m^2}$$

$\underline{p_1 - p_2} = \underline{-0{,}00028 \ \mathrm{kp/cm^2}}$ per sträckmeter av ledningen

För fall b) får vi ur fig. 2

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varrho g} + z_1 + h_f = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varrho g} + z_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$p_1 - p_2 = \varrho g(z_2 - z_1) - \varrho g h_f$$

Här är $z_2 - z_1 = -0{,}02l$ varför

$$p_1 - p_2 = -1000g \cdot 0{,}2 \cdot l - 1000g \cdot 0{,}3 \cdot \frac{l}{0{,}2} \cdot \frac{2{,}25}{19{,}62}$$

$$p_1 - p_2 = -20gl - 17{,}2gl = -37{,}2gl \text{ kp/m}^2$$

$\underline{p_1 - p_2} = \underline{-0{,}00372 \text{ kp/cm}^2}$ per sträckmeter av ledningen

4. En 150 m lång brandslang med inre diametern 80 mm är ansluten till en högt belägen vattencistern. Vid en diameter på slangens munstycke av 30 mm uppgår strålens stighöjd till 20 m. Hur stor blir stighöjden om munstyckets diameter ändras till 40 mm? Hänsyn tas endast till strömningsförluster i slangen. $\lambda = 0{,}03$.

Lösning: För den tillgängliga tryckhöjden kan vi skriva

$$H - 0{,}03 \cdot \frac{150}{0{,}08} \cdot \frac{v_1^2}{19{,}62} = \frac{v_2^2}{19{,}62} = 20 \quad \text{------------} \quad (1)$$

Ur ekv. (1) fås: $\underline{v_2^2} = \underline{392{,}4}$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$q_1 = v_1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}08^2}{4} = v_2 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}03^2}{4} \; ; \quad \underline{v_1} = \frac{9}{64} v_2 \; ; \quad \underline{v_1^2} = \underline{\frac{81}{4096} v_2^2}$$

Vi kan då skriva ekv. (1)

$$H - 56{,}25 \cdot \frac{81}{4096} \cdot \frac{v_2^2}{19{,}62} = \frac{v_2^2}{19{,}62} \; ; \quad H - 1{,}112 \frac{v_2^2}{19{,}62} = \frac{v_2^2}{19{,}62}$$

$$\underline{H} = \frac{2{,}112}{19{,}62} v_2^2 = \frac{2{,}112 \cdot 392{,}4}{19{,}62} = \frac{828{,}7}{19{,}62} = \underline{42{,}24 \text{ m}}$$

Efter ändringen av munstyckets diameter gäller då

$$42,24 - 56,25 \cdot \frac{v_3^2}{19,62} = \frac{v_4^2}{19,62} \quad \text{-----------------} \quad (2)$$

$$q_2 = v_3 \cdot \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4} = v_4 \cdot \frac{\pi \cdot 0,04^2}{4} \; ; \quad v_3 = \frac{16}{64} v_4 = 0,25 v_4 ;$$

$$\underline{v_3^2} = \underline{0,0625 v_4^2}$$

Ekv. (2) blir då

$$42,24 - \frac{56,25 \cdot 0,0625 \cdot v_4^2}{19,62} = \frac{v_4^2}{19,62} \; ; \quad 42,24 = \frac{3,516 v_4^2 + v_4^2}{19,62} =$$

$$= \frac{4,516 v_4^2}{19,62}$$

$$\frac{v_4^2}{19,62} = \underline{\text{stighöjden}} = \frac{42,24}{4,516} = \underline{9,35 \text{ m}}$$

5. Vatten ledes från en hydroforanläggnings tryckklocka, där övertrycket är 2 kp/cm^2, genom en 36 m lång 1" rörledning ($\lambda = 0,035$) med 6 rörkrökar ($k_k = 1$) till ett tappställe beläget 8 m över vattennivån i tryckklockan. Ledningen avslutas med en 1/2" kran ($k_v = 5$). Om övriga motstånd i ledningen (inströmningsmotstånd m.m.) kan uppskattas till 8 m rak ledning, bestäm erhållna vattenmängden.

<u>Lösning:</u> Vi kan uppställa följande samband då 2 kp/cm^2 = 20 m aq

$$20 - 8 - \frac{v_1^2}{2 \cdot 9,81}(1 + 0.035 \; \frac{36}{0.025} + 6.0 + 5 + 8) = \frac{v_2^2}{2 \cdot 9,81} \quad \text{---} \quad (1)$$

$$q = v_1 \; \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} = v_2 \; \frac{\pi \cdot 0,0125^2}{4} \quad \text{-----------------} \quad (2)$$

Ekv. (2) ger $v_1 = \frac{1}{4} v_2$ och insättning i ekv. (1)

$$12 - \frac{v_1^2}{19,62} \; (50,4 + 20) = \frac{v_2^2}{19,62}$$

$$12 = \frac{v_2^2 \cdot 70,4}{16 \cdot 19,62} + \frac{v_2^2}{19,62} = \frac{v_2^2}{19,62}\,(4,4 + 1) = \frac{v_2^2 \cdot 5,4}{19,62}$$

$$v_2^2 = \frac{19,62 \cdot 12}{5,4} = \frac{235,4}{5,4} = 43,59$$

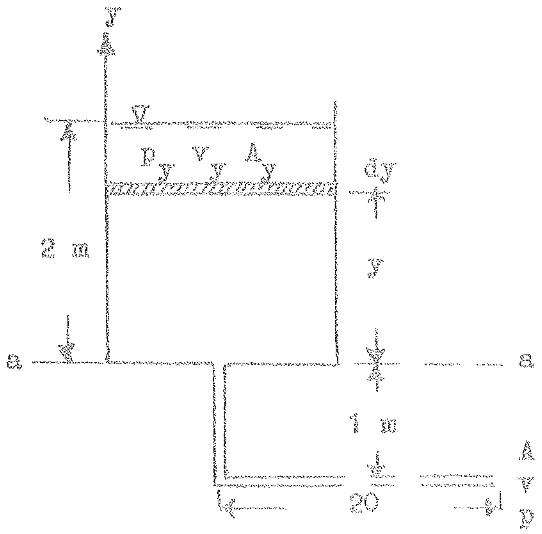
$$v_2 = \sqrt{43,59} = \underline{6,60 \ m/sek}$$

$$q = 6,60 \cdot 3,1416 \cdot \frac{0,0125^2}{4} = 20,73 \cdot 0,00003908 = \underline{0,00081}$$

$$\underline{q} = 0,00081 \ m^3)sek \simeq \underline{0,8 \ l/sek}$$

STRÖMNING I RÖR VID VARIABEL TRYCKHÖJD

1. I en öppen cylindrisk behållare med 1 m diameter står vattnet från början 2 m högt. Vattnet avtappas genom en 50 mm rörledning, som från botten först går 1 m vertikalt nedåt, därefter avböjes genom en 90° rörkrök och fortsätter horisontellt 20 m. Hur lång tid tar det att tömma behållaren, om λ = 0,03, rörkrökens motstånd 1 m och motståndet vid inträdet i röret 0,5 m rak rörledning?



Lösning: Bernoullis ekv. ger för ett ref.plan geno a - - a

$$\frac{v_y^2}{2g} + \frac{p_y}{\varrho g} + y = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varrho g} - 1 + h_f$$

Då p_y = p = atm.tryck fås

$$\frac{v_y^2}{2g} + y = \frac{v^2}{2g} - 1 + h_f \quad - - - - (1)$$

För h_f har vi att $h_f = 0{,}03 \frac{1 + 20}{0{,}05} \frac{v^2}{2g} = \frac{12{,}6v^2}{2g}$ $\quad - - - - - (2)$

Kombination av ekv. (1) och ekv. (2) ger

$$\frac{v_y^2}{2g} + y = \frac{v^2}{2g} - 1 + \frac{12{,}6v^2}{2g}; \quad y + 1 = \frac{13{,}6v^2}{2g} - \frac{v_y^2}{2g} \quad - - - - - (3)$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$v_y \cdot A_y = vA; \quad v_y = v\frac{A}{A_y}$$

Insättning i ekv. (3) ger

$$y + 1 = \frac{13{,}6v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\left(\frac{A}{A_y}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}\left[13{,}6 - \left(\frac{A}{A_y}\right)^2\right]$$

Termen $\left(\frac{A}{A_y}\right)^2$ kan försummas då A är liten i förhållande till A_y. Då fås

$$y + 1 = \frac{13{,}6v^2}{2g}; \quad 13{,}6v^2 = 2g(y + 1); \quad v = \sqrt{\frac{2g(y + 1)}{13{,}6}} \quad - - (4)$$

På tiden dt sjunker vattenytan från y till y - dy varvid mängden $dQ = - A_y\, dy$ utströmmar. Denna mängd kan också tecknas

$$dQ = q\, dt = vA\, dt = - A_y\, dy \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - - (5)}$$

Insättning av ekv. (4) i ekv. (5) ger då

$$\sqrt{\frac{2g(y+1)}{13,6}}\, A\, dt = - A_y\, dy \quad \text{eller}$$

$$dt = - \frac{A_y}{A} \sqrt{\frac{13,6}{2g(y+1)}}\, dy = - \frac{A_y \sqrt{13,6}}{A\sqrt{19,62}} \sqrt{\frac{1}{y+1}}\, dy$$

Vi integrerar mellan gränserna 2 till 0 och får efter omkastning av dessa

$$t = \frac{A_y\sqrt{13,6}}{A\sqrt{19,62}} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{y+1}}\, dy \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - (6)}$$

Vi sätter $\sqrt{y+1} = z$ och får $y + 1 = z^2$
$dy = 2z\, dz$

Ekv. (6) ger då

$$t = \frac{A_y\sqrt{13,6}}{A\sqrt{19,62}} \int \frac{1}{z}\, 2z\, dz = \frac{2A_y\sqrt{13,6}}{A\sqrt{19,62}} \int dz = \frac{2A_y\sqrt{13,6}}{A\sqrt{19,62}} \Big[\, z$$

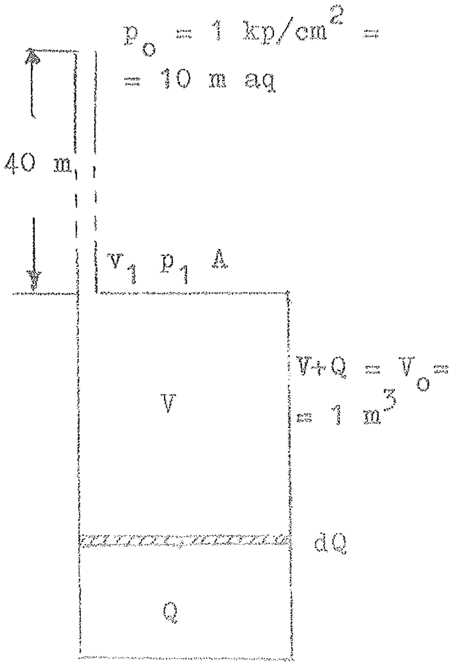
$$t = \frac{2A_y\sqrt{13,6}}{A\sqrt{19,62}} \Big[_0^2 \sqrt{y+1} = \frac{2A_y\sqrt{13,6}(\sqrt{3} + \sqrt{1})}{A\sqrt{19,62}} =$$

$$= \frac{2A_y\sqrt{13,6}(\sqrt{3} + 1)}{A\sqrt{19,62}}$$

$A_y = \pi \cdot 0,5^2;\quad A = \pi \cdot 0,025^2$

$$\underline{t} = \frac{2\cdot\pi\cdot 0,25 \cdot 3,688 \cdot 2,732}{0,000625 \cdot 4,429} = \frac{40449984}{22145} = 1827 \text{ sek} = \underline{30 \text{ min } 27 \text{ sek}}$$

2. En hydrofor med en volym av 1 m^3 förses med vatten från ett vattentorn genom en 100 m lång 50 mm rörledning ($\lambda = 0{,}024$) med 4 krökar ($k_r = 0{,}25$). Nivåskillnaden mellan vattenytan i tornet och rörmynningen i hydroforen kan sättas konstant lika med 40 m aq. Om barometerståndet är 1 at och luften i den vattentomma hydroforen har ett absolut tryck av 2 kp/cm^2 hur lång tid åtgår då att fylla hydroforen till hälften?



<u>Lösning</u>: Med hjälp av vidstående figur kan vi uppställa följande relationer

$$dQ = vA\,dt \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

$$20 \cdot 1 = pV \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

$$10 + 40 - p = \frac{v^2}{2g}(1 + \Sigma k) \quad \text{- - -} \quad (3)$$

Ur ekv. (2) fås: $p = \frac{20}{V}$ - - - - (4)

Ekv. (3) ger

$$50 - p = \frac{v^2}{19{,}62}(1 + 0{,}024\frac{100}{0{,}050} + 4 \cdot 0{,}25)$$

$$50 - p = \frac{v^2}{19{,}62}\,;$$

Insättning av uttrycket p i ekv. (4) medför

$$50 - \frac{20}{V} = 50\,\frac{v^2}{19{,}62}\,; \qquad 5 - \frac{2}{V} = 5\,\frac{v^2}{19{,}62}$$

$$5v^2 = 19{,}62(5 - \frac{2}{V})\,; \qquad v = \sqrt{3{,}294}\cdot\sqrt{5 - \frac{2}{V}}$$

$$v = 1{,}981\sqrt{5 - \frac{2}{V}} \quad \text{- -} \quad (5)$$

Ur ekv. (1) fås

$$dt = \frac{1}{v\,A}\,dQ \quad \text{där } A = 3{,}1416 \cdot 0{,}025^2 = \underline{\underline{0{,}001964\ m^2}}$$

Vi har också att

$$Q = 1 - V \quad \text{dvs.} \quad dQ = -\,dV$$

Övergång från inströmmande vattenmängd till kvarvarande luftvolym ger då

$$t = -\frac{1}{0{,}001964 \cdot 1{,}981} \int_{1{,}0}^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{5 - \frac{2}{V}}}\, dV = -257 \int_{1{,}0}^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{5 - \frac{2}{V}}}\, dV$$

Omkastning av integrationsgränserna ger

$$t = 257 \int_{0{,}5}^{1{,}0} \frac{1}{\sqrt{5 - \frac{2}{V}}}\, dV \quad - - - - - - - - - - - - - - (6)$$

Lösning av $\int \frac{1}{\sqrt{5 - \frac{2}{V}}}\, dV$

Vi sätter $\sqrt{5 - \frac{2}{V}} = y$ och kvadrerar

$$5 - \frac{2}{V} = y^2 \quad - (7)$$

Vi differentierar ekv. (7) och får

$$5 - 2V^{-1} = y^2 \; ; \quad 2V^{-2}\, dV = 2y\, dy$$

$$\underline{dV = yV^2\, dy}$$

Ekv. (7) ger också ett uttryck på V dvs.

$$5V - 2 = y^2 V \; ; \quad V(5 - y^2) = 2$$

$$\underline{V = \frac{2}{5 - y^2}}$$

Insättning i ekv. (6) ger

$$t = 257 \int \frac{1}{y}\, y \frac{4}{(5 - y^2)^2}\, dy = 1028 \int \frac{1}{(5 - y^2)^2}\, dy \quad - - - - - (8)$$

<u>Uppdelning</u> av $\int \frac{1}{(5 - y^2)^2}\, dy$ <u>i fraktioner</u>

$$\frac{1}{(5-y^2)^2} = \frac{1}{(5-y^2)(5-y^2)} = \frac{1}{(\sqrt{5}-y)(\sqrt{5}+y)(\sqrt{5}-y)(\sqrt{5}+y)}$$

$$\frac{1}{(5-y^2)^2} \equiv \frac{A}{\sqrt{5}-y} + \frac{B}{(\sqrt{5}-y)^2} + \frac{C}{(\sqrt{5}+y)} + \frac{D}{(\sqrt{5}+y)^2} \equiv$$

$$\frac{A(\sqrt{5}-y)(\sqrt{5}+y)^2 + B(\sqrt{5}+y)^2 + C(\sqrt{5}+y)(\sqrt{5}-y)^2 + D(\sqrt{5}-y)^2}{(5-y^2)^2} \equiv$$

$$\frac{5\sqrt{5}A + \sqrt{5}Ay^2 + 10Ay - 5Ay - Ay^3 - 2\sqrt{5}Ay^2 + 5B + By^2 + 2\sqrt{5}By +}{(5-y^2)^2}$$

$$\frac{5\sqrt{5}C + \sqrt{5}Cy^2 - 10Cy + 5Cy + Cy^3 - 2\sqrt{5}Cy^2 + 5D + Dy^2 - 2\sqrt{5}Dy}{(5-y^2)^2}$$

Vi får att

$-A + C = 0$ $\quad\quad$ $\underline{C = A}$

$-\sqrt{5}\,A + B - \sqrt{5}\,C + D = 0$ $\quad\quad$ $-\sqrt{5}A + B - \sqrt{5}A + B = 0;\ \underline{B = \sqrt{5}A}$

$5A + 2\sqrt{5}\,B - 5C - 2\sqrt{5}\,D = 0$ $\quad\quad$ $5A + 2\sqrt{5}B - 5A - 2\sqrt{5}D = 0;\ \underline{B = D}$

$5\sqrt{5}A + 5B + 5\sqrt{5}C + 5D = 1$

$5\sqrt{5}A + 5\sqrt{5}A + 5\sqrt{5}A + 5\sqrt{5}A = 1;\quad 20\sqrt{5}A = 1$

$$A = C = \underline{\frac{1}{20\sqrt{5}}};\quad B = D = \underline{\frac{1}{20}}$$

Vi har då att

$$\int \frac{1}{(5-y^2)^2}\,dy = \frac{1}{20\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{5}-y}\,dy + \frac{1}{20} \int \frac{1}{(\sqrt{5}-y)^2}\,dy +$$

$$+ \frac{1}{20\sqrt{5}} \int \frac{1}{(\sqrt{5}+y)}\,dy + \frac{1}{20} \int \frac{1}{(\sqrt{5}+y)^2}\,dy \quad - - - - - - - - - - \quad (9)$$

$\int \frac{1}{\sqrt{5}-y}\,dy$ kan direkt skrivas till: $-\Big[\ \ln(\sqrt{5}-y)$ $\quad - - - \quad (10)$

I $\int \frac{1}{(\sqrt{5} - y)^2}\,dy$ sätter vi $\sqrt{5} - y = z$ och får $-dy = dz$

Insättning ger $\int \frac{1}{z^2} \cdot -dz = -\int z^{-2}dz$. Vid integration fås:

$$- \Big| \frac{z^{-1}}{-1} = \Big| \frac{1}{z} = \Big| \frac{1}{4 - y} \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \quad (11)$$

Analogt ger $\int \frac{1}{\sqrt{5} + y}\,dy : \Big| \ln(\sqrt{5} + y)$ - - - - - - - - - - (12)

och $\int \frac{1}{(\sqrt{5} + y^2)}\,dy : -\Big| \frac{1}{\sqrt{5} + y}$ - - - - - - - - - - - - (13)

Ekv. (9) kan nu skrivas med hjälp av ekv. (10) - (13)

$$\int \frac{1}{(5-y^2)^2}\,dy = -\frac{1}{20\sqrt{5}} \Big| \ln(\sqrt{5}-y) + \frac{1}{20} \Big| \frac{1}{4 - y} +$$

$$+ \frac{1}{20\sqrt{5}} \Big| \ln(\sqrt{5}+y) - \frac{1}{20} \Big| \frac{1}{\sqrt{5}+y}$$

Vi hyfsar och får

$$\frac{1}{20\sqrt{5}} \Big| \ln \frac{\sqrt{5}+y}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{20} \Big| \frac{1}{\sqrt{5}-y} - \frac{1}{\sqrt{5}+y} =$$

$$= \frac{1}{20\sqrt{5}} \Big| \ln \frac{\sqrt{5}+y}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{20} \Big| \frac{2y}{5 - y^2}$$

Insättning ger

$$\frac{1}{20\sqrt{5}} \Big|_{0,5}^{1,0} \ln \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \frac{2}{V}}}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{2}{V}}} + \frac{1}{20} \Big|_{0,5}^{1,0} \frac{2\sqrt{5 - \frac{2}{V}}}{5 - 5 + \frac{2}{V}} =$$

$$= \frac{1}{20\sqrt{5}} \Big|_{0,5}^{1,0} \ln \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - \frac{2}{V}}}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - \frac{2}{V}}} + \frac{1}{20} \Big|_{0,5}^{1,0} V\sqrt{5 - \frac{2}{V}}$$

$$\frac{1}{20\sqrt{5}}\left(\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) + \frac{1}{20}\left(\sqrt{3}-0{,}5\right)$$

$$\frac{1}{20\sqrt{5}}\ln\frac{3{,}968\cdot 1{,}236}{0{,}504\cdot 3{,}236} + \frac{1{,}232}{20} = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 3{,}007 + 1{,}232)\right] =$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{1{,}049}{2{,}236} + 1{,}232\right) = \frac{1}{20}\left(0{,}4915 + 1{,}232\right) = \frac{1}{20}\cdot 1{,}724 = \underline{\underline{0{,}0862}}$$

Insättning av värdet 0,0862 i ekv. (8) ger till slut

$$t = 1028\cdot 0{,}0862 = 88{,}6 \approx 90 \text{ sek}$$

$$\underline{\underline{t \approx 1 \text{ min } 30 \text{ sek}}}$$

VATTENUPPFORDRING

EFFEKTBEHOV

1. Pumparna till ett vattenverk skall förse en simbassäng med 75 l vatten per sek. Vattnet skall lyftas 30 m genom en 1.2 km lång 300 mm rörledning ($\lambda = 0.024$) med 6 krökar ($k_r = 0,5$). Beräkna effektbehovet då pumparnas verkningsgrad är 75 % och motståndet vid inloppet försummas.

Lösning: Totala tryckhöjden fås ur ekvationen

$$H = \frac{v^2}{19,62}\left(1 + 0,024\,\frac{1200}{0,3} + 6 \cdot 0,5\right) + 30 \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Ett uttryck på v ger kontinuitetsvillkoret

$$q = vA \quad \text{eller} \quad 0,075 = v \cdot 3,1416 \cdot 0,15^2$$

$$\underline{v} = \frac{0,075}{0,07069} = \underline{1,06}$$

Ekv. (1) ger då

$$H = \frac{1,06^2}{19,62}(1 + 96 + 3) + 30 = \frac{1,124}{19,62} \cdot 100 + 30$$

$$\underline{H} = \underline{35,73}$$

Effektbehovet i hk blir då

$$P = \frac{1,36 \cdot \rho \cdot gqH}{1000 \cdot 0,75} = \frac{1,36 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,075 \cdot 35,73}{1000 \cdot 0,75} = \underline{47,7}$$

$$\underline{P \approx 50 \text{ hk}}$$

2. Ett vattenmagasin har en yta av 3 km^2. Vid en tappning under ett dygn sänktes vattenytan 4 cm. Då fallhöjden var 15 m, beräkna den effekt som teoretiskt kunde tas ut vid avtappningen.

Lösning: Vi har att

$$q = \frac{Q}{t} = \frac{3 \cdot 1000000 \cdot 0,04}{24 \cdot 3600} = \frac{1200}{864} \text{ m}^3/\text{sek}$$

Effekten blir då i hk

$$P = \frac{1,36 \cdot \rho \cdot gqH}{1000} \quad \text{dvs.}$$

$$p = \frac{1{,}36 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1200 \cdot 15}{1000 \cdot 864} = 20{,}4 \cdot 13{,}63 = 278 \text{ hk} \approx \underline{275 \text{ hk}}$$

3. En tryckpump med verkningsgraden 0,90 skall genom en 500 m ledning med 150 mm diameter (λ = 0,03) uppfordra vatten till en höjd av 36 m. Vattenhastigheten i ledningen beräknas bli 1,5 m/sek. Om ledningen har 4 krökar med k_r = 0,25 och motståndskoefficienten vid inloppet är 0,5 beräkna den erforderliga effekten.

Lösning: Vi har att

$$P = \frac{1{,}36 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot qH}{1000 \cdot 0{,}9} \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

Dessutom är $q = vA = 1{,}5 \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}075^2$;

$\underline{q} = 4{,}712 \cdot 0{,}005625 = \underline{0{,}0265 \text{ m}^3/\text{sek}}$

och

$$H = 36 + h_f = 36 + \frac{1{,}5^2}{19{,}62} \left(0{,}03 \frac{500}{0{,}15} + 4 \cdot 0{,}25 + 0{,}5\right)$$

$$\underline{H} = 36 + \frac{2{,}25 \cdot 101{,}5}{19{,}62} = 36 + \frac{228{,}4}{19{,}62} = 36 + 11{,}64 = \underline{47{,}64}$$

Ekv. (1) blir då

$$\underline{P} = 1{,}36 \cdot 10{,}9 \cdot 0{,}0265 \cdot 47{,}64 = 14{,}82 \cdot 1{,}262 = \underline{18{,}7}$$

$$\underline{P} \approx \underline{20 \text{ hk}}$$

4. En tätorts ledning från vattentäkt till vattentorn har en längd av 5000 m och en diameter av 300 mm. Vattenhastigheten är 1 m/sek och tryckhöjden 36 m. Beräkna ökningen i pumpeffekt för en stegring av vattenbehovet med 50 % om λ = 0,03.

Lösning: Vi har att

$$\underline{H_1} = 36 + 0{,}03 \cdot \frac{5000}{0{,}300} \cdot \frac{1}{19{,}62} = 36 + 25{,}48 = \underline{61{,}48}$$

$$\underline{q_1} = 1{,}0 \cdot \pi \cdot 0{,}15^2 = \underline{0{,}0225 \cdot \pi}$$

$$q_2 = 1,5 \cdot 0,0225 \cdot \pi = \underline{0,03375 \cdot \pi}$$

Då fås

$$q_2 = 0,03375 \cdot \pi = v_2 \cdot \pi \cdot 0,15^2; \quad \underline{v_2} = \underline{1,5}$$

och

$$\underline{H_2} = 36 + 0,03 \cdot \frac{5000}{0,300} \cdot \frac{1,5^2}{19,62} = 36 + 57,34 = \underline{93,34}$$

Vi har då att

$$\rho\, g \cdot 0,0225 \cdot \pi \cdot 61,48 + \frac{x \cdot \rho \cdot g \cdot 0,0225 \cdot \pi \cdot 61,48}{100} = \rho \cdot g \cdot 1,5 \cdot 0,0225 \cdot \pi \cdot 93,34$$

$$61,48 + 0,6148\, x = 1,5 \cdot 93,34 = 140,01$$

$$0,6148x = 78,53$$

$$\underline{x} = \frac{78,53}{0,6148} = \frac{785300}{6148} = 127,7 \approx \underline{130\ \%}$$

DYNAMISK LIKFORMIGHET
MODELLREGLER

1. Vatten vid 10°C (ν = 0,0131 cm^2/sek) strömmar med en hastighet av 7,5 m/sek i ett rör med 15 cm diameter. Med vilken hastighet skall vatten vid 25°C (ν = 0,0090 cm^2/sek) strömma i ett rör med 7,5 cm diameter för att dynamisk likformighet skall råda?

Lösning: Vi använder oss av Reynolds tal, då de verksamma krafterna är tröghets- och friktionskrafter

$$Re = \frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{v_2 d_2}{\nu_2}$$

v_1 = 750 cm/sek $\qquad v_2 = v_2$

d_1 = 15 cm $\qquad d_2$ = 7,5 cm

ν_1 = 0,0131 cm^2/sek $\qquad \nu_2$ = 0,0090 cm^2/sek

Då fås

$$\frac{750 \cdot 15}{0,0131} = \frac{v_2 \cdot 7,5}{0,0090}$$

$$\underline{v_2} = 1030,5 \text{ cm/sek} = \underline{10,3 \text{ m/sek}}$$

2. Vatten vid 20°C (ν = 0,0101 cm^2/sek) strömmar genom ett 10 cm rör med en hastighet av 10 m/sek. Vilken diameter skall ett annat rör ha om vatten vid 5°C (ν = 0,0152 cm^2)sek) tänkes strömma genom detta med en hastighet av 5 m/sek, för att dynamisk likformighet skall råda?

Lösning: Reynolds tal ger

$$\frac{v_1 d_1}{\nu_1} = \frac{v_2 d_2}{\nu_2}$$

v_1 = 1000 cm/sek $\qquad v_2$ = 500 cm/sek

d_1 = 10 cm $\qquad d_2 = d_2$

ν_1 = 0,0101 cm^2/sek $\qquad \nu_2$ = 0,0152 cm^2/sek

$$\frac{1000 \cdot 10}{0,0101} = \frac{500 d_2}{0,0152}$$

$$\underline{d_2} = \underline{30 \text{ cm}}$$

3. En centrifugalpump med varvtalet 1200 rp m skall pumpa brännolja med temperaturen 15°C ($\nu = 1,747\ cm^2/sek$). En modellpump provas i luft med temperaturen 20°C ($\nu = 0,1486\ cm^2/sek$). Om modellskalan är 1:3, med vilken hastighet skall modellen köras?

Lösning: Vi använder oss av den perifera hastigheten ωr. Då kan vi skriva

$$Re = \frac{\frac{d}{2}\cdot\omega_p\cdot d}{1,747} = \frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\omega_m\cdot\frac{d}{3}}{0,1486}$$

$$\omega_p = \frac{1,747}{9\cdot 0,1486}\cdot\omega_m = 1,306\cdot\omega_m$$

Modellhastigheten blir då $\frac{1200}{1,306} = 918,8 \approx \underline{920\ rpm}$

4. Man vill undersöka strömningsförhållandena i ett planerat dammutskov med hjälp av en modell i skalan 1:30. Högsta högvattenföringen är 40 m^3/sek i prototypen. Hur stor skall motsvarande vattenföring väljas i modellen?

Lösning: Strömningen sker med fri vattenyta och bestämmes i huvudsak av tröghets- och tyngdkrafter. Vattenföringen i modellen bör väljas med hjälp av Froudes modellregel.

Om längdskalan är 1: λ så är vattenföringsskalan 1: $\lambda^{\frac{5}{2}}$. Då är

$$\frac{q_m}{q_p} = \frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\ ; \quad q_m = \frac{40}{30^{\frac{5}{2}}} = \underline{0,008\ m^3/sek}$$

5. Bestäm förhållandet mellan flödena i modell och prototyp om uteslutande tyngd- och masskrafter är verksamma.

Lösning: Vi kan skriva

$$\frac{q_m}{q_p} = \frac{L_m^3}{T_m}\cdot\frac{T_p}{L_p^3} = \frac{L_m^3}{L_p^3}\cdot\frac{T_p}{T_m} \quad \text{-----------------} \quad (1)$$

För tyngdkraften fås enl. Newtons lag II

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m \cdot g_m}{M_p \cdot g_p} = \frac{\varrho_m \cdot V_m \cdot g_m}{\varrho_p \cdot V_p \cdot g_p} = \frac{\varrho_m \cdot L_m^3 \cdot g_m}{\varrho_p \cdot L_p^3 \cdot g_p} \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

För masskrafterna fås analogt

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m \cdot a_m}{M_p \cdot a_p} = \frac{\varrho_m \cdot L_m^3 \cdot L_m \cdot T_p^2}{\varrho_p \cdot L_p^3 \cdot T_m^2 \cdot L_p} = \frac{\varrho_m \cdot L_m^4 \cdot T_p^2}{\varrho_p \cdot L_p^4 \cdot T_m^2} \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (3)$$

Ur ekv. (2) och (3) fås

$$\frac{\varrho_m \cdot L_m^3 \cdot g_m}{\varrho_p \cdot L_p^3 \cdot g_p} = \frac{\varrho_m \cdot L_m^4 \cdot T_p^2}{\varrho_p \cdot L_p^4 \cdot T_m^2}$$

som ger

$$\frac{T_p^2}{T_m^2} = \frac{L_p}{L_m} \cdot \frac{g_m}{g_p} \, ; \quad \text{För } g_m = g_p \text{ fås} \quad \frac{T_p}{T_m} = \frac{L_p^{\frac{1}{2}}}{L_m^{\frac{1}{2}}}$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$\underline{\frac{q_m}{q_p}} = \frac{L_m^3}{L_p^3} \cdot \frac{L_p^{\frac{1}{2}}}{L_m^{\frac{1}{2}}} = \frac{L_m^{\frac{5}{2}}}{L_p^{\frac{5}{2}}} = \underline{\left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

DIMENSIONSANALYS

BUCKINGHAMS π - TEOREM

1. Bestäm genom dimensionsanalys det tryck p som en strömmande inkompressibel vätska utövar på ett i vätskan nersänkt föremål om man antar att trycket är en funktion av vätskans täthet ϱ och hastigheten v.

<u>Lösning</u>: Vi kan skriva

$$p = f(\varrho, v) \quad \text{------------------} \quad (1)$$

och

$$p = k \cdot \varrho^x \cdot v^y \quad \text{------------------} \quad (2)$$

<u>Variabler och dimensionsformler</u>

Variabel	Beteckning	Dimension
Täthet	ϱ	$M \cdot L^{-3}$
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$

Trycket p har dimensionen: $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

Då fås: $M^1 \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} = k(M^x \cdot L^{-3x})(L^y \cdot T^{-y})$

som ger ekvationssystemet

$$\begin{array}{lrl} M: & x & = 1 \\ L: & -3x + y & = -1 \\ T: & -y & = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}$$

Insättning i ekv. (2) ger

$$\underline{p = k \cdot \varrho \cdot v^2}$$

2. Uppställ en ekvation genom dimensionsanalys grundad på antagandet att effektåtgången P för en pump är en funktion av vätskans spec. tyngd ϱg, flödet q och tryckhöjden H.

<u>Lösning</u>: Vi har att

$$P = f(\varrho g, q, H) \quad \text{------------------} \quad (1)$$

eller

$$P = k \cdot \varrho^x \cdot g^x \cdot q^y \cdot H^z \quad \text{------------------} \quad (2)$$

Variabler och dimensionsformler

Variabel	Beteckning	Dimension
Effekt	P	$M \cdot L^{2} \cdot T^{-3}$
Spec. tyngd	ϱg	$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$
Flöde	q	$L^{3} \cdot T^{-1}$
Tryckhöjd	H	L

Vi kan då skriva

$$M^{1} \cdot L^{2} \cdot T^{-3} = k(M^{x} \cdot L^{-2x} \cdot T^{-2x})(L^{3y} \cdot T^{-y})(L^{z})$$

och får

$$\begin{array}{lll} M: & x = 1 & x = 1 \\ L: & -2x + 3y + z = 2 & y = 1 \\ T: & -2x - y = -3 & z = 1 \end{array}$$

$$\underline{P = k\ \varrho gqH}.$$

3. Reynolds tal är en funktion av tätheten ϱ, dynamiska viskositeten μ, hastigheten v och en karakteristisk längd l. Bestäm relationen genom Buckinghams π - teorem.

Lösning:

1. Det funktionella sambandet kan skrivas

$$f(Re, \varrho, \mu, v, l) = 0 \qquad (1)$$

2. Variabler och dimensionsformler

Variabel	Beteckning	Dimension
Tal	Re	Dimensionslöst
Täthet	ϱ	$M \cdot L^{-3}$
Dyn. visk.	μ	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$
Längd	l	L

3. Antalet dimensionslösa grupper (π - termer) blir 5 - 3 = 2. Vi får

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = 0 \qquad (2)$$

4. Vi väljer μ, v och l som genomgående primärgrupp och kombinerar i tur och ordning med Re, ϱ.

π - termerna uttrycks som produkter

$$\pi_1 = (\mu^{x_1})(v^{y_1})(l^{x_1}) \text{ Re}$$

$$\pi_2 = (u^{x_2})(v^{y_2})(l^{z_2})\varrho$$

5. Dimensionell homogenitet ger

$$\pi_1 = M^oL^oT^o = (M^{x_1}L^{-x_1}T^{-x_1})(L^{y_1}T^{-y_1})(L^{z_1})\ M^oL^oT^o$$

$$\pi_2 = M^oL^oT^o = (M^{x_2}L^{-x_2}T^{-x_2})(L^{y_2}T^{-y_2})(L^{z_2})\ M^1L^{-3})$$

6. Vi löser exponenterna och konstaterar att π_1 = Re

π_2

M:	$x_2 + 1 = 0$	$x_2 = -1$
L:	$-x_2 + y_2 + z_2 - 3 = 0$	$y_2 = 1$
T:	$-x_2 - y_2 = 0$	$z_2 = 1$

7. π-termerna är

$$\pi_1 = \text{Re}$$

$$\pi_2 = \mu^{-1}v^1l^1\varrho = \frac{\varrho vl}{\mu}$$

8. Sambandet blir

$$\Phi(\text{Re}, \frac{\varrho vl}{\mu}) = 0 \qquad (3)$$

Ekv. (3) kan skrivas

$$\text{Re} = \Phi_1(\frac{\varrho vl}{\mu}) \qquad (4)$$

Ersätts dynamiska viskositeten μ med kinematiska viskositeten ν fås då

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$$

$$\underline{\text{Re} = \Phi_1(\frac{vl}{\nu})}$$

4. För att karakterisera ett hydrauliskt förlopp hos en vätska med tätheten ϱ behövs det dels en längd l för att beskriva de geometriska egenskaperna dels t.ex. hastigheten v för att beskriva en rörelse. Man kan dessutom tänka sig att dynamiska viskositeten μ, specifika tyngden ϱg, ytspänningen σ och elasticiteten E också påverkar skeendet. Uppställ sambandet.

Lösning:

1. Det funktionella sambandet kan skrivas

$$f(\varrho,\ l,\ v,\ \mu,\ \varrho g,\ \sigma,\ E) = 0 \quad \text{-------------} \quad (1)$$

2. Variabler och dimensionsformler

Variabel	Beteckning	Dimension
Täthet	ϱ	$M \cdot L^{-3}$
Längd	l	L
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$
Dyn. visk.	μ	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
Spec. tyngd	ϱg	$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$
Ytspänning	σ	$M \cdot T^{-2}$
Elasticitet	E	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

3. Antalet dimensionslösa grupper (π - termer) blir 7 - 3 = 4 och vi kan skriva

$$\Phi(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4) = 0 \quad \text{-------------} \quad (2)$$

4. Vi väljer ϱ, l och v som genomgående primärgrupp och kombinerar i tur och ordning med μ, ϱg, σ och E.

π - termerna uttryckes som produkter

$$\pi_1 = (\varrho^{x_1})(l^{y_1})(v^{z_1})\mu$$

$$\pi_2 = (\varrho^{x_2})(l^{y_2})(v^{z_2})\varrho g$$

$$\pi_3 = (\varrho^{x_3})(l^{y_3})(v^{z_3})\sigma$$

$$\pi_4 = (\varrho^{x_4})(l^{y_4})(v^{z_4})E$$

5. Dimensionell homogenitet ger

$$\pi_1 = M^0L^0T^0 = (M^{x_1}L^{-3x_1})(L^{y_1})(L^{z_1}T^{-2z_1})(M^1L^{-1}T^{-1})$$

$$\pi_2 = M^0L^0T^0 = (M^{x_2}L^{-3x_2})(L^{y_2})(L^{z_2}T^{-2z_2})(M^1L^{-2}T^{-2})$$

$$\pi_3 = M^0L^0T^0 = (M^{x_3}L^{-3x_3})(L^{y_3})(L^{z_3}T^{-2z_3})(M^1T^{-2})$$

$$\pi_4 = M^0L^0T^0 = (M^{x_4}L^{-3x_4})(L^{y_4})(L^{z_4}T^{-2z_4})(M^1L^{-1}T^{-2})$$

6. Vi löser exponenterna

$\underline{\Pi_1}$

M: $x_1 + 1 = 0$	$x_1 = -1$
L: $-3x_1 + y_1 + z_1 - 1 = 0$	$y_1 = -1$
T: $-z_1 - 1 = 0$	$z_1 = -1$

$\underline{\Pi_2}$

M: $x_2 + 1 = 0$	$x_2 = -1$
L: $-3x_2 + y_2 + z_2 - 2 = 0$	$y_2 = 1$
T: $-z_2 - 2 = 0$	$z_2 = -2$

$\underline{\Pi_3}$

M: $x_3 + 1 = 0$	$x_3 = -1$
L: $-3x_3 + y_3 + z_3 = 0$	$y_3 = -1$
T: $-z_3 - 2 = 0$	$z_3 = -2$

$\underline{\Pi_4}$

M: $x_4 + 1 = 0$	$x_4 = -1$
L: $-3x_4 + y_4 + z_4 - 1 = 0$	$y_4 = 0$
T: $-z_4 - 2 = 0$	$z_4 = -2$

7. Π - termerna är

$$\Pi_1 = \varrho^{-1} l^{-1} v^{-1} \mu = \frac{\mu}{\varrho l v}$$

$$\Pi_2 = \varrho^{-1} l^{1} v^{-2} \varrho g = \frac{\varrho g l}{\varrho v^2} = \frac{g l}{v^2}$$

$$\Pi_3 = \varrho^{-1} l^{-1} v^{-2} \sigma = \frac{\sigma}{\varrho l v^2}$$

$$\Pi_4 = \varrho^{-1} l^{0} v^{-2} E = \frac{E}{\varrho v^2}$$

8. Sambandet kan nu enligt ekv. (2) skrivas

$$\Phi\left(\frac{\mu}{\varrho l v}, \frac{g l}{v^2}, \frac{\sigma}{\varrho l v^2}, \frac{E}{\varrho v^2}\right) = 0$$

Antar vi att förutom ϱ, l och v enbart μ dvs. friktionen påverkar förloppet karakteriseras skeendet av det dimensionslös uttrycket $\Pi_1 = \frac{\mu}{\varrho l v}$. Eftersom kinematiska viskositeten $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ kan Π_1 skrivas $\frac{\nu}{lv}$, som är inverterade värdet av Reynolds tal

$$Re = \frac{lv}{\nu}$$

Antar vi att förutom ϱ, l och v endast ϱg dvs. tyngdkraften är verksam karakteriseras förloppet av det dimensionslösa uttrycket $\Pi_2 = \frac{gl}{v^2}$, som är inverterade värdet av Froudes tal

$$F_1 = \frac{v^2}{gl}$$

Antas att förutom ϱ, l och v ytspänningen σ är dominerande karakteriseras skeendet av det dimensionslösa uttrycket $\Pi_3 = \frac{\sigma}{lv^2}$, som är inverterade värdet av Webers tal

$$W = \frac{\varrho l v^2}{\sigma} = \frac{lv^2}{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

Antas till slut att förutom ϱ, l och v endast elasticiteten E är verksam karakteriseras förloppet av det dimensionslösa uttrycket $\Pi_4 = \frac{E}{\varrho v^2}$, som är inverterade värdet av Machs tal

$$M_1 = \frac{\varrho v^2}{E} = \frac{v^2}{\frac{E}{\varrho}}$$

5. Härled ett uttryck för tryckförlusten i en horisontell ledning vid en inkompresseibel vätskas stationära, turbulenta strömning.

Lösning: Tryckförlusten representeras av ett fall i tryckgradienten och är ett mått på strömningsmotståndet i röret.

Tryckfallet Δp kan antas vara en funktion av rörets diameter d, vätskans dyn. viskositet μ, dess täthet ϱ, längden av röret l, vätskans hastighet v och skrovligheten i röret k.

Skrovligheten k uttryckes vanligen som ett förhållande mellan storleken på ytojämnheterna, t.ex. partikeldiametern och rörets diameter. Förhållandet L/L ger då ett dimensionslöst tal.

1. Det funktionella sambandet kan då skrivas

$$f(\Delta p,\ d,\ \mu,\ \varrho,\ l,\ v,\ k) = 0 \quad \text{-------------} \quad (1)$$

2. Variabler och dimensionsformler

Variabel	Beteckning	Dimension
Tryckfall	Δp	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
Rördiameter	d	L
Dyn. visk.	μ	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
Täthet	ϱ	$M \cdot L^{-3}$
Rörets längd	l	L
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$
Skrovlighet	k	L/L

3. Antalet dimensionslösa grupper (π - termer) blir $7 - 3 = 4$. Vi kan skriva

$$\Phi(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4) = 0 \quad \text{------------} \quad (2)$$

4. Vi väljer d, v och ϱ som genomgående primärgrupp och kombinerar i tur och ordning med Δp, μ, l och k.

π - termerna uttrycks som produkter

$$\pi_1 = (d^{x_1})(v^{y_1})(\varrho^{z_1})\,\Delta p$$

$$\pi_2 = (d^{x_2})(v^{y_2})(\varrho^{z_2})\,\mu$$

$$\pi_3 = (d^{x_3})(v^{y_3})(\varrho^{z_3})\,l$$

$$\pi_4 = (d^{x_4})(v^{y_4})(\varrho^{z_4})\,k$$

5. Dimensionell homogenitet ger

$$\pi_1 = M^0L^0T^0 = (L^{x_1})(L^{y_1}T^{-y_1})(M^{z_1}L^{-3z_1})(M^1L^{-1}T^{-2})$$

$$\pi_2 = M^0L^0T^0 = (L^{x_2})(L^{y_2}T^{-y_2})(M^{z_2}L^{-3z_2})(M^1L^{-1}T^{-1})$$

$$\pi_3 = M^0L^0T^0 = (L^{x_3})(L^{y_3}T^{-y_3})(M^{z_3}L^{-3z_3})\,L^1$$

$$\pi_4 = M^0L^0T^0 = (L^{x_4})(L^{y_4}T^{-y_4})(M^{z_4}L^{-3z_4})\,L^0$$

6. Vi löser exponenterna

Π_1

M: $z_1+1=0$ $\quad x_1=0$

L: $x_1+y_1-3z_1-1=0$ $\quad y_1=-2$

T: $-y_1-2=0$ $\quad z_1=-1$

Π_2

M: $z_2+1=0$ $\quad x_2=-1$

L: $x_2+y_2-3z_2-1=0$ $\quad y_2=-1$

T: $-y_2-1=0$ $\quad z_2=-1$

Π_3

M: $z_3=0$ $\quad x_3=-1$

L: $x_3+y_3-3z_3+1=0$ $\quad y_3=0$

T: $-y_3=0$ $\quad z_3=0$

Π_4

M: $z_4=0$ $\quad x_4=0$

L: $x_4+y_4-3z_4=0$ $\quad y_4=0$

T: $-y_4=0$ $\quad z_4=0$

7. Π-termerna blir

$$\Pi_1 = d^0 v^{-2} \varrho^{-1} \Delta p = \frac{\Delta p}{v^2 \varrho}$$

$$\Pi_2 = d^{-1} v^{-1} \varrho^{-1} \mu = \frac{\mu}{dv\varrho} = Re$$

$$\Pi_3 = d^{-1} v^0 \varrho^0 l = \frac{l}{d}$$

$$\Pi_4 = d^0 v^0 \varrho^0 k = k$$

8. Sambandet kan nu skrivas enl. ekv. (2)

$$\Phi\left(\frac{\Delta p}{v^2 \varrho}, \frac{\mu}{dv\varrho}, \frac{l}{d}, k\right) = 0 \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - (3)}$$

Vi löser ut Δp och får

$$\Delta p = v^2 \varrho\, \Phi\left(Re, \frac{l}{d}, k\right) \qquad \text{- - - - - - - - - - - - - - (4)}$$

BESTÄMNING AV DIMENSION, FALL OCH VATTEN-
AVLEDANDE FÖRMÅGA FÖR TÄCKTA LEDNINGAR

1. Bestäm dimensionen på en betongrörsledning, som skall läggas i fallet 3,6:1000, om avrinningen uppskattas till 200 l/sek.

Lösning: Vi använder Mannings formel

$$v = CR_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \; ; \quad C = 93$$

Då fås: Enligt kontinuitetsvillkoret är $q = vA$ eller

$$0,2 = v \frac{3,1416 \ d^2}{4} \; ; \quad \underline{v} = \frac{0,8}{3,1416 \ d^2} = \underline{\frac{0,2546}{d^2}}$$

Vi har också att

$$\underline{R_h} = \frac{A}{p} = \frac{3,1416 \cdot d^2}{4 \cdot 3,1416 \cdot d} = \underline{\frac{d}{4}}$$

Vi har då att

$$\frac{0,2546}{d^2} = 93 \cdot \frac{\sqrt[3]{d^2}}{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt{0,0036}$$

$$\frac{0,2546\sqrt[3]{16}}{93 \cdot 0,06 \cdot d^2} = \frac{0,2546 \cdot 2,520}{5,58 \cdot d^2} = \frac{0,115}{d^2}$$

$$\frac{0,115}{d^2} = \sqrt[3]{d^2} \; ; \quad d^8 = 0,115^3$$

$$\underline{d} = \underline{450 \text{ mm}}$$

2. Hur stor vattenmängd per sek kan beräknas framrinna i en 600 mm betongrörsledning om fallet är 1,6:1000.

Lösning: Vi har att

$$\underline{A} = 3,1416 \cdot 0,30^2 = 3,1416 \cdot 0,09 = \underline{0,283 \text{ m}^2}$$

$$\underline{R_h} = \frac{A}{p} = \frac{3,1416 \cdot 0,30^2}{2 \cdot 3,1416 \cdot 0,30} = \frac{0,3}{2} = \underline{0,150 \text{ m}}$$

Vi använder Mannings formel

$$v = CR_h^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \; ; \quad C = 93$$

och får

$$q = vA = 93\sqrt[3]{0{,}15^2} \cdot \sqrt{0{,}0016} \cdot 0{,}283$$

$$\underline{q} = 26{,}32 \cdot 0{,}2823 \cdot 0{,}04 = 26{,}32 \cdot 0{,}01129 = \underline{0{,}297 \text{ m}^3/\text{sek}}$$

3. I vilket fall måste en 100 mm betongrörsledning läggas om den skall avleda 4 l vatten per sekund?

Lösning: Vi använder Mannings formel

$$v = C \; R_h^{\frac{2}{3}} \; I^{\frac{1}{2}} \;; \qquad C = 93$$

och får

$$q = Av = 3{,}1416 \cdot 0{,}05^2 \cdot 93\sqrt[3]{R_h^2} \cdot \sqrt{I} \quad - - - - - - - - - \quad (1)$$

$$\underline{R_h} = \frac{A}{p} = \frac{3{,}1416 \cdot 0{,}05^2}{2 \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}05} = \frac{0{,}05}{2} = \underline{0{,}025 \text{ m}}$$

Insättning i ekv. (1) ger

$$0{,}004 = 0{,}7304 \cdot \sqrt[3]{0{,}025^2} \cdot \sqrt{I}$$

$$0{,}004 = 0{,}7304 \cdot 0{,}0855 \cdot \sqrt{I}$$

$$\sqrt{I} = \frac{0{,}004}{0{,}06245} = 0{,}06405$$

$$\underline{I = 0{,}0041} \quad \text{eller} \quad \underline{I: 4:1000}$$

4. En dräneringsledning av korrugerad plast med inre diametern 100 mm skall avleda 3,8 l vatten per sek. Bestäm ledningens fall med hjälp av Brinks formel för korrugerade plaströr

$$q = 24 \; d^{2{,}67} \; I^{0{,}49} \text{ m}^3/\text{sek}$$

Lösning: Vi kan skriva

$$0{,}0038 = 24 \cdot 0{,}10^{2{,}67} \; I^{0{,}49}$$

$$I^{0{,}49} = \frac{0{,}0038}{24 \cdot 0{,}1^{2{,}67}}$$

$$I = \sqrt[0,49]{\frac{0,0038}{24 \cdot 0,1^{2,67}}}$$

$$I = \frac{1}{0,49}\left[\begin{array}{lll} 0,5798 - 3 & 1,3802 & 2,67\,\left[0,0000 - 1\right] \\ \underline{0,7102 + 2} & \underline{0,3300 - 3} & 0,0000 - 2,67 \\ 0,8696 - 2 & 1,7102 - 3 & 0,3300 - 3 \\ & 0,7102 - 2 & \\ -1,1304 & & \\ \multicolumn{3}{l}{-\dfrac{1,1304}{0,49} = -2,3069 = \underline{0,6931 - 3}} \end{array}\right] \begin{array}{l} = 0,0049 \\ \approx 5:1000 \end{array}$$

5. Formeln för vattenföringen i en tegelrörsledning kan enligt Heyndrix skrivas

$$q = 54\ d^{2,72}\ I^{0,57} \quad m^3/sek$$

Motsvarande formel för en ledning bestående av korrugerade plaströr är enligt Brink

$$q = 24\ d^{2,67}\ I^{0,49} \quad m^3/sek$$

Om vi jämför en tegelrörsledning med 50 mm inre diameter med en plaströrsledning med 45 mm inre diameter vid lika fall 5:1000, hur stor blir den korrugerade plaströrsledningens vattenföring i % av tegelrörsledningens vattenföring?

Lösning:

$$\frac{100}{q_{plast}} = \frac{54\ d^{2,72}\ I^{0,57}}{24\ d^{2,67}\ I^{0,49}}\ ; \quad q_{plast} = \frac{2400 \cdot 0,045^{2,67} \cdot 0,005^{0,49}}{54 \cdot 0,05^{2,72} \cdot 0,005^{0,57}} =$$

$$= \frac{44,44 \cdot 0,045^{2,67}}{0,05^{2,72} \cdot 0,005^{0,08}}\ ; \quad \underline{\log 44,44} = \underline{1,6478}$$

$$\log\left[0,045^{2,67}\right] = 2,67\left[0,6532 - 2\right] = 2,67 \cdot -1,3468 = -3,5960 = \underline{0,4040 - 4}$$

$$\log\left[0,05^{2,72}\right] = 2,72\left[0,6990 - 2\right] = 2,72 \cdot -1,3010 = -3,5387 = \underline{0,4613 - 4}$$

$$\log\left[0,005^{0,08}\right] = 0,08\left[0,6990 - 3\right] = 0,08 \cdot -2,3010 = -1,8408 = \underline{0,8408 - 1}$$

$$\left[\begin{array}{ll} 1,6478 & 0,4613 - 4 \\ \underline{0,4040 - 4} & \underline{0,8408 - 1} \\ 2,0518 - 4 & 1,3021 - 5 \\ & 0,3021 - 4 \\ 0,0518 - 2 & \\ \underline{0,3021 + 4} & \\ 0,7497 + 1 & \\ \quad 1,7497 & \end{array}\right] = \underline{60,2} \approx 60\ \%\ \text{av}\ q_{tegel}$$

BESTÄMNING AV DIMENSION, FALL OCH
VATTENAVLEDANDE FÖRMÅGA FÖR BROTRUMMOR

1. En brotumma är lagd med 600 mm betongrör och dess längd är 20 m. Bestäm avbördningen vid fullgång om fallet är 10:1000.

Lösning: Vi använder Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{d}}} \quad \text{för } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d}$$

och $e = 0{,}505$

Vi har att

$$\underline{h_f} = \frac{10 \cdot 20}{1000} = \underline{0{,}2 \text{ m aq}}$$

$$\underline{\lambda} = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{0{,}6} = 0{,}0200 + 0{,}0008 = \underline{0{,}021}$$

Då fås

$$\underline{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2}{1{,}505 + 0{,}021 \cdot \frac{20}{0{,}6}}} = \sqrt{\frac{3{,}924}{2{,}199}} = \sqrt{1{,}784} = \underline{1{,}34 \text{ m/sek}}$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$\underline{q} = vA = 1{,}34 \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}03^2 = \underline{0{,}379 \text{ m}^3\text{/sek}}$$

2. En täckt ledning skall dras under en väg genom en 10 m lång brotrumma med fallet 10:1000. Högvattenföringen uppgår till 280 l/sek. Beräkna med hjälp av Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{d}}} \quad \text{där } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d} \text{ och } e = 0{,}505$$

erforderlig rördiameter.

Lösning: Vi beräknar först h_f och får

$$h_f = \frac{10 \cdot 10}{1000} = 0{,}1 \text{ m aq}$$

Vi genomför successiva passeringar och försummar i första approximation rörfriktionen

1 appr. $\underline{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,1}{1 + 0,505}} = \sqrt{\frac{1,962}{1,505}} = \sqrt{1,304} = \underline{1,14 \text{ m/sek}}$

$$q = vA = v\,\frac{\pi \cdot d^2}{4}\ ; \quad d^2 = \frac{4q}{v \cdot \pi}\ ; \quad d = \sqrt{\frac{4q}{v \cdot \pi}}$$

$$\underline{d} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,28}{1,14 \cdot 3,1416}} = \sqrt{\frac{1,12}{3,581}} = \sqrt{0,3128} = \underline{0,56 \text{ m}}$$

Vi kan nu beräkna λ och $\lambda \cdot \frac{l}{d}$

$$\underline{\lambda} = 0,02 + \frac{0,0005}{0,56} = 0,02 + 0,0009 = 0,0209 = \underline{0,021}$$

$$\underline{\lambda \cdot \frac{l}{d}} = 0,021\,\frac{10}{0,56} = \frac{0,21}{0,56} = \underline{0,375}$$

2 appr. $\underline{v} = \sqrt{\frac{1,962}{1,505 + 0,375}} = \sqrt{\frac{1,962}{1,88}} = \sqrt{1,044} = \underline{1,02 \text{ m/sek}}$

$$\underline{d} = \sqrt{\frac{1,12}{1,02 \cdot 3,1416}} = \sqrt{0,3496} = \underline{0,59 \text{ m}}$$

Ny passning är tydligen överflödig

$$d = \underline{600 \text{ mm}}$$

3. Vattnet från ett avloppsdike ledes genom en trumma under en järnväg. Trummans längd är 30 m och dess fall 4:1000. Vegetationstidens medelvattenmängd uppskattas till 0,040 m^3/sek, normala högvattenmängden till 0,600 m^3/sek och extrema högvattenmängden till 1200 m^3/sek. Hur stor kan uppdämningen tänkas bli under extrema flöden om trumman dimensioneras för normala högvattenmängden 0,600 m^3/sek?

<u>Lösning</u>: Vi använder Weisbachs ekvation

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{d}}} \quad \text{för} \quad \lambda = 0,02 + \frac{0,0005}{d} \quad \text{och} \quad e = 0,505$$

Vi beräknar h_{f_1} och får $h_{f_1} = \frac{4 \cdot 30}{1000} = \underline{0,12 \text{ m aq}}$

1 approx. (ingen friktion)

$$\underline{v_1} = \sqrt{\frac{19,62 \cdot 0,12}{1,505}} = \sqrt{\frac{2,354}{1,505}} = \sqrt{1,564} = \underline{1,25 \text{ m/sek}}$$

Kont.villkoret ger: $q = vA = v \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$; $d = \sqrt{\frac{4q}{v \cdot \pi}}$

$$\underline{d} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,6}{1,25 \cdot 3,1416}} = \sqrt{\frac{2,4}{3,927}} = \sqrt{0,6111} = \underline{0,781 \text{ m}}$$

Vi beräknar λ och $\lambda \cdot \frac{l}{d}$

$$\underline{\lambda} = 0,02 + \frac{0,0005}{0,781} = 0,0200 + 0,0006 = 0,0206 = \underline{0,021}$$

$$\underline{\lambda \cdot \frac{l}{d}} = 0,021 \cdot \frac{30}{0,781} = \frac{0,63}{0,781} = \underline{0,807}$$

2 approx.

$$\underline{v_2} = \sqrt{\frac{2,354}{1,505 + 0,807}} = \sqrt{\frac{2,354}{2,312}} = \sqrt{1,018} = \underline{1,01 \text{ m/sek}}$$

$$\underline{d} = \sqrt{\frac{2,4}{1,01 \cdot 3,1416}} = \sqrt{\frac{2,4}{3,173}} = \sqrt{0,7564} = \underline{0,870 \text{ m}}$$

Ytterligare approximationer överflödiga

$q_{max} = 1,2 \text{ m}^3\text{/sek}$ och $d = 0,90$ m ger sedan

$$0,90 = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,2}{v_3 \cdot 3,1416}} = \sqrt{\frac{4,8}{v_3 \cdot 3,1416}} = \sqrt{\frac{1,528}{v_3}}$$

$$0,81 \, v_3 = 1,528 \ ; \quad v_3 = \underline{1,89 \text{ m/sek}}$$

Då fås vidare

$$1,89 = \sqrt{\frac{19,62 \cdot h_{f_2}}{1,505 + 0,807}} = \sqrt{\frac{19,62 \cdot h_{f_2}}{2,312}} = \sqrt{8,486 \, h_{f_2}}$$

$$8,486 \, h_{f_2} = 3,572 \ ; \quad \underline{h_{f_2}} = \underline{0,42 \text{ m}}$$

Uppdämningen blir då: $0,42 - 0,12 = \underline{0,30 \text{ m}}$

4. En brotrumma 20 m lång och med diametern 600 mm skall dimensioneras för normala högvattenmängden 0,420 m^3/sek. Beräkna trummans fall.

Lösning: Vi har Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \frac{l}{d}}} \quad \text{för } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d} \quad \text{och } e = 0{,}505$$

Vi löser λ och $\lambda \cdot \frac{l}{d}$

$$\underline{\lambda} = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{0{,}6} = 0{,}0200 + 0{,}0008 = \underline{0{,}021}$$

$$\underline{\lambda \cdot \frac{l}{d}} = 0{,}021 \, \frac{20}{0{,}6} = \frac{420}{600} = \underline{0{,}7}$$

Då fås $v = \sqrt{\frac{19{,}62\ h_f}{1{,}505 + 0{,}7000}} = \sqrt{\frac{19{,}62\ h_f}{2{,}205}} = \sqrt{8{,}898\ h_f}$

$$\underline{h_f} = \underline{\frac{v^2}{8{,}898}}$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$0{,}42 = v \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}3^2 = v \cdot 0{,}2827; \quad \underline{v} = \frac{0{,}42}{0{,}2827} = \underline{1{,}49\ m/sek}$$

Vi har att

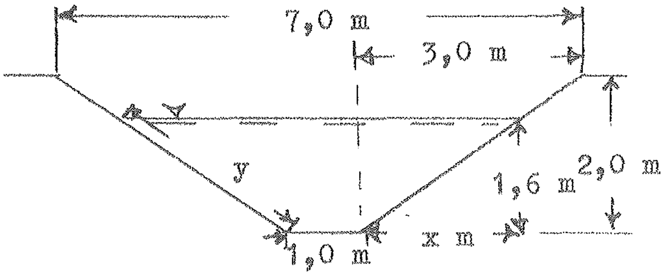
$$I = \frac{h_f}{l} = \frac{v^2}{8{,}898 \cdot 20} = \frac{1{,}49^2}{178{,}0} = \frac{2{,}22}{178{,}0} = 0{,}0125$$

$$\underline{I} = \underline{12{,}5:1000}$$

BESTÄMNING AV FALL OCH VATTENAV-
LEDANDE FÖRMÅGA FÖR ÖPPNA LEDNINGAR

1. På en sträcka av 600 m har ett öppet avlopp ett trapetsformat tvärsnitt med 7,0 m övre bredd, 1,0 m bottenbredd och 2,0 m djup. Den framrinnande vattenmängden är vid ett vattendjup av 1,6 m 4,5 m^3/sek. Beräkna absoluta fallet.

Lösning:



Vi beräknar först "våta" tvärsnittsarean.
Enligt figuren fås

$$\frac{x}{3,0} = \frac{1,6}{2,0}$$

$$x = 2,4$$

Övre bredden för vattenytan blir då: $2 \cdot 2,4 + 1,0 = \underline{5,8\ m}$

"Våta" arean blir då

$$\underline{A} = \frac{1,6(5,8 + 1,0)}{2} = \underline{5,44\ m^2}$$

Enligt figuren har vi att: $2,4^2 + 1,6^2 = y^2$; $y^2 = 8,32$

$y = \sqrt{8,32}$; $\underline{y} = \underline{2,884}$

Då fås "våta" omkretsen

$$\underline{p} = 2 \cdot 2,884 + 1,0 = \underline{6,77\ m}$$

och $R_h = \frac{A}{p} = \frac{5,44}{6,77} = \underline{0,804}$

Kontinuitetsvillkoret ger $4,5 = v \cdot 5,44$; $\underline{v} = \frac{4,5}{5,44} = \underline{0,83\ m/sek}$

Insättning i Mannings formel $v = C\, R_h^{\frac{2}{3}}\, I^{\frac{1}{2}}$ för $C = 40$ ger nu

$$0,83 = 40 \cdot 0,804^{\frac{2}{3}}\, I^{\frac{1}{2}} \ ; \quad I = \frac{0,83^2}{40^2\ \ 0,804^{\frac{4}{3}}} = \frac{0,6889}{1600 \cdot 0,748} =$$

$$= \frac{0,6889}{1600 \cdot 0,748} = \frac{0,6889}{1196,8} = 0,00056$$

$$\frac{1}{3}\left[\begin{array}{r} 0,9053 - 1 \\ 4 \\ \hline 3,6212 - 4 \\ 2,6212 - 3 \\ 0,8738 - 1 \end{array}\right] = 0,748$$

Absoluta fallet blir då
$0,00056 \cdot 600 = \underline{0,34\ m}$

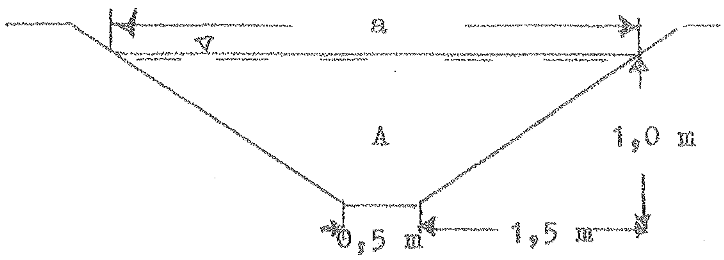
2. Hur stor vattenmängd framrinner i ett dike vars släntlutning är 1:1,5 och bottenbredd 0,5 m om fallet är 1,2:1000 och vattendjupet 1,0 m. Använd de Chezys formel

$$v = C\sqrt{R_h\, I} \quad \text{och Kutters förenklade formel}$$

$$C = \frac{100\sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}} \quad \text{för } m = 1{,}5$$

Lösning: Lutningen är 1:1,5, som ger $\underline{a} = 0{,}50 + 2 \cdot 1{,}5 = \underline{3{,}5\ \text{m}}$

$$\underline{A} = \frac{1{,}0(3{,}5 + 0{,}5)}{2} = 2{,}0\ \text{m}^2$$



$$\underline{p} = 0{,}5 + 2\sqrt{3{,}25} =$$

$$= 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}803 = \underline{4{,}106}$$

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{2{,}0}{4{,}106} = \underline{0{,}487};$$

$$\underline{C} = \frac{100 \cdot \sqrt{0{,}487}}{1{,}5 + \sqrt{0{,}487}} = \frac{69{,}79}{2{,}198} \approx 32$$

Då fås $\underline{v} = 32\sqrt{0{,}487 \cdot 0{,}0012} = \underline{0{,}77}$

$\underline{q} = vA = 0{,}77 \cdot 2{,}0 = \underline{1{,}54\ \text{m}^3/\text{sek}}$

PROBLEM UTAN LÖSNINGAR

1. Härled kontinuitetsekvationen för en kompressibel vätskas tredimensionella strömning.

2. Härled med hjälp av svaret i föregående exempel kontinuitetsekvationen för en inkompressibel vätskas stationära tredimensionella strömning.

3. Bestäm om följande uttryck på hastighetskomponenterna uppfyller villkoren för stationär, inkompressibel strömning.

a) $v_x = 3xy^2 + 2x + y^2$ b) $v_x = 2x^2 + 3y^2$

$v_y = x^2 - 2y - y^3$ $v_y = - 3xy$

Svar: a) Ja b) Nej

4. Vattnets hastighetsfördelning i en rörledning är given genom ekv.

$$v = 160(r^2 - y^2) \text{ m/sek}$$

där r = rörledningens radie. Bestäm medelhastigheten v_m för r = 150 mm.

Svar: 1,8 m/sek

5. Vatten strömmar genom en horisontell 150 mm ledning under ett tryck av 4 kp/cm^2. Om inga förluster antas äga rum, bestäm flödet i l/sek om trycket i ledningen efter en rörminskning till 75 mm är 1,5 kp/cm^2.

Svar: $\approx$ 100 l/sek

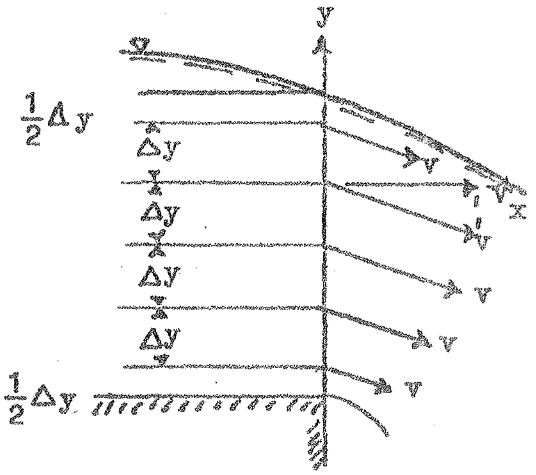
6. Vattnets hastighetsfördelning vid strömning i ett rör är given genom ekvationen

$$v = \frac{v_{max}}{r^2}(r^2 - y^2)$$

där r = rörets radie. Bestäm korrektionsfaktorn α.

Svar: 2,00

7. I ett överfall mätes vätskehastighetens storlek och riktning längs ett vertikalplan. Mätpunkterna ligger på konstant avstånd Δ y från varandra, frånsett närmast vattenytan och botten, där avståndet är $\frac{1}{2}\Delta$ y (se fig.). Uttryck flödet q per breddenhet i den horisontella hastighetskomponenten v_x och Δ y.



Svar: $q = \Sigma v_x \Delta y$

8. Vid ett visst tillfälle ligger avtappningskranen till en sluten oljebehållare 0,8 m under vätskenivån i behållaren. Utströmningshastigheten uppmäts till 1,8 m/sek. Om ingen hänsyn tas till strömningsförlusterna i kranen, hur stort är då övertrycket i behållaren (absoluta trycket minus atmosfärstrycket) i N/m^2? $\rho_{olja} = 825$ kg/m^3.

Svar: $-$ 5138 N/m^2

9. I en behållare finns vatten till en konstant höjd av 1,5 m över en öppning med 50 mm diameter. Hur lång tid åtgår för 1,5 m^3 vatten att strömma ut genom öppningen? Utströmningskoefficienten $\mu = 0,65$.

Svar: 3 min 37 sek.

10. En i marken nergrävd bensinbehållare har vätskenivån konstant 1,5 m under markytan. I behållaren råder ett övertryck av 0,25 bar. Beräkna bensinmängden, som per minut kan avtappas genom en 38 mm kran belägen 1,5 m över markytan, om hänsyn endast tas till utströmningsförlusten. ρ_{bensin}: 725 kg/m^3. Utströmningskoefficienten $\mu = 0,65$.

Svar: 140 l/min

11. Vid ett munstycksförsök uppmättes den bildade vattenstrålens koordinater till: längdkoordinaten x = 0,922 m, höjdkoordinaten y =

= 0,204 m. Munstyckets diameter var 12,6 mm, den uppmätta utströmmande vattenmängden 0,37 l/sek och fallhöjden 1,1 m. Beräkna hastighetskoefficienten α, kontraktionskoefficienten β och utströmningskoefficienten μ.

<u>Svar:</u> $\alpha = 0{,}97$; $\beta = 0{,}66$ och $\mu = 0{,}64$

12. I en behållares botten finns en öppning med 38 mm diameter varigenom vatten utströmmar. Beräkna vattnets höjd i behållaren efter det att stationärt tillstånd inträtt om behållaren tillföres 200 l vatten per minut. $\mu = 0{,}62$.

<u>Svar:</u> 1,15 m

13. En rektangulär öppning i en vertikal dammvägg har bredden 1,2 m och höjden 0,8 m. Överkanten av öppningen befinner sig 1,5 m under övre och 0,4 m över nedre vattenytan. Hur mycket vatten utströmmar på 10 min om μ kan sättas till 0,76 för hela öppningen?

<u>Svar:</u> 2600 m^3

14. I en vertikal dammvägg finns en rektangulär öppning tillsluten med en rörlig lucka. Öppningen har en höjd av 1,0 m och en bredd av 1,5 m. Vattenytan innanför dammen står 2 m över öppningens överkant. Hur högt måste luckan dras upp för att den utströmmande vattenmängden skall uppgå till 5 m^3/sek. $\mu = 0{,}65$.

<u>Svar:</u> 0,71 m

15. En triangulär öppning i en fördämning har sin bas i vattenytan. Hur stor del av den ursprungliga vattenmängden i procent utströmmar om en avstängningslucka nedskjutes till halva triangelns höjd?

<u>Svar:</u> 38 %

16. Den vertikala väggen i en vattenbehållare har formen av en likbent triangel med spetsen vänd nedåt. Basen är 1 m och höjden 2 m. Över väggens hela bredd skall en 1 m hög öppning upptas. På vilket avstånd z från behållarens överkant skall öppningen inplaceras för att den utströmmande vattenmängden skall bli så stor som möjligt? Vattenytan i behållaren hålles konstant vid dess överkant.

<u>Svar:</u> z = 0,23 m

17. Härled ett uttryck för den per sekund framströmmande vattenmängden genom en vertikal trapetsformad öppning med bottenbredden b, dagbredden a och höjden h om a befinner sig i vattenytan. Utströmningskoefficienten = μ.

Svar: $\frac{2}{15}(2a + 3b)\mu\sqrt{2g}\,h^{\frac{3}{2}}$

18. En simbassäng har konstant rektangulär area 50 x 12 m och skall förses med bottenavlopp så dimensionerat att vattennivån sjunker från 2 m till 1 m över botten på 10 min. Bestäm avloppets diameter om hänsyn tas endast till utströmningsförlusten. $\mu = 0,65$.

Svar: d = 60 cm

19. Härled ett uttryck för utströmningstiden över ett rektangulärt skarpkantat fritt överfall om ingen tillströmning sker. Den fria vätskeytans area sättes lika med A_o och utströmningskoefficienten är μ.

Svar: $\frac{3A_o}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_2}} - \frac{1}{\sqrt{h_1}}\right)$

20. Två kvadratiska vattenbehållare har en gemensam vägg i vars nedre del en lucka av 1 dm^2 storlek är inplacerad. Behållaren nr 1 har sidan 2 m och initialvattendjupet över luckan 3 m. Behållare nr 2 har sidan 1 m och initialvattendjupet över luckan 1 m. Hur lång tid erfordras för utjämning av nivåskillnaden om luckan i mellanväggen hastigt öppnas? $\mu = 0,8$

Svar: 64 sek.

21. Den framrinnande vattenmängden i en horisontell rörledning med 100 mm diameter är uppmätt till 800 l/min. Absoluta trycket är efter en lokal minskning av diametern till 50 mm 1,4 bar. Hur stort är absoluta trycket i den vidare delen av rörledningen?

Svar: 1,62 bar

22. I en horisontell rörledning är vattnets hastighet i en sektion 2,4 m/sek och det statiska övertrycket är 1,6 bar. Hur stort är det statiska övertrycket i en annan sektion där hastigheten är 25 procent mindre, om ingen energiförlust antas äga rum? ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.

Svar: 1,613 bar

23. I ett horisontellt dubbelkoniskt rör förändras formen kontinuerligt från sektionen $A_1 = 12\ dm^2$ till $A_2 = 8\ dm^2$. Om den framströmmande vattenmängden uppmäts till $0,156\ m^3/sek$, hur stort är då statiska tryckfallet från A_1 till A_2 i m aq? ϱ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.

Svar: 0,108 m aq

24. Genom att under gång fälla ner ett "Pitotrör" i en vattenränna, som löper parallellt med skenorna kan ett lok fylla på sitt vattenförråd. Om vid ett visst tillfälle lokets hastighet är 120 km/tim och vattenbehållarens botten befinner sig 3 m över vattenuivån, hur stort är då det totala trycket uttryckt i kp/cm^2 under vilket vattnet strömmar in i behållaren?

Svar: 5,364 kp/cm^2

25. Ett Prandtls rör, anslutet till en vätskemanometer, är kopplat till ett vattenledningsrör. Manometern innehåller en vätska med tätheten 1250 kg/m^3 och nivåskillnaden mellan vätskeytorna är 40 cm. Hur stor är vattenhastigheten i röret? ϱ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.

Svar: 1,4 m/sek

26. Statiska trycket i sugledningen till en pump 5 m över vattenytan i en brunn är 0,40 bar. Om barometerståndet är 762 mm Hg, hur stor är då vattenhastigheten i nämnda nivå om hänsyn ej behöver tas till eventuella strömningsförluster? ϱ_{Hg}: 13600 kg/m^3; ϱ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.

Svar: 5 m/sek

27. I en horisontell rörledning är vattnets hastighet i en sektion 2,5 m/sek och statiska trycket 1,5 kp/cm^2. Hur stor är hastigheten i en annan sektion om det statiska trycket där är 10 % lägre? Ingen energiförlust antas äga rum.

Svar: 6,0 m/sek

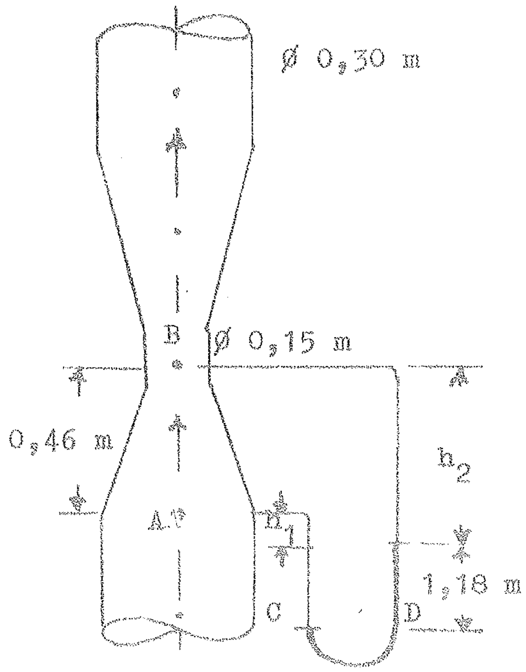
28. I en vertikal vattenledning är en venturimätare inkopplad, som på 0,5 m avsmalnar från diametern 300 mm (punkt A) till diametern 150 mm (punkt B). Statiska trycket uppmäts vid A till 0,35 bar, vid B till 0,20 bar. Beräkna flödet i l/sek om ingen hänsyn behöver tas till eventuella strömningsförluster.

Svar: 97,7 l/sek

29. I en horisontell rörledning med 400 mm diameter är insatt en venturimeter, som från diametern 400 mm vid sektionen A_1 kontinuerligt avsmalnar till 300 mm vid sektionen A_2. Tryckfallet från A_1 till A_2 är 30 cm aq. Beräkna framströmmande vattenmängden. ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.

Svar: 208 l/sek

30.



Vatten strömmar enlig vidstående figur uppåt genom en vertikal 30 x 15 cm venturimeter vars koefficient är 0,98. Skillnaden mellan vätskeytorna i manometern är 1,18 m och vätskan där har tätheten 1250 kg/m^3. Bestäm flödet i l/sek. ρ_{H_2O}: 1000 kg/m^3.

Svar: 43,0 l/sek.

31. Bestäm den kritiska hastigheten för a) vatten b) brännolja, vilka vid en temperatur av 15°C strömmar genom ledningar med inre diametern 150 mm. $Re_{krit} = 2300$. Kinematiska viskositeten ν är vid 15°C för vatten 0,0114 cm^2/sek och för brännoljan 0,0441 cm^2/sek.

Svar: a) 1,75 cm/sek
b) 6,76 "

32. Vilken strömningstyp råder i en 600 mm oljeledning om kapaciteten är 5,7 l/sek vid temperaturen 5°C? $\nu = 0{,}0608$ cm^2/sek.

Svar: Strömningen är laminär

33. Beräkna den vattenmängd, som på 5 min kan tas ur en ledning med 10 mm inre diameter, utan att den nedre kritiska hastigheten överskrids. Vattentemperaturen är 20°C och $Re_{krit} = 2300$. $\nu = 0{,}0101$ cm^2/sek.

Svar: 5400 cm^3

34. Regnvatten med en temperatur av 15°C strömmar över en asfalterad väg. Kritiska vattenhastigheten bestämmes till 8,3 cm/sek. Hur stort är vattendjupet vid denna hastighet om $Re_{krit} = 580$ och $\nu = 0{,}0114$ cm^2/sek ?

Svar: 0,25 cm

35. Beräkna Reynolds tal för ett dike med släntlutningen 1:1,5 om vattendjupet är 40 cm, bottenbredden 60 cm och vattenhastigheten 0,8 m/sek. $\nu = 0{,}01$ cm^2/sek.

Svar: $R_e = 752\ 000$

36. Bestäm dimensionen på ett vattenledningsrör, om fallförlusten ej får överskrida 5 o/oo av rörlängden när den framrinnande vattenmängden är 25 l/sek. $\lambda = 0{,}025$.

Svar: 200 mm

37. En sluten oljecistern har ovanför oljan ett övertryck av 1,5 at. Oljan ($\rho = 850$ kg/m^3) står 4 m ovanför mynningen av ett avtappningsrör, som har en längd av 50 m och en diameter av 100 mm ($\lambda = 0{,}030$). Beräkna utströmningsmängden olja i l per sek i det ögonblick en avstängningsventil öppnas. Ingen hänsyn tas till strömningsförluster i ventilen.

Svar: 40.4 l/sek

38. Vattenhastigheten i en horisontell rörledning med 250 mm diameter uppmäts till 1,2 m/sek. Mellan två punkter i ledningen på avståndet 200 m är skillnaden i statiskt tryck 1,5 m aq. Bestäm rörfriktionskoefficienten λ.

Svar: $\lambda = 0{,}026$

39. En tätort förses med vatten från en vattentäkt genom en 6 km lång 300 mm ledning. Geometriska höjdskillnaden är 70 m och λ kan sättas lika med 0,03. Om ledningen har 10 krökar ($k_k = 0{,}2$) och 8 ventiler ($k_v = 1{,}5$), till hur många personer beräknas vattnet räcka om varje invånare tänkes förbruka 400 l per dygn?

Svar: Ca 23 000

40. Från en vattenbehållare dras två rörledningar av 100 respektive 300 m längd. Om samma vattenmängder skall transporteras i båda rörledningarna bestäm förhållandet mellan rörledningarnas diametrar. Rören antas raka och med utloppen på samma nivå samt att rörfriktionskoefficienten är densamma i båda fallen.

Svar: $\approx$ 0,8

41. En öppen cylindrisk vattenbehållare med diametern 0,5 m har ett horisontellt avloppsrör 10 m långt och med 25 mm diameter (λ = 0,025). Om vattnet från början står 2 m över avloppsröret och om ingen hänsyn tas till förluster vid inströmningen i och utströmningen ur avloppsröret, hur lång tid åtgår då för att tömma behållaren?

Svar: 14 min 7 sek

42. I en sluten cirkulär oljebehållare med diametern 0,5 m står oljan (ρ = 850 kg/m^3) 2 m ovanför ett 15 m långt horisontellt urtappningsrör med diametern 50 mm (λ = 0,03). Ovanför oljan hålles vid tappning ett konstant övertryck av 0,5 kp/cm^2. Om man bortser från förluster vid inströmning i och utströmning ur röret, beräkna den tid, som åtgår för sänkning av oljeytan 1 m.

Svar: $\approx$ 27 sek

43. Beräkna den erforderliga effekten för en pump med totala verkningsgraden = 0,65, om uppfordringshöjden är 12 m och önskad vattenmängd är 600 l/min.

Svar: 2,5 hk

44. En pump uppfordrar 1500 l vatten per minut vid en uppfordringshöjd av 50 m. Om pumpens kraftbehov är 20 hk hur stor är då verkningsgraden?

Svar: 0,83

45. Man vill på 12 timmar pumpa 6000 m^3 vatten 40 m högt genom en 400 m lång rörledning (λ = 0,03) med diametern 400 mm. Om pumpmaskineriets verkningsgrad är 0,60 och det i rörledningen finns 6 knän (k_{kn} = 0,75) och 4 krökar (k_{kr} = 0,2) beräkna den erforderliga effekten.

Svar: $\approx$ 130 hk

46. Vatten skall pumpas i en 2 km lång ledning till ett 38 m högt vattentorn. För ledningen kan antingen väljas en diameter av 400 mm eller en diameter av 200 mm. Vattenhastigheten i den grövre ledningen förutsättes bli 1,0 m/sek och vattenmängderna desamma i båda alternativen. Om hänsyn endast tas till friktionsförlusterna i rak ledning och λ kan sättas till 0,03 i båda fallen, beräkna förhållandet mellan de för pumpens drivande erforderliga effektbeloppen.

Svar: $P_1 : P_2 = 0,162$

47. Bensin med temperaturen 15°C ($\nu = 0,0068$ cm²/sek) strömmar i en 100 mm ledning med en hastighet av 3,0 m/sek. Vilken diameter skall en annan ledning ha för att leda vatten vid temperaturen 15°C ($\nu = 0,0113$ cm²/sek) om Reynolds tal skall vara detsamma i båda fallen? Hastigheten är 1.5 m/sek.

Svar: $\approx$ 330 mm

48. Olja ($\nu = 0,0566$ cm²/sek) skall transporteras i en 150 mm ledning med en hastighet av 3,6 m/sek. Vilken hastighet skall vatten med temperaturen 15°C ($\nu = 0,0113$ cm²/sek ha vid strömning i en 300 mm ledning för att Reynolds tal skall vara detsamma i båda fallen?

Svar: $\approx$ 0.36 m/sek

49. Bestäm förhållandet mellan hastigheterna i modell och prototyp om endast mass- och friktionskrafter är verksamma.

Svar: $\frac{v_m}{v_p} = \frac{v_m \cdot L_p}{v_p \cdot L_m}$

50. Olja med kinematiska viskositeten $\nu = 0,4645$ cm²/sek skall användas i en prototyp där friktions- och tyngdkrafter dominerar. Om modellskalan är 1:5, vilken viskositet skall modellvätskan ha för att Froudes och Reynolds tal skall bli desamma i modell och prototyp?

Svar: $\nu = 0,0415$ cm²/sek

51. Kontrollera uttrycket $\tau = u \frac{dv}{dy}$ genom dimensionsanalys.

52. Visa genom dimensionsanalys att en kropps rörelseenergi kan skrivas $W = kmv^2$.

53. Sök genom dimensionsanalys ett uttryck för flödet q genom en cirkulär yta som en funktion av vätskans täthet ϱ, ytans diameter d och tryckdifferensen p_d.

Svar: $q = kd^2\sqrt{\frac{p_d}{\varrho}}$

54. Om vi antar att den kraft E, med vilken en strömmande vätska angriper en kropp är en funktion av vätskans täthet ϱ, dyn. viskositeten μ och hastigheten v samt en för kroppen karakteristisk längd l, härled ett samband med hjälp av Buckinghams Π - teorem.

Svar: $\varrho \cdot v^2 \cdot l^2 \cdot \Phi_2$ (Re)

55. Härled med hjälp av Buckinghams Π - teorem ett uttryck för skjuvspänningen τ i en vätska, som strömmar i ett rör, om man antar att skjuvspänningen τ är en funktion av rörets diameter d och dess skrovlighet k samt vätskans täthet ϱ, dyn. viskositeten μ och hastighet v.

Svar: $\varrho \cdot v^2 \cdot \Phi_2$ (k, Re)

56. Bestäm dimensionen på en dräneringsledning av betong, som skall läggas i fallet 2,5:1000, om avrinningen beräknas till 60 l/sek. Använd Mannings formel

$$v = C\, R_h^{\frac{2}{3}}\, I^{\frac{1}{2}}\ ; \quad C = 93$$

Svar: 300 mm

57. Beräkna med hjälp av Mannings formel

$$v = C\, R_h^{\frac{2}{3}}\, I^{\frac{1}{2}}\ ; \quad C = 93$$

hur mycket vatten en 12" betongrörledning kan avleda per sek om fallet skall vara 4:1000.

Svar: 74 l/sek

58. Om en 150 mm tegelrörsledning skall avleda 10 l vatten per sek, i vilket fall måste den då läggas? Använd Mannings formel

$$v = C\, R_h^{\frac{2}{3}}\, I^{\frac{1}{2}} \; ; \qquad C = 93$$

Svar: 3:1000

59. En dräneringsledning av korrugerad plast skall avleda 1,4 l vatten per sek och ligga i fallet 2:1000. Bestäm erforderlig innerdimension med hjälp av Brinks formel för korrugerade plaströr

$$q = 24\, d^{2,67}\, I^{0,49} \text{ m}^3/\text{sek}$$

Svar: 81 mm

60. Vid dimensionering av tegelrörsledningar kan man enligt Heyndrix använda sig av formeln

$$q = 54\, d^{2,72}\, I^{0,57} \text{ m}^3/\text{sek}$$

Enligt Brink gäller för korrugerade plaströrsledningar formeln

$$q = 24\, d^{2,67}\, I^{0,49} \text{ m}^3/\text{sek}$$

Om man vid ett visst tillfälle har ett fall av 5:1000 och i stället för 75 mm tegelrör vill använda korrugerade plaströr, vilken av plaströrsdimensionerna 90 mm resp. 110 mm är då den lämpligaste? Märk: Plaströrsdimensionerna är yttermått. Till ett framräknat d måste läggas väggtjockleken eller ca 10 mm.

Svar: 90 mm

61. Vatten från ett avloppsdike skall avledas genom en 10 m lång brotrumma. Vid högvatten beräknas q uppgå till 0,495 m^3/sek och skillnaden i vattenytornas höjd mellan in- och utlopp vara 0,30 m. Beräkna erforderlig dimension på trumman. Använd Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_r}{1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{d}}} \quad \text{med } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d} \quad \text{och } e = 0{,}505$$

Svar: 600 mm

62. En brotrumma består av 900 mm betongrör och är 20 m lång. Bestäm dess avbördningsförmåga vid fullgång om dess fall är 5:1000? Använd Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{d}}} \quad \text{med } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d} \quad \text{och } e = 0{,}505.$$

<u>Svar</u>: 0,636 m^3/sek

63. En brotrumma med diametern 600 mm har en längd av 20 m och ett fall av 5:1000. Hur stor blir uppdämningen vid extrema flöden om extrema högvattenföringen uppmätts till 0,500 m^3/sek. Använd Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \quad \frac{l}{d}}} \quad \text{för } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d} \quad \text{och } e = 0{,}505$$

<u>Svar</u>: 0,25 m

64. Vilket fall bör en 30 m lång brotrumma med diametern 800 mm ha om den skall dimensioneras för normala högvattenflödet 0,640 m^3/sek? Använd Weisbachs formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh_f}{1 + e + \quad \frac{l}{d}}} \quad \text{för } \lambda = 0{,}02 + \frac{0{,}0005}{d} \quad \text{och } e = 0{,}505$$

<u>Svar</u>: 6,3:1000

65. Ett öppet avlopp har ett trapetsformat tvärsnitt med 5,0 m övre bredd, 0,5 m bottenbredd och 1,6 m djup. Den framrinnande vattenmängden är vid ett vattendjup av 1,0 m 1,5 m^3/sek. Bestäm fallet. Använd de Chezy's formel

$$v = C\sqrt{R_h\, I} \quad \text{och Kutters förenklade formel}$$

$$C = \frac{100\sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}} \qquad \text{för } m = 1{,}5$$

<u>Svar</u>: 1,6:1000

Forts. från omslagets andra sida