



**SVERIGES  
LANTBRUKSUNIVERSITET**

**OM METODER ATT MED UTGÅNGSPUNKT  
FRÅN BINDNINGSKURVAN BERÄKNA DEN  
KAPILLÄRA LEDNINGSFÖRMÅGAN**

**Sigvard Andersson**

---

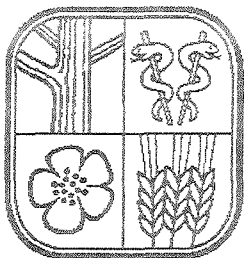
**Institutionen för markvetenskap  
Avdelningen för lantbrukets hydroteknik**

**Swedish University of Agricultural Sciences  
Department of Soil Sciences  
Division of Agricultural Hydrotechnics**

**Rapport 157  
Report**

**Uppsala 1988  
ISSN 0348-1816  
ISBN 91-576-3411-4**





**SVERIGES  
LANTBRUKSUNIVERSITET**

# **OM METODER ATT MED UTGÅNGSPUNKT FRÅN BINDNINGSKURVAN BERÄKNA DEN KAPILLÄRA LEDNINGSFÖRMÅGAN**

**Sigvard Andersson**

---

**Institutionen för markvetenskap  
Avdelningen för lantbrukets hydroteknik**

**Swedish University of Agricultural Sciences  
Department of Soil Sciences  
Division of Agricultural Hydrotechnics**

**Rapport 157  
Report**

**Uppsala 1988  
ISSN 0348-1816  
ISBN 91-576-3411-4**



## Innehållsförteckning

- A. Presentation av metoderna. Sammanställning av nödvändiga enkla formler. Beräkningsschema och beräkningsföljd.
1. Metod 1. Lösning med avläsning av  $h_{t,i,m}$ .
  2. Metod 2. Lösning med avläsning av  $v_{i,m}$ .
  3. Metod 3. Teoretisk beräkning med hjälp av under C. "Kommentarer ----" framtagna formler.
- B. Instruktionsexempel.
- C. Kommentarer till en utvidgad teoretisk behandling.
1. Definition av begreppet kapillär ledningsförmåga. Beteckningar.
  2. Tidsförlopp. Några allmänna synpunkter.
  3. Det funktionella sambandet mellan porstorleksfördelning och vattenledande egenskaper.
    - 3.1. Den enskilda vattenfyllda porklassens bidrag till  $k(w)$ -värdet.
    - 3.2. Anmärkningar till ett nytt bindningsdiagram, ett  $wh_t k$ -diagram.
    - 3.3.  $k(w)$ -värdet som funktion av de vattenfyllda porstorlekarna.
    - 3.4. Exempel.
- D. Bilaga. HP-program.



A. Presentation av metoderna. Sammanställning av nödvändiga enkla formler. Beräkningsschema och beräkningsföljd.

Två halvgrafiska metoder presenteras och en teoretisk metod:

Metod 1. Lösning med avläsning av  $h_{t,i,m}$

Metod 2. Lösning med avläsning av  $v_{i,m}$

Metod 3. Teoretisk beräkning med hjälp av under C. "Kommentarer---" framtagna formel

Allmänna förutsättningar

Bindningskurvan tänkes given eller vara uppdelad i  $N$  st lineära element, linjeelement, där  $P_i(w_i, h_{t,i})$  och  $P_{i+1}(w_{i+1}, h_{t,i+1})$  är det  $i$ :te linjeelementets ändpunktskoordinater.

Vattenhalten i det  $i$ :te linjeelementets mittpunkt betecknas med  $w_{i,m}$  och bindningstrycket i samma punkt med  $h_{t,i,m}$ .

Således gäller

$$(1) \begin{cases} w_{i,m} = \frac{w_i + w_{i+1}}{2} & \text{volymproc.} & (a) \\ \log h_{t,i,m} = \frac{\log h_{t,i} + \log h_{t,i+1}}{2} & \text{cm v.p.} & (b) \end{cases}$$

Antilogaritmering av ekvationen (1b) ger

$$h_{t,i,m} = \sqrt{h_{t,i} \cdot h_{t,i+1}} \quad (1c)$$

Enligt den under B. instruktionsexempel presenterade metoden 1. skall  $h_{t,i,m}$  avläsas i bindningsdiagrammet. Avläsningar är som regel osäkra och tråkiga. Detta gäller ej minst avläsningar i det "komplexa" bindningsdiagrammet!

Formel (1c) ger oss möjlighet att enkelt beräkna  $h_{t,i,m}$ , om spänningvärdena för polygonkurvas brytpunkter är givna. Om brytpunkterna representerar experimentellt bestämda  $w_h$ -värden är ju detta alltid fallet.

Beräkningar av den kapillära ledningsförmågan för vattenhalter  $w < w_v =$  vattenhalten vid vissningsgränsen måste betraktas som mycket osäkra och ej särskilt meningsfulla. Den kapillära ledningsförmågan vid vissningsgränsen  $k_v = k(w_v)$  skattas därför lämpligen med formeln

$$k_v = k(w_v) = 4 \cdot 10^{-6} w_v \quad \text{mm/h} \quad (2)$$

där  $w_v$  är vattenhalten vid vissningsgränsen (M.F.U. XXVII, manus).

Enligt de längre fram givna formlerna är varje intervalls bidrag till  $k(w)$ -värdet proportionellt mot  $\Delta w_i = w_{i+1} - w_i$  men omvänt proportionell mot kvadraten på bindningstryckets medelvärde i intervallet dvs. mot

$$h_{t,i,m} = h_{t,i} \cdot h_{t,i+1}$$

enligt ekvationen (1c). Vi kan därför förvänta oss, att approximationen vid beräkningen av  $k(w)$ -värdet blir sämre ju bredare vi tillåter intervallen att vara. Man kan visa, att metoderna 1. och 2. alltid ger lägre värden än de enligt formel (23'') teoretiskt beräknade värdena.

Vi ger nu en koncentrerad presentation av metoderna och exemplifierar dem under rubriken B. Instruktionsexempel.

### 1. Metod 1. Lösning med avläsning av $h_{t,i,m}$ .

Använda formler:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \Delta k(w_i) = 100 \frac{\Delta w_i}{h_{t,i,m}^2} \quad \text{mm/h} \quad (a) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k(w) = \sum_{i=1}^{\nu} \Delta k(w_i) \quad \text{mm/h} \quad (b) \end{array} \right.$$

där  $\nu \leq N$ .

### Beräkningsgång

1. Vattenhaltsvärdena,  $w_i$  och  $w_{i+1}$ , avlästa eller givna, införes i Beräkningsschemats kolumn 1.
2. Differenserna  $w_{i+1} - w_i = \Delta w_i$  beräknas och införes i kolumn 2.
3. Bindningstrycken  $h_{t,i,m}$  i intervallens mittpunkter avläses och införes i kolumn 3.
4. Differenserna  $\Delta k(w_i)$  uträknas enligt formel (3a) ovan och införes i kolumn 4.
5. Differenserna  $\Delta k(w_i)$  summeras successivt och uppkomna summor införes i kolumn 5, allt enligt formel (3b) ovan.



## 2. Metod 2. Lösning med avläsning av $v_{i,m}$

Använda formler:

$$(4) \begin{cases} k(w_i) = v_{i,m} \frac{\Delta w_i}{100} & \text{mm/h} & (a) \\ k(w) = \sum_{i=1}^n \Delta k(w_i) & \text{mm/h} & (b) \end{cases}$$

där  $\underline{v} \leq \underline{N}$ .

### Beräkningsgång

1. och 2. samma operationer genomföres som under punkterna 1. och 2. ovan!
3. Medelhastigheten  $v_{i,m}$  dvs. skalans  $\underline{v}$ -värde i intervallets mittpunkt avläses och införes i Beräkningsschemats kolumn 6.
4. Differenserna  $\Delta k(w_i)$  uträknas enligt formel (4a) och införes i kol. 7.
5. Differenserna  $\Delta k(w_t)$  summeras successivt och uppkomna summor införes i kol. 8, allt enligt formel (4b).

## 3. Metod 3. Teoretisk beräkning med hjälp av under C. "Kommentarer ---" framtagen formel

Använd formel:

$$k = k(h_t) = \frac{50(w_{i+1} - w_i)}{\ln 10(\log h_{t,i}/h_{t,i+1})} \left[ \frac{1}{h_t^2} - \frac{1}{h_{t,i}^2} \right] + k(w_i) \quad \text{mm/h}$$

där definitionsområdet är  $\underline{w}_i \leq \underline{w} \leq \underline{w}_{i+1}$  eller i  $\underline{h}_t$   $\underline{h}_{t,i} \leq \underline{h}_t \leq \underline{h}_{t,i+1}$ .  
Se Ekvationen C. (23'')!

Av formeln framgår, att vi får  $\underline{k} = k(h_t) = k(w_i)$  för  $h_t = h_{t,i}$ .  $k(w_i)$  är alltså det aktuella  $\underline{k}$ -värdet i det aktuella ( $i$ :te) intervallets början dvs. för koordinaterna  $(\underline{w}_{t,i}, \underline{h}_{t,i})$ .

I övrigt hänvisas här till texten under C. Kommentarer till en utvidgad analytisk behandling!

### B. Instruktionsexempel

Nedanstående något schematiserade  $\underline{wh}_t$ -data är hämtade ur M.F.U. XXIII "Om de vattenhållande egenskaperna hos svenska jordarter".

P.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
w	0	6	12	22	38	44	48	54	58
$h_t$	$10^7$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$10^3$	100	30	10

a) Konstruera bindningskurvan som en polygonkurva dvs. avsätt givna värdepar i det nykonstruerade och bilagda bindningsdiagrammet och förena närliggande punkter med räta linjeelement!

b) Avläs och inför i det ävenså bilagda beräkningsschemat de enligt kolumn-texten nödvändiga värdena samt beräkna och inför  $\Delta k_i$  och  $k(w)_{i+1}$ ! Konstruera sedan även en  $k(w)$ -kurva (polygonkurva) i anslutning till den på diagrammets högra vertikalexel avsätta  $k$ -skalan!

### Lösning:

a) Vi avsätter de givna värdeparen ( $wh_t$ -värdena) som punkter i bindningsdiagrammet och förenar de avsatta punkterna till en polygonkurva. Vi får kurvan nr 1 i diagrammet på figur 1.

b) Vi räknar enligt de allmänna anvisningar, som blivit givna under metodbeskrivningarna 1. och 2., och fyller successivt i aktuella kolumner i Beräkningsschemat. Beträffande beräkningarna enligt metod 3. fordras måhända ett närmare studium av texten under C. (särskilt C.3.!).

Beräkningarna enligt Metod 1. och enligt Metod 2. redovisas i Beräkningsschema:1. Ingen uppdelning av givna intervall. I Beräkningsschema:2. Varje givet intervall uppdelat i två delintervall (lika stora) exemplifieras betydelsen av intervallens bredd vid tillämpningen av Metod 1. Samma sak gäller även vid tillämpningen av Metod 2. Detta är dock ej exemplifierat.

Slutligen redovisas i Beräkningsschema:3. Teoretisk beräkning enligt formel (23''), resultatet av teoretiska beräkningar av  $k(h_t)$ -värden gällande för de i exemplet ursprungliga intervallgränserna. I diagrammet på figur 1 är  $k$ -kurvan uppritad (kurva 1!).

### Anmärkningar

I texten under C. är ekvationen (tvåpunktsformeln) för räta linjen uppskriven i anslutning till bindningsdiagrammet. Den lyder, se ekvationen (22')!

$$\frac{\log h_t - \log h_{t,i}}{\log h_{t,i+1} - \log h_{t,i}} = \frac{w - w_i}{w_{i+1} - w_i} = q$$

där ytterligare ett led blivit tillfogat, nämligen  $\underline{q}$ . Vi kan uppfatta  $\underline{q}$  som en parameter och får då räta linjens ekvation i planet skriven på parameterform

$$(5) \quad \begin{cases} w = w_i + (w_{i+1} - w_i)q & (a) \\ \log h_t = \log h_{t,i} + (\log h_{t,i+1} - \log h_{t,i})q & (b) \end{cases}$$

Detta är i många sammanhang en enkel och användbar framställning av den log-lineära bindningsfunktionen.

För  $\underline{q} = 1/2$  får vi

$$\begin{cases} w = w_{i,m} = \frac{w_i + w_{i+1}}{2} \\ h_{t,i} = h_{t,i,m} = \sqrt{h_{t,i} \cdot h_{t,i+1}} \end{cases}$$

Jämför med ekvationssystemet (1)!

Beräkning av den kapillära ledningsförmågan  $k = k(w)$  med utgångspunkt från bindningskurvan  $h_t = h_t(w)$ .

Beräkningsschema: 1. Ingen uppdelning av givna intervall.

<u>1.</u>	<u>2.</u>	<u>3.</u> <u>4.</u> <u>5.</u>			<u>6.</u> <u>7.</u> <u>8.</u>		
Vattenhalts- intervall	Diff.	Avläsning av $h_{t,i,m}$			Avläsning av $v_{i,m}$		
$w_{i+1} - w_i$	$\Delta w_i$	Bindnings- tr. $h_{t,i,m}$	Diff. $\Delta k(w_i)$	$\sum \Delta k(w_i)$	Medelhast. $v_{i,m}$	Diff. $\Delta k(w_i)$	$\sum \Delta k(w_i)$
$w_v = 22$				$2 \cdot 10^{-6}$			$2 \cdot 10^{-6}$
22 - 38	16	8700	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
38 - 44	6	2300	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
44 - 48	4	320	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
48 - 54	6	56	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^0$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$
54 - 58	4	17,3	$1,3 \cdot 10^0$	$1,5 \cdot 10^0$	$3,3 \cdot 10^1$	$1,3 \cdot 10^0$	$1,5 \cdot 10^0$

Kontr.

$$58 - 22 = 36$$

Anmärkningsar:

Här har  $k_w$  blivit satt =  $2 \cdot 10^{-6}$  mm/h i anslutning till ett i M.F.U. XXVII behandlat exempel. Skattat med den angivna formeln (2), får vi  $k_v = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 22 = 8,8 \cdot 10^{-5}$  mm/h dvs. ett 44 ggr större värde.

Beräkning av den kapillära ledningsförmågan  $k = k(w)$  med utgångspunkt från bindningskurvan  $h_t = h_t(w)$ .

Beräkningsschema: 2. Varje givet intervall uppdelat i två delintervall.

1.	2.	3. Avläsning av $h_{t,i,m}$			6. Avläsning av $v_{i,m}$		
Vattenhalts- intervall	Diff. $\Delta w_i$	Bindnings- tr. $h_{t,i,m}$	Diff. $\Delta k(w_i)$	$\sum \Delta k(w_i)$	Medelhast. $v_{i,m}$	Diff. $\Delta k(w_i)$	$\sum \Delta k(w_i)$
$w_{i+1} - w_i$							
$w_v = 22$	-			$2 \cdot 10^{-6}$			
22 - 30	8	12000	$5,6 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$			
30 - 38	8	6700	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$			
38 - 41	3	3300	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$5,3 \cdot 10^{-5}$			
41 - 44	3	1500	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$			
44 - 46	2	570	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-4}$			
46 - 48	2	180	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$			
48 - 51	3	75	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$			
51 - 54	3	40	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$			
54 - 56	2	23	$3,8 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$			
56 - 58	2	13	$1,2 \cdot 10^0$	$1,8 \cdot 10^0$			

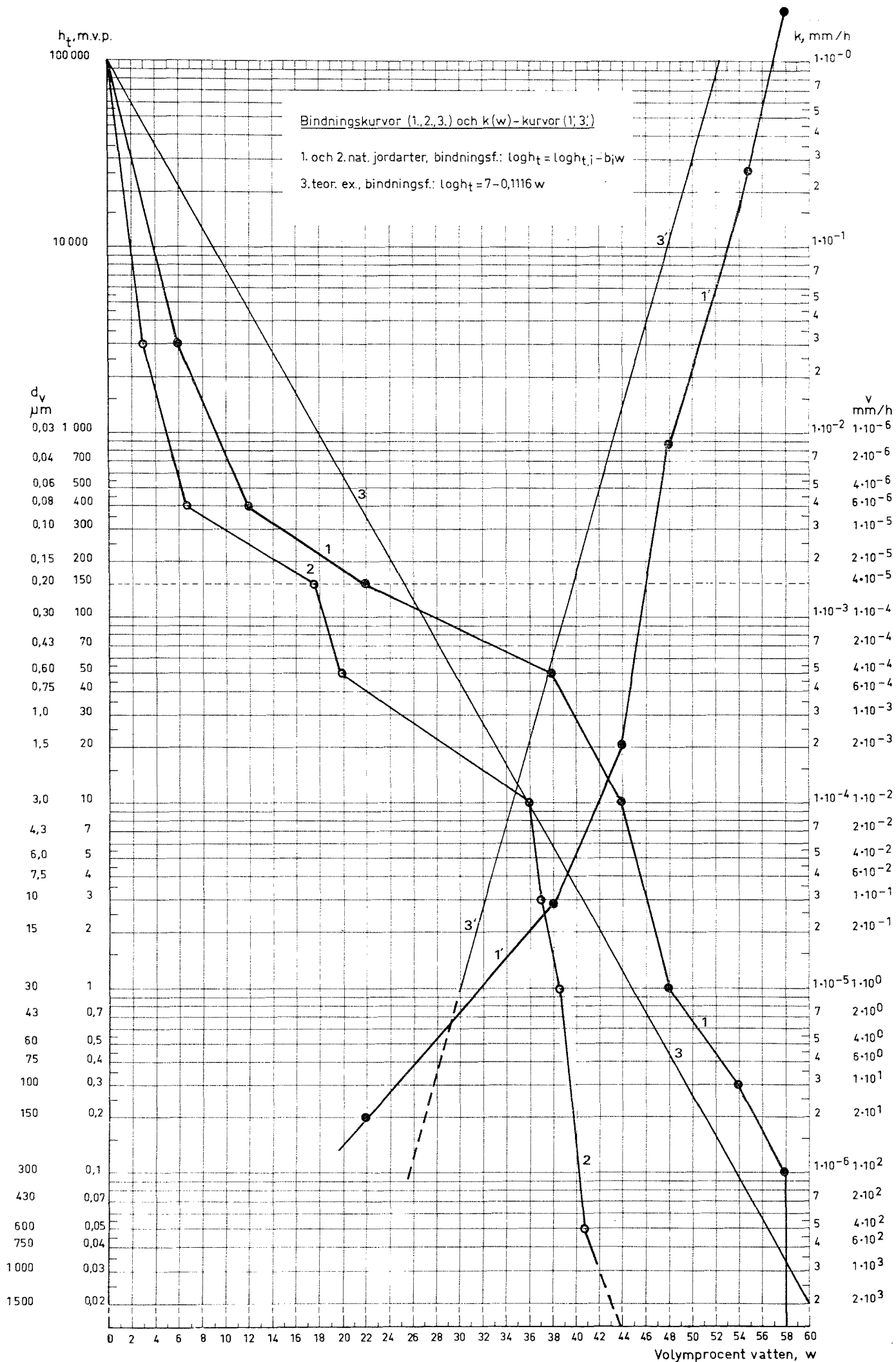
Anmärkningar:

Beräkning av den kapillära ledningsförmågan  $k = k(w)$  med utgångspunkt från bindningskurvan  $h_t = h_t(w)$ .

Beräkningsschema: 3. Teor. beräkning enl. formel (23'').

<u>1.</u>	<u>2.</u>	<u>3.</u>	<u>4.</u>	<u>5.</u>	<u>6.</u>	<u>7.</u>	<u>8.</u>
<u>Vattenhalts-</u> <u>intervall</u>	<u>Diff.</u>	<u>Avläsning av <math>h_{t,i,m}</math></u>			<u>Avläsning av <math>v_{i,m}</math></u>		
<u><math>w_{i+1} - w_i</math></u>	<u><math>\Delta w_i</math></u>	<u>Bindnings-</u> <u>tr. <math>h_{t,i,m}</math></u>	<u>Diff.</u> <u><math>\Delta k(w_i)</math></u>	<u><math>\sum \Delta k(w_i)</math></u>	<u>Medelhast.</u> <u><math>v_{i,m}</math></u>	<u>Diff.</u> <u><math>\Delta k(w_i)</math></u>	<u><math>\sum \Delta k(w_i)</math></u>
$w_v = 22$		$h_{t,i}$		$2 \cdot 10^{-6}$			
<u>22 - 30</u>		15000					
30 - 38							
<u>38 - 41</u>	16	5000	$2,59 \cdot 10^{-5}$	$2,79 \cdot 10^{-5}$			
41 - 44							
<u>44 - 46</u>	6	1000	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$2,07 \cdot 10^{-4}$			
46 - 48							
<u>48 - 51</u>	4	100	$8,60 \cdot 10^{-3}$	$8,81 \cdot 10^{-3}$			
51 - 54							
<u>54 - 56</u>	6	30	$2,52 \cdot 10^{-1}$	$2,61 \cdot 10^{-1}$			
56 - 58							
<u>58</u>	4	10	$1,62 \cdot 10^0$	$1,88 \cdot 10^0$			

Anmärkningar:



### Figurtext

1. Polygonkurvor karakteriseras av att närbelägna och sammanhörande punkter förbundits med varandra genom räta linjeelement. Detta framställningssätt tillåter, att ett godtyckligt, större antal bestämningar eller punkter kan bli beaktade vid den grafiska framställningen samtidigt som det analytiska uttrycket för varje linjeelement lätt kan anges. Med hänsyn till skalorna i bindningsdiagrammet gäller då enligt tvåpunktsformeln för  $i$ :te linjeelementet

$$\frac{\log h_t - \log h_{t,i}}{\log h_{t,i+1} - \log h_{t,i}} = \frac{w - w_i}{w_{i+1} - w_i}$$

I detta diagram presenteras polygonkurvor för två naturliga jordarter (ur M.F.U. XXIII), kurvorna 1. och 2., samt polygonkurvan för diagonalen från  $(0; 10^7)$  till  $(60; 2)$ . Dessutom presenteras  $\underline{k(w)}$ -kurvan för jordarten 1. och  $\underline{k(w)}$ -kurvan svarande mot diagonalen uppfattad som en bindningskurva.



C. Kommentarer till en utvidgad teoretisk behandling.

1. Definition av begreppet kapillär ledningsförmåga. Beteckningar.

Den kapillära ledningsförmågan i en jord dvs. jordens förmåga att leda eller föra vatten, som står under en kapillär spänning, en egentlig dragspänning, är en funktion av den aktuella spänningen  $\underline{h}_t$  och indirekt således en funktion av vattenhalten  $\underline{w}$ . Den kapillära ledningsförmågan kan åskådligt uppfattas som en funktion av de sammanhängande, vattenhållande eller vattenavförande porerna eller - om man vill undvika porbegreppet - av volymen och den mer eller mindre komplexa formen på den sammanhängande vattenkroppen.

Den kapillära ledningsförmågan betecknas med bokstaven  $\underline{k}$ , då ingen tvekan behöver råda om vad man avser. Vill man mera klart betona, att beteckningen avser den kapillära ledningsförmågan, skriver man  $k(\underline{h}_t)$  eller  $\underline{k}(\underline{w})$  och även  $\underline{k}[\underline{h}_t(\underline{w})]$ , där  $\underline{k}$  är angiven som en funktion av en funktion.

Alltså gäller för den kapillära ledningsförmågan - valfritt och beroende av sammanhanget - beteckningarna

$$k = k(\underline{h}_t) = \underline{k}(\underline{w}) = \underline{k}[\underline{h}_t(\underline{w})] \quad (1)$$

där det sista ledet klarast uttrycker de funktionella relationerna.

Är dragspänningen eller tensionen  $\underline{h}_t = 0$  eller råder ett kompressivt tryck på vattnet i det kapillära systemet (det korniga systemet, jorden etc.) benämnes den aktuella ledningsförmågan hydraulisk ledningsförmåga. Den första likheten i de ovan givna ekvationerna ger då

$$k = k_t(0) = k_o \quad (2)$$

där vi således infört beteckningen  $\underline{k}_o$  för den hydrauliska ledningsförmågan. Som regel skall den hydrauliska ledningsförmågan motsvara vattenfyllt system dvs.  $\underline{w} = \underline{n}$  = porositeten. Då gäller även

$$k = k_w(\underline{n}) = k_o \quad (3)$$

I dessa två senare ekvationer indicierar nu  $\underline{t}$  respektive  $\underline{w}$  den oberoende variabeln.

Observera, att om vattenhalten  $\underline{w}$  i systemet är oberoende av spänningarna  $\underline{h}_t$  inom ett visst begynnelseområde  $\underline{h}_{t,m} = 2 \leq \underline{h}_t \leq \underline{h}_{t,M}$  cm v.p., så gäller

$$k = k_o = k[\underline{h}_t(\underline{w})] = \text{konst.} \quad (4)$$

Denna relation är av stor betydelse i finkornigare jordarter och jordar både för strömningar i mikro- och makroskala t.ex. vattnets strömning mot roten och kommunikationen mellan grundvattenmagasin.

## 2. Tidsförlopp. Några allmänna synpunkter.

Våra hittills gjorda utredningar (syftar på utredningar i M.F.U. XXVII!), framtagningar av formler och beräkningar har förutsatt, att en jämvikt uppkommer eller kan realiseras mellan de vattenbindande krafterna i jorden, bindningstrycket  $h_{t,b} = h_{t,b}(w)$  och den via tryckkammarens keramiska platta pålagda, vattenavförande spänningen  $h_{t,a}$  cm v.p. Den summerade verkan av krafterna mätes härvid som spänningar, egentliga dragspänningar med dimensionen tryck dvs. kraft per areaenhet.

Om det vattenbindande trycket i jorden såsom ovan angivits betecknas med  $h_{t,b} = h_{t,b}(w)$  och det vattenavförande trycket betecknas med  $h_{t,a}$ , så gäller då att vatten strömmar ut ur provet, jorden, så länge som

$$h_{t,a} - h_{t,b}(w) > 0 \quad (5)$$

och att vid jämvikt gäller

$$h_{t,a} - h_{t,b}(w) = 0 \quad (6)$$

Experimentellt innebär jämvikten, att vattenrörelserna avstannat eller blivit så små, att de ligger under den uppställda mätnoggrannheten. Det kanske här bör påpekas att spänningen (tensionen) eller bindningstrycket utan riktningsangivelse betecknas med  $h_t$ , där  $t$  står för tension.

All rörelse i den fysikaliska världen är förbunden med tiden. Vi skall nu försöka skaffa oss en uppfattning om de hastigheter och tidslängder, som kan bli aktuella vid uppkomsten av den anförda jämvikten, och av hur dessa beror av de framväxande bindningstrycken och av pålagda eller andra såsom vattenavförande betraktade spänningar.

Under stationära betingelser dvs. strömningsbilden ändras ej med tiden definierar  $k$ -värdet den strömningshastighet (Darcy-hastigheten), som under i övrigt bestämda betingelser uppkommer vid vattnets rörelse genom ett poröst material. Vid endimensionell strömning kan detta skrivas

$$v = k \cdot l = k \frac{dh_i}{ds} \quad (7)$$

där  $\underline{dh}_i = \underline{dh}_f$  är förlusthöjden, om strömningen sker i system, som står under kompressivt tryck, och där  $\underline{dh}_i = \underline{dh}_t$  är tensionstillväxten, om strömningen sker i system, som står under en kapillär spänning.

Observera, att detta är en utvidgning av Darcys lag, som ursprungligen uppställtts för att gälla vattnets strömning under övertryck (= kompressivt tryck)!

Vid strömning i helt vattenfyllda porsystem ( $\underline{w} = \underline{n}$ ) - som regel system under övertryck - betraktas  $\underline{k}$  för bestämda, homogena delar av systemet som en konstant,  $\underline{k}_o$ . Sker strömningen i porsystem, där vattnet står under tension, dvs. är utsatt för vattenavförande spänningar, blir  $\underline{k}$  en funktion av spänningen och indirekt av vattenhalten  $\underline{w}$  och vi kan i anslutning till inledningen skriva

$$k = k [h_t(w)] \quad (8)$$

Den utvidgade tillämpningen av Darcys lag ger även ett allmännare samband mellan medelhastigheten  $\underline{v}_m$  i porerna och Darcy hastigheten  $\underline{v}_D$ . Vi får

$$v_m = \frac{100}{w} v_D \quad (9)$$

där vi för  $\underline{w} = \underline{n}$  får det tidigare speciellt angivna fallet. Se t.ex. M.F.U. III!

### 3. Det funktionella sambandet mellan porstorleksfördelning och vattenledande egenskaper

#### 3.1. Den enskilda, vattenfyllda porklassens bidrag till $k(w)$ -värdet

Låt oss betrakta ett kapillärt system t.ex. en provpropp i form av en cylinder med basarean  $\underline{a}$  cm<sup>2</sup> och höjden  $\underline{l}$  cm.

Vi tänker oss vattenhalten  $\underline{dw}$  volymprocent vara uppdelad på  $\underline{dN}$  kapillära kanaler i höjdriktningen. Ekvivalentpodiametern för dessa kanaler betecknas med  $\underline{x}$  (cm). Vi kan då teckna två uttryck på den volym vatten, som ryms i dessa kapillära kanaler och får ekvationen

$$dN \frac{\pi x^2 l}{4} = \frac{dw \cdot la}{100} \quad (a)$$

som ger

$$dN = \frac{4a \cdot dw}{100 \pi x^2} \quad (b)$$

Vi kan också teckna två uttryck på volymflödet  $dq$  cm<sup>3</sup> vatten, som vid gradienten  $\frac{dh_t}{ds}$  strömmar genom den aktuella porklassen  $x$   $\mu\text{m}$  ( $= 10^{-4}$  cm).

Utvidgningen av Darcys sats ger

$$dq = dk(w) \cdot a \frac{dh_t}{ds} \quad (c)$$

där  $dk(w)$  betecknar porklassens bidrag till det totala  $k(w)$ -värdet, och tillämpningen av Hagen-Poiseuilles lag ger

$$dq = dN \frac{\pi \rho g x^4}{128 \mu} \cdot \frac{dh_t}{ds} = \frac{4a \, dw}{100 \pi x^2} \cdot \frac{\pi \rho g x^4}{128 \mu} \cdot \frac{dh_t}{ds} \quad (d)$$

Härur erhålles efter viss förenkling

$$dk(w) = \frac{\rho g}{32 \mu} x^2 \cdot \frac{dw}{100} \quad \text{cm/s} \quad (10)$$

Vi inför värden på  $\rho$ ,  $g$  och  $\mu$  och får

$$dk(w) = 3,066 \cdot 10^3 x^2 \frac{dw}{100} \quad \text{cm/s} \quad (11)$$

eller om vi övergår till den i dessa sammanhang mera lämpliga tidsenheten timmar ( $h$ )

$$dk(w) = 1,104 \cdot 10^7 x^2 \frac{dw}{100} \quad \text{cm/h} \quad (12)$$

Det allmänna uttrycket för medelhastigheten vid laminär strömning i rör är

$$v_m = \frac{\rho g}{32 \mu} x^2 \frac{dh_t}{ds} \quad \text{cm/s} \quad (13)$$

Av detta framgår, att vår formel, ekvation (10), säger, att porstorleksklassens  $x$  bidrag till  $k(w)$ -värdet är den med procentandelen vägda medelhastigheten vid gradienten ett ( $1 = \frac{dh_t}{ds}$ ). Vi kan därför också skriva

$$dk(w) = v_{m,x} \cdot \frac{dw}{100} \quad \text{cm/h} \quad (14)$$

Denna formel kan vi också skriva som ett differensuttryck

$$\Delta k(w) = v_{m,x} \cdot \frac{\Delta w}{100} \quad \text{cm/h} \quad (15)$$

Formeln (15) ger oss ett enkelt uttryck för grafisk beräkning av  $k(w)$ -värdet i anslutning till vårt diagram. Se här närmare beräkningsanvisningarna!

### 3.2. Anmärkningsdiagram till ett nytt bindningsdiagram, ett $wh_t$ -k-diagram

I det nya bindningsdiagram, som här publiceras, har den tidigare i diagrammet förekommande pF-skalan tagits bort. Två nya skalor har i stället blivit insatta: en k-skala för kapillär ledningsförmåga och en hastighetsskala v-skala för vattnets medelhastighet i porerna, då  $\frac{dh_t}{ds} = 1$ .

De nya skalorna leder till att diagrammet nu icke bara kan läggas till grund för framställningar och analys av vattnets statik i jord utan även ger en öppning över mot det större och vidare problemet: vattnets rörelse i jord, dess strömning under påverkan av kapillära spänningar, dvs. egentliga dragspänningar.

Diagrammets skalor är dessutom avstämda mot ett nytt och parallellt med  $wh_t$ -diagrammet utarbetat diagram, ett summationsdiagram för framställning av korn- och porstorleksfördelningar.

För bägge skalorna, k- och v-skalan, har enheten mm/h blivit vald. Härigenom underlättas direkta jämförelser med vattenomsättningarna i fält, med nederbördsangivelser, evaporations- och transpirationsförlopp m.m. Skalans sifferangivelser konkretiseras och ett enhetligt betraktelsesätt underlättas. Diagrammet kan - såsom också redan blivit angivet - benämnas  $wh_t$ -k-diagram.

Mellan de två nya skalorna råder i övrigt ingen direkt relation [jfr dock med ekv:na (14) och (15)!]. k-skalan har avstämts så, att tänkbara och vanliga k(w)-värden i våra jordar skall täckas in. Många k<sub>o</sub>-värden kommer emellertid att ligga utanför skalans övre gräns, som ju endast motsvarar k = k(w) = 1 mm/h.

Hastighetsskalan, v-skalan, är en teoretisk beräknad skala, parallellställd med porstorleksskalan, så att en direkt avläsning av medelhastigheten i porer av olika storlek vid gradienten ett skall vara möjlig.

För att de mot de olika pordiametrarna  $\underline{x} = \underline{d}_v \mu\text{m}$  svarande hastigheterna skall storleksmässigt bättre överensstämja med experimentella värden i reella por-system har de teoretiskt beräknade värdena multiplicerats med faktorn 1/1000. De har med andra ord beräknats med formeln

$$v = 0,001 \cdot 1,104 \cdot 10^7 \cdot 10x^2 \frac{dw}{100} \quad \text{mm/h}$$

som med  $\underline{dw} = 100$  ger

$$v = 1,104 \cdot 10^5 x^2 \quad \text{mm/h} \quad (16)$$

Så är t.ex. den minsta porstorlek som kan tömmas vid vissningsgränsen  $\underline{x} = \underline{d}_v = 0,2 \mu\text{m}$ . Detta ger

$$v = 1,104 \cdot 10^5 (2 \cdot 10^{-5})^2 = 4 \cdot 10^{-5} \quad \text{mm/h} \quad (16)$$

Jämför med diagrammet!

De djupare orsakerna till denna neddragning av de  $\underline{v}$ -värden, som erhålles vid en direkt beräkning av medelhastigheterna enligt Hagen-Poiseuilles lag, och storleksordningen av denna neddragning kan ej diskuteras här. I princip är den bestämd av den s.k. "tortuosity" problematiken dvs. porsystemets större eller mindre grad av komplexitet, de enskilda portvärsnittens variation längs strömvägarna och strömlinjernas slingrighet.

Differentialuttrycket (12) för sambandet mellan por diametern  $\underline{x}$  och  $dk(w)$  skall på liknande sätt dras ned och vi får

$$dk(w) = 1,104 \cdot 10^3 \underline{x}^2 dw \quad \text{mm/h} \quad (17)$$

Detta uttryck bildar utgångspunkten för beräkningarna i diagrammet och för den fortsatta teoretiska analysen.

### 3.3. $k(w)$ -värdet som funktion av de vattenfyllda porstorlekarna

Vi har nu skaffat oss en viss bakgrund för att kunna angripa problemet att bestämma  $\underline{k(w)}$ -värdet i vår provkropp som funktion av bindningstrycket  $\underline{h}_t$  och indirekt som funktion av vattenhalten  $\underline{w}$ , dvs. närmare bestämma de symboliskt tecknade ekvationerna

$$k = k [\underline{h}_t(w)] = k(w)$$

samt även

$$k = k(x)$$

Jämför här med ekvationerna (10) och (18)!

För vår provpropp, vårt kapillärsystem gäller nedan angivna tre ekvationer:

$$\begin{cases} dk = 1,104 \cdot 10^3 \underline{x}^2 dw & \text{mm/h} & (a) \\ \log \underline{h}_t = \underline{h}_t(w) & \text{cm v.p.} & (b) \\ \underline{x} = 0,3/\underline{h}_t & \text{cm} & (c) \end{cases}$$

I detta ekvationssystem är ekvationen (a) den i det föregående härledda ekvationen (17), ekvationen (b) kan betraktas som ett symboliskt uttryck för bindningskurvan och ekvationen (c) är definitionsekvationen på ekvivalentpor diameter.

Ekvationen (a) ger omedelbart

$$k = k(x) = 1,104 \cdot 10^3 \int x^2 dw \quad (18)$$

Lösningen av denna integral fordrar, att  $\underline{w}$  skall kunna uttryckas som funktion av  $\underline{x}$  och vi söker nu i första hand en mera direkt till bindningskurvan ansluten väg för utförandet av integreringen.

Ekvationen (c) ger efter kvadrering av båda leden

$$x^2 = 0,09 h_t^{-2} \quad (a)$$

och vi får efter substituering

$$dk = 99,36 h_t^{-2} dw \quad \text{mm/h} \quad (19)$$

Detta uttryck ger en andra praktisk formel för grafisk beräkning. Vi kan skriva

$$\Delta k = 100 \frac{\Delta w}{h_t^2} \quad \text{mm/h} \quad (20')$$

och

$$k = k(w) = \sum \Delta k = 100 \sum \frac{\Delta w}{h_t^2} \quad \text{mm/h} \quad (20'')$$

Se här närmare beräkningsanvisningarna!

Ekvationen (19) kan skrivas

$$k = k(w) = 100 \int h_t^{-2} dw \quad (21)$$

och om denna integral skall kunna lösas måste,  $\underline{w}$  kunna uttryckas i  $\underline{h}_t$  (el. omvänt  $\underline{h}_t$  i  $\underline{w}$ !).

En bindningskurva ritad som en polygonkurva karakteriseras av att närliggande punkter har förbundits med räta linjer. Detta är ett enkelt sätt att grafiskt framställa relationen mellan vattenhalt  $\underline{w}$  och bindningstryck  $\underline{h}_t$ .

Om  $P_i(w_i, h_{t,i})$  och  $P_{i+1}(w_{i+1}, h_{t,i+1})$  är koordinaterna för ändpunkterna av det  $i$ :te linjeelementet av en polygonkurva, så gäller enligt den s.k. tvåpunktsformeln för räta linjen

$$\frac{\log h_t - \log h_{t,i}}{\log h_{t,i+1} - \log h_{t,i}} = \frac{w - w_i}{w_{i+1} - w_i} \quad (22')$$

vilket också kan skrivas

$$\log h_t = a_i - b_i w = \left( \log h_{t,i} + \frac{\log h_{t,i} - \log h_{t,i+1}}{w_{i+1} - w_i} w_i \right) - \left( \frac{\log h_{t,i} - \log h_{t,i+1}}{w_{i+1} - w_i} \right) w \quad (22'')$$

Ekvationen (22'') ger

$$\log e \ln h_t = a - bw \quad (a)$$

Differentiering ger

$$\log e \frac{dh_t}{h_t} = -bdw \quad (b)$$

varav

$$dw = -\frac{1}{b \ln 10} \frac{dh_t}{h_t} \quad (c)$$

Detta ger infört i ekvationen (21)

$$k = k(w) = -\frac{100}{b \ln 10} \int \frac{dh_t}{h_t^3} \quad (d)$$

som efter obestämd integration kan skrivas

$$k = k(w) = \frac{100}{2b \ln 10} \cdot \frac{1}{h_t^2} + C_k \quad (e)$$

För  $\underline{h_t} = \underline{h_{t,i}}$  är

$$C_k = k(w_i) \quad (f)$$

och vi får

$$C_k = k(w_i) = \frac{100}{2b \ln 10} \frac{1}{h_{t,i}^2} \quad (g)$$

samt slutligen den viktiga formeln

$$k = k(h_t) = \frac{100}{2b \ln 10} \left[ \frac{1}{h_t^2} - \frac{1}{h_{t,i}^2} \right] + k(w_i) \quad \text{mm/h} \quad (23')$$

Enligt ekvationen (22'') är  $\underline{b}$  i ekvationen (23) bestämd av uttrycket

$$b = \frac{\log h_{t,i} - \log h_{t,i+1}}{w_{i+1} - w_i} \quad (h)$$

som infört i ekvationen (23) ger



$$k = k(h_t) = \frac{50(w_{i+1} - w_i)}{\ln 10 (\log h_{t,i} / h_{t,i+1})} \left[ \frac{1}{h_t^2} - \frac{1}{h_{t,i}^2} \right] + k(w_i) \quad \text{mm/h} \quad (23'')$$

där nu uttrycket för  $k(h_t)$  är entydigt definierat av det betraktade (givna) linjeelementets ändpunktskoordinater.

Genom ekvationen (22'')

$$\log h_t = a - bw$$

eller

$$h_t = 10^{a - bw}$$

är det tydligt att vi också lätt kan uttrycka  $k$  som funktion av  $w$ . Vi får vid insättning i (23')

$$k = k(w) = \frac{100}{2b \ln 10} \left[ 10^{-2(a - bw)} - 10^{-2(a - bw_i)} \right] + k(w_i) \quad (24')$$

som också kan skrivas

$$k = k(w) = \frac{100 \cdot 10^{-2(a - bw_i)}}{2b \ln 10} \left[ 10^{2b(w - w_i)} - 1 \right] + k(w_i) \quad (24'')$$

### 3.4. Exempel

1. Bestäm a) bindningsfunktionen dvs. det mot bindningskurvan svarande analytiska uttrycket för det linjeelement i vårt instruktionsexempel, som har ändpunktskoordinaterna:  $P_1(22, 15000)$  och  $P_2(38, 5000)$ !

Bestäm b) även den kapillära ledningsförmågan som funktion av bindningstrycket i samma vattenhalts- respektive bindningsintervall!

Lösning:

a) Tvåpunktsformeln ger

$$\frac{\log h_t - \log 15000}{\log 5000 - \log 15000} = \frac{w - 22}{38 - 22}$$

som lätt förenklas till

$$\log h_t = 4,8321 - 2,9820 \cdot 10^{-2} w$$

Vi hade också kunnat lösa uppgiften genom att direkt sätta in givna värden i ekvationen (22'').

b) Direkt insättning av givna koordinater i ekvationen (23'') ger

$$k = k(h_t) = \frac{50(38-22)}{\ln 10 \log(15000/5000)} \left[ \frac{1}{h_t^2} - \frac{1}{15000^2} \right] + 2 \cdot 10^{-6} \text{ mm/h}$$

$$k = k(h_t) = 728,2 \left[ \frac{1}{h_t^2} - 4,444 \cdot 10^{-9} \right] \text{ mm/h}$$

Då vattenhalten växer från  $w_1 = 22$  till  $w_2 = 38$  växer  $k(w)$  från värdet  $2 \cdot 10^{-6}$  mm/h till  $2,8 \cdot 10^{-5}$  mm/h.

2. Bestäm bindningsfunktionen för den diagonal i vårt bindningsdiagram, som tänkes gå från övre vänstra hörnet till nedre högra hörnet!

Lösning:

Koordinaterna för övre vänstra hörnet är  $w_1 = 0$  och  $h_{t,1} = 10^7$  och koordinaterna för det nedre vänstra hörnet är  $w = 60$  och  $h_t = 2$ .

Detta ger enligt tvåpunktsormeln för räta linjen

$$\frac{\log h_t - \log 10^7}{\log 2 - \log 10^7} = \frac{w - 0}{60 - 0}$$

som förenklat ger

$$\log h_t = 7 - 0,1116 w \quad \text{cm v.p.}$$

Sätter vi här  $h_t = 15000$  cm v.p., får vi  $w_v = 25,3$  volymproc. I diagrammet på figur 1 är diagonalen uppritad (kurva 3).

3. Bestäm a) den  $k(h_t)$ -funktion, som svarar mot bindningsfunktionen i föregående exempel! Beräkna sedan b)  $k_o$ -värdet dvs.  $k(w) = k(60)$  samt bestäm c) de vattenhalter  $w_1$  och  $w_2$  för vilka gäller att  $k(w_1)/k_o = 0,01$  och  $k(w_2)/k_o = 0,001$ .

Lösning:

a) Här är  $w_i = w_1 = 0$  följaktligen  $k(w_i) = k_w(0) = 0$ . Vidare är  $b = 0,1116$  och härav erhålles genom instättning i ekvationen (23')

$$k = k(h_t) = \frac{100}{2 \cdot 0,1116 \ln 10} \left[ \frac{1}{h_t^2} - \frac{1}{10^{14}} \right]$$

dvs. förenklat

$$k = k(h_t) = \frac{195}{h_t^2} \text{ mm/h}$$

b)  $\underline{w} = 60$  svarar mot  $\underline{h}_t = 2$  och vi får

$$k(w) = k(60) = 48,75 \text{ mm/h}$$

c) Vi har, om  $10^{-14}$  försummas

$$k = k_0 = k(60) = \frac{50}{b \ln 10} \cdot \frac{1}{4}$$

och

$$k = k(w_i) = \frac{50}{b \ln 10} \cdot \frac{1}{10^{2(a - bw_i)}}$$

som ger

$$\frac{k(w_i)}{k(60)} = \frac{4}{10^{2(a - bw_i)}} = 10^{-q}$$

där  $\underline{w}_i$  betecknar den vattenhalt, som satisfierar den tecknade ekvationen.

Ekvationen kan skrivas

$$\frac{2(a - bw_i)}{10} = 4 \cdot 10^q$$

varefter logaritmering ger den sökta vattenhalten.

Vi får

$$w_i = \frac{a - 0,5(\log 4 + q)}{b}$$

I detta exempel gäller  $\underline{a} = 7$  och  $\underline{b} = 0,111650$  och vi kan skriva

$$w_i = \frac{6,69897 - 0,5q}{0,111650}$$

0,01 svarar mot  $\underline{q} = 2$  och  $\underline{w}_1 = 51,043$  varav  $\underline{k}(51,043) = 48,62 \cdot 10^{-2}$

0,001 " "  $\underline{q} = 3$  "  $\underline{w}_2 = 46,565$  "  $\underline{k}(46,565) = 48,62 \cdot 10^{-3}$

Som en utvidgning av den behandlade problematiken och en antydning om utvecklingslinjer kring läran om eller teorin för bindnings-, por- och kornkurvor får avslutningsvis nedanstående exempel tjäna.

4. I vårt instruktionsexempel svarande mot polygonkurvan 1. i figur 1. kan den del av porsystemet, som ligger i bindningsområdet  $100 \leq \underline{h}_t \leq 10^7$  cm v.p., betraktas som ett texturellt porsystem, ett av kornstorleksfördelningen mera entydigt bestämt porsystem. På motsvarande sätt kan den del av porsystemet, som ligger i bindningsområdet  $2 \leq \underline{h}_t \leq 100$  cm v.p. betraktas som ett strukturellt porsystem, mer eller mindre entydigt bestämt av en överlagrande makrostruktur.

Bestäm mot bakgrunden av denna aspekt på porsystemet:

a) parametrarna (koefficienterna)  $\log h_{t,o}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{w}_o$  och  $\underline{p}$  i uttrycket

$$\log h_t = \log h_{t,o} - b \tan \left[ (w - w_o) \frac{\pi}{p} \right] \quad (25)$$

så att en "hygglig" representation av den angivna polygonkurvan erhålles i bindningsområdet  $100 \geq h_t \geq 10^7$  cm v.p. svarande mot vattenhaltsområdet  $0 \leq \underline{w} \leq 48$  volymprocent.

Det är lämpligt, att i analogi med begreppet bindningskurva benämna funktioner av denna typ bindningsfunktioner. Bindningskurvan blir då bindningsfunktionens graf.

b) Bestäm även parametrarna i uttrycket

$$\log h_t = a - bw$$

för vattenhaltsområdet  $48 \leq \underline{w} \leq 58$  volymprocent dels b.1.) genom att bestämma  $\underline{a}$  och  $\underline{b}$  så, att bindningsfunktionens graf exakt går genom punkterna:  $P_1(48, 100)$  och  $P_2(58, 10)$  och dels b.2.) så, att även den mellanliggande punkten  $P(54, 30)$  blir likvärdigt beaktad enligt minsta kvadratmetoden!

c) Beräkna och rita upp graferna dvs. bindningskurvorna till de framtagna funktionerna!

### Lösning:

a) Den angivna funktionen innehåller fyra inom vissa gränser fritt bestämbara parametrar dvs. de i uppgiftsformuleringen angivna  $\log h_{t,o}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{w}_o$  och  $\underline{p}$ . Det angivna vattenhaltsområdet  $0 \leq \underline{w} \leq 48$  volymprocent innehåller sju experimentellt bestämda punkter och endast med hjälp av statistiska metoder kan alla punkter likvärdigt (ev. vägda) bli beaktade.

Vi söker nu den bindningsfunktion, vars graf uppfyller villkoret att exakt gå genom fyra "valda" punkter. Dessa punkter kan väljas med hänsyn till de villkor, som man i varje enskilt fall önskar att kurvan (funktionen) skall uppfylla.

Här väljer vi punkterna:  $P_1(0, 10^7)$ ,  $P_2(22, 15000)$ ,  $P_3(44, 1000)$  och  $P_4(48, 100)$ . Insättning av dessa värden ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \log 10^7 &= \log h_{t,o} - b \tan \left[ (0 - w_o) \frac{\pi}{p} \right] \\ \log 15000 &= \log h_{t,0} - b \tan \left[ (22 - w_o) \frac{\pi}{p} \right] \\ \log 1000 &= \log h_{t,o} - b \tan \left[ (44 - w_o) \frac{\pi}{p} \right] \\ \log 100 &= \log h_{t,o} - b \tan \left[ (48 - w_o) \frac{\pi}{p} \right] \end{aligned}$$

I detta ekvationssystem kan  $\log h_{t,o}$  och  $b$  relativt lätt elimineras och vi får ett ekvationssystem med två obekanta  $w_o$  och  $p$ , där varje ekvation består av en summa av fyra tangensuttryck i  $w_o$  och  $p$ . I M.F.U. XXVII finns en metod publicerad för lösningen av ekvationssystemet.

Den anförda metoden ger oss, om sex benämnda siffror medtages, uttrycket

$$\log h_t = 4,08733 - 0,591530 \tan \left[ (w - 24,6825) \frac{\pi}{56,5823} \right] \quad (a)$$

b) Den tidigare tillämpade tvåpunktsformeln (22') ger direkt den begärda lösningen under b.1.). Vi får

$$\frac{\log h_t - \log 100}{\log 10 - \log 100} = \frac{w - 48}{58 - 48}$$

och härav den enkla bindningsfunktionen

$$\log h_t = 6,8 - 0,1 w \quad (b)$$

Om parametrarna bestämmas så, att även den mellanliggande punkten likvärdigt beaktas, får vi svaret på den under b.2.) ställda frågan. Ekvationen blir, om fem benämnda siffror medtages

$$\log h_t = 6,7716 - 9,8985 \cdot 10^{-2} w \quad (c)$$

Skillnaden mellan ekvationerna är relativt liten men vi har förlorat den första ekvationens enkelhet.

c) I diagrammet på figur 2. är grafen, bindningskurvan till funktionen (a) uppritad i definitionsområdet  $0 \leq w \leq 48$  volymprocent. Bindningskurvan till funktionen (b) är även uppritad i dess motsvarande definitionsområde  $48 \leq w \leq 58$  volymprocent.

#### Anmärkningar

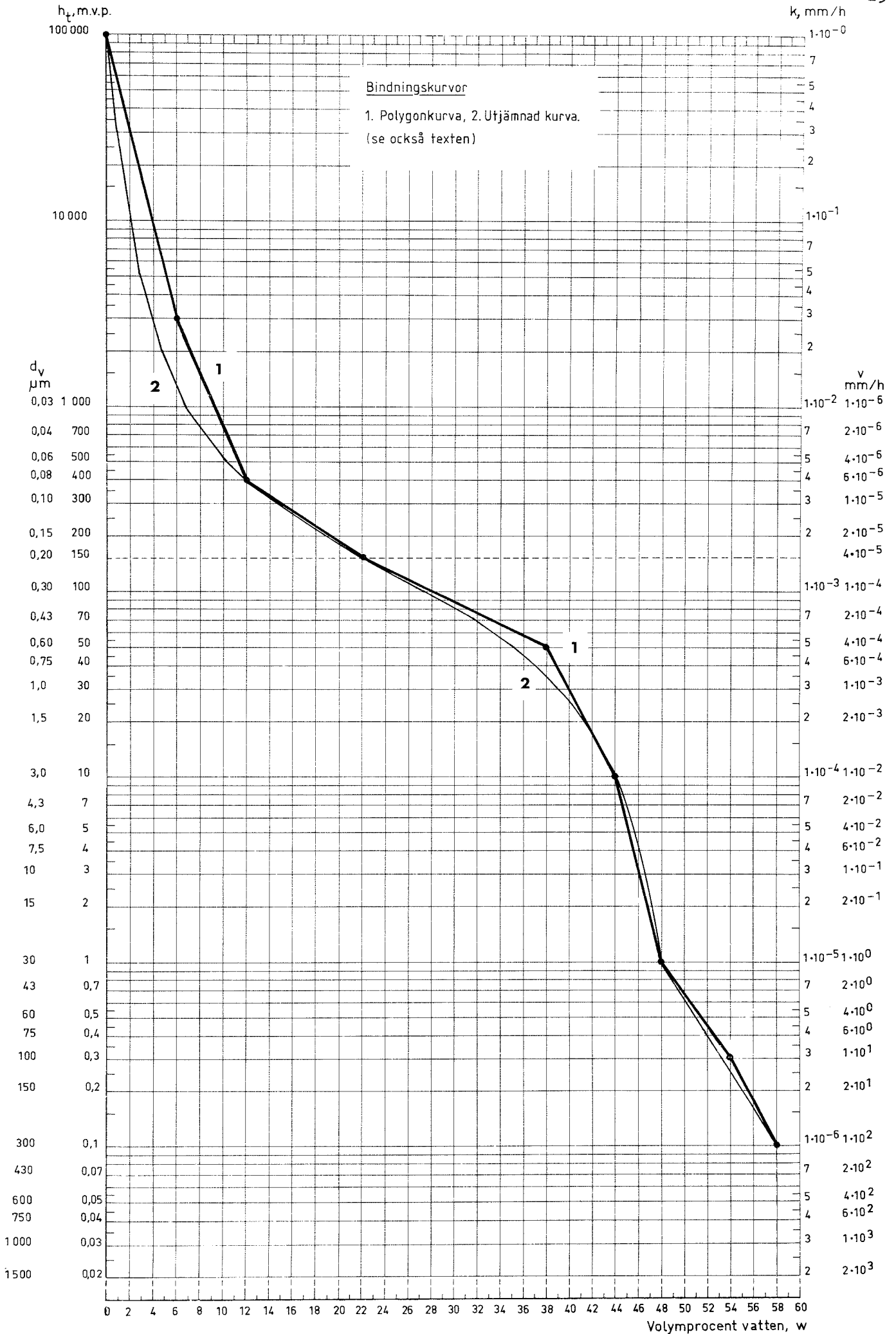
En log-tanfunktion kan bestämmas så, att den går genom punkterna;  $P_1(48, 100)$ ,  $P_2(51, 50,12)$  och  $P_3(58, 10)$ , där  $P_2$  representerar en godtyckligt vald punkt i intervallet  $P_2 - P_3$ . Vattenhaltsvärdet  $w = 50,12$  är då beräknat med hjälp av ekvationen (b).

Vi får

$$\log h_t = 2 - 75,7801 \tan \left[ (w - 48) \frac{\pi}{2380,83} \right] \quad (d)$$

Nedanstående sammanställning av beräknade värden visar, att log-tanfunktionen kan fås att med god tillnärmelse representera en rät linje.

<u>Vattenhalt w</u>	<u>48</u>	<u>51</u>	<u>54</u>	<u>56</u>	<u>58</u>
<u><math>h_t</math> ber. m. ekv. (d)</u>	100	50,12	25,12	15,85	10,00
<u><math>h_t</math> ber. m. ekv. (b)</u>	100	50,12	25,12	15,85	10,00



Figurtext

2. Här har parametrarna i det allmänna uttrycket

$$\log h_t = \log h_{t,0} - b \tan \left[ (w - w_0) \frac{\pi}{p} \right]$$

numeriskt blivit bestämda så, att funktionens graf, bindningskurvan, skall uppfylla villkoret att gå genom de fyra punkterna  $P_1(0, 10^7)$ ,  $P_2(22, 15000)$ ,  $P_3(44, 1000)$  och  $P_4(48, 100)$ . Om sex benämnda siffror medtages, skall funktionen skrivas

$$\log h_t = 4,08733 - 0,591530 \tan \left[ (w - 24,6825) \frac{\pi}{56,5823} \right]$$

och dess definitionsområde är  $0 \leq w \leq 48$  volymprocent.

I vattenhaltsområdet  $48 \leq w \leq 58$  volymprocent dvs. i området för det strukturella porsystemet kan bindningsfunktionen skrivas på den enkla formen

$$\log h_t = 6,8 - 0,1 w$$



#### D. Bilaga. HP-program

HP-programmet (HP-97) har mera direkt utformats i anslutning till den i texten såsom Metod 3. betecknade beräkningsmetoden. Det är framför allt avsett att användas, då en tabell över sammanhörande  $\overline{wh_t}$ -värden föreligger eller har upprättats och man vill upprätta en motsvarande tabell över sammanhörande  $\overline{wh_t k}$ -värden.

Programmet är som synes uppdelat på två Blad: Blad 1. och Blad 2., svarande mot var sitt magnetkort. Varje Blad innehåller flera mindre program, delprogram.

Några särskilda exempel och därtill anknutna kommentarer har ej utarbetats. Programmens uppbyggnad och användning torde framgå av ett närmare studium och av de i anslutning till pilarna angivna beteckningarna. De flesta av dessa beteckningar återfinns i den löpande texten.

För de i programutskriften införda anvisningarna med pilar gäller:

- a. snett uppåtriktade pilar anger inmatning av data.
- b. snett nedåtriktade streckade pilar anger var vissa "konstanta" data skall läggas in.
- c. horisontellt utåtriktade pilar anger utkommande beräkningsresultat eller var de kan hämtas ut.

Här följer nu en kort sammanställning av de olika programmen eller delprogrammen.

##### Blad 1.

LBLA (001).  $\underline{k}$ -värdet svarande mot det aktuella linjeelementets begynnelsepunkt läggs in i  $R_9$ . Det är betecknat med  $k(w_i)$ . Det aktuella linjeelementets ändpunktskoordinater  $(\underline{w}_i, \underline{h}_{t,i})$  och  $(\underline{w}_{i+1}, \overline{h}_{t,i+1})$  slås in.  $\underline{\Delta k}_i$  och  $\overline{k}_{i+1} = k(w_{i+1})$  erhålles utskrivna.  $\overline{k}_{i+1}$  lagras i  $R_9$  såsom det nya begynnelsevärdet. Konstanterna  $\underline{a}$  och  $\underline{b}$  i linjeelementets ekvation på formen

$$\log h_t = a - bw$$

kan hämtas ut ur  $R_A$  och  $R_B$ .  $\underline{A}_i$  betecknar konstanten framför parenteserna i ekvation (23') respektive ekvationen (24').

LBLB (054). För successiva beräkningar av  $\underline{k}$ -värdet i omedelbart följande intervall (linjeelement) behöver endast koordinaterna för den övre ändpunkten i riktningen växande  $\underline{w}$ -värden slås in.  $\underline{w}_i$  och  $\underline{h}_{t,i}$  står såsom beteckning för

ett sådant koordinatpar. Programmet tillåter även beräkningar av  $k$ -värden i det inre av ett under LBLA redan inslaget intervall.  $w_i$  och  $h_{t,i}$  betecknar då ett i intervallet liggande koordinatpar.

LBLC (068). Ett vattenhaltsvärde i det aktuella intervallet ger motsvarande  $h_t$ , bindningstryck i cm v.p. Detta under förutsättning av att programmet under LBLA är satt i funktion dvs. aktuella ändkoordinater blivit inslagna.

LBLc (076). Ett inslaget  $h_t$  ger motsvarande vattenhalt  $w$  dvs. här är bindningsfunktionens invers vattenhaltsfunktionen programmerad.

LBLD (084).  $w$  ger motsvarande  $k(w)$  förutsatt att  $w_i = w = w_{i+1}$ . Lämpat för beräkningar av  $k$ -värdets variationer i ett betraktat intervall, ett definierat linjeelement.

LBL E (097) och LBL7 (114). Dessa två program är avsedda att underlätta de mindre beräkningar, som behöver utföras, då metoderna 1. och 2. tillämpas.

LBL8 (126). Ett inslaget  $h_t$  (i cm v.p.) ger motsvarande medelhastighet  $v$  i porerna uttryckt i mm/h vid gradienten ett.

LBL9 (135). Om aktuell pordiameter  $x$  i cm slås in, erhålles medelhastigheten  $v$  mm/h i porerna för gradienten  $l = 1$  (= bindningstryckets tillväxt per enhet strömväg).

## Blad 2

Programmen (delprogrammen) på detta Blad har utformats i anslutning till det i löpande text genomgångna exempel 4. Bindningskurvan är här framställd på formen

$$\log h_t = \log h_{t,0} - b \tan \left[ (w - w_0) \frac{r}{p} \right]$$

Jämför här med ekvationen (25) i texten!  $k(w)$  kan här framställas som en integral över ett bredare vattenhaltsintervall och dess värde beräknas med hjälp av numerisk integration (kvadratur). Integrationsprogrammet finns under LBLA och programmet bygger på Simpsons formel.

Här anges de olika delprogrammen i den ordning, som krävs om programmen skall fungera.

LBL7 (112). Gällande parametrar:  $\log h_{t,o}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{p}$  och  $\underline{w}_o$  läggs in i aktuella register ( $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  och  $R_D$ ).

LBLD (082). För alla  $\underline{w}$  i definitionsområdet erhålles motsvarande  $\underline{h}_t$  (cm v.p.).

LBLE (097). Den inversa funktionen, vattenhaltsfunktionen, blir en arcustangensfunktion. Denna funktion är här programmerad. För alla  $\underline{h}_t$  i den direkta funktionens värdeförråd erhålles motsvarande  $\underline{w}$ .

LBLA (001).  $\underline{w}_1$  och  $\underline{w}_2$  är de valda integrationsgränserna och  $\underline{n}$  ( $= 2 \underline{m}$ ) är antalet dubbelintervall. Observera att  $\underline{n}$  måste vara ett jämnt tal! Under LBLC (060) är integranden, här  $\underline{h}_t^{-2}$  programmerad.

#### Anmärkning

Programmet under LBLA kan generellt användas för numerisk integration. Man programmerar den aktuella integranden under LBLC och avslutar med ett RTN.

Antag t.ex. att vi har den bestämda integralen

$$I = \int_2^{10} \ln x \, dx$$

Efter att ha infört integranden  $\ln x$  under LBLC ger inslagning av 2, 10 och  $\underline{n} = 10$   $I = 13,6391$ . Det korrekta värdet är 13,6396, vilket beräknats enligt uttrycket

$$I = \int_2^{10} \ln x \, dx = \left. x(\ln x - 1) \right|_2^{10} = 10(\ln 10 - 1) - 2(\ln 2 - 1) = 13,6396$$

Blad 1.

001	*LBLA	21 11	037	ST07	35 07	073	+	-55	110	ST+1	35-55 01
002	ST04	35 04	038	RCL4	36 04	074	10*	16 33	111	RCL1	36 01
003	R4	-31	039	X*	53	075	RTN	24	112	P2S	16-51
004	ST03	35 03	040	1/X	52	076	*LBLC	21 16 13	113	RTN	24
005	R4	-31	041	RCL2	36 02	077	LOG	16 32	114	*LBL7	21 07
006	ST02	35 02	042	X*	52	078	CHS	-22	115	X	-35
007	R4	-31	043	1/X	52	079	RCLA	36 11	116	1	01
008	ST01	35 01	044	-	-45	080	+	-55	117	0	00
009	RCL2	36 02	045	RCL7	36 07	081	RCLB	36 12	118	0	00
010	RCL4	36 04	046	X	-35	082	=	-24	119	=	-24
011	=	-24	047	PRTX	-14	083	RTN	24	120	R/S	51
012	LOG	16 32	048	RCL9	36 05	084	*LBLD	21 14	121	P2S	16-51
013	RCL3	36 03	049	+	-55	085	GSBC	23 13	122	ST+2	35-55 02
014	RCL1	36 01	050	PRTX	-14	086	X*	53	123	RCL2	36 02
015	-	-45	051	ST09	35 09	087	1/X	52	124	P2S	16-51
016	=	-24	052	SPC	16-11	088	RCL2	36 02	125	RTN	24
017	ST08	35 12	053	RTN	24	089	X*	53	126	*LBL8	21 08
018	RCL1	36 01	054	*LBL6	21 12	090	1/X	52	127	X*	53
019	X	-35	055	ST06	35 06	091	-	-45	128	1/X	52
020	RCL2	36 02	056	R4	-31	092	RCL7	36 07	129	9	09
021	LOG	16 32	057	ST05	35 05	093	-	-35	130	9	09
022	+	-55	058	RCL3	36 02	094	RCL8	36 08	131	3	03
023	ST0A	35 11	059	ST01	35 01	095	+	-55	132	6	06
024	1	01	060	RCL4	36 04	096	RTN	24	133	X	-35
025	0	00	061	ST02	35 02	097	*LBL5	21 15	134	RTN	24
026	0	00	062	RCL5	36 05	098	ST00	35 00	135	*LBL9	21 09
027	.	-62	063	ST03	35 03	099	X*Y	-41	136	X*	53
028	0	00	064	RCL6	36 06	100	X*	53	137	1	01
029	RCL8	36 12	065	ST04	35 04	101	1/X	52	138	.	-62
030	=	-24	066	ST0A	22 11	102	RCL0	36 00	139	1	01
031	1	01	067	RTN	24	103	X	-35	140	0	00
032	0	00	068	*LBLC	21 15	104	1	01	141	4	04
033	LH	32	069	RCLB	36 12	105	0	00	142	EEX	-27
034	=	-24	070	X	-35	106	0	00	143	5	05
035	2	02	071	CHS	-22	107	X	-35	144	X	-35
036	=	-24	072	RCLA	36 11	108	R/S	51	145	RTN	24
						109	P2S	16-51	146	R/S	51

Blad 2.

001	*LBLA	21 11	043	-	-45	085	RCLC	35 13
002	GSBC	23 05	044	1	01	086	=	-24
003	R4	-31	045	X=Y?	16-33	087	Pi	16-24
004	ST03	35 03	046	ST0B	22 12	088	X	-35
005	R4	-31	047	ST0A	22 16 11	089	TAN	43
006	ST02	35 02	048	*LBLB	21 12	090	RCLB	36 12
007	R4	-31	049	RCL4	36 04	091	X	-35
008	ST01	35 01	050	RCL5	36 05	092	CHS	-22
009	RCL2	36 02	051	X	-35	093	RCLA	36 11
010	RCL1	36 01	052	3	03	094	+	-55
011	-	-45	053	=	-24	095	10*	16 33
012	RCL3	36 03	054	RTN	24	096	RTN	24
013	=	-24	055	*LBLk	21 16 12	097	*LBL5	21 15
014	ST04	35 04	056	RCL1	36 04	098	LOG	16 32
015	RCL1	36 01	057	ST+5	35-55 05	099	RCLA	36 11
016	GSBC	23 13	058	ST0A	22 16 11	100	-	-45
017	ST+5	35-55 05	059	RTN	24	101	RCLB	36 12
018	RCL2	36 02	060	*LBLC	21 13	102	=	-24
019	GSBC	23 13	061	RCLD	36 14	103	TAN	16 43
020	ST+5	35-55 05	062	-	-45	104	RCLC	36 13
021	*LBL0	21 16 11	063	RCLC	36 13	105	Pi	16-24
022	1	01	064	=	-24	106	=	-24
023	ST+5	35-55 05	065	Pi	16-24	107	X	-35
024	RCL4	36 04	066	X	-35	108	CHS	-22
025	ST+1	35-55 01	067	TAN	43	109	RCLD	36 14
026	RCL1	36 01	068	RCLB	36 12	110	+	-55
027	GSBC	23 13	069	X	-35	111	RTN	24
028	2	02	070	CHS	-22	112	*LBL7	21 07
029	X	-35	071	RCLA	36 11	113	ST0D	35 14
030	ST01	35 01	072	+	-55	114	R4	-31
031	RCL5	36 05	073	2	02	115	ST0C	35 13
032	=	02	074	X	-35	116	R4	-31
033	=	-24	075	CHS	-22	117	ST0B	35 12
034	FRC	16 44	076	10*	16 33	118	R4	-31
035	X=0?	16-43	077	1	01	119	ST0A	35 11
036	ST06	22 16 12	078	0	00	120	RTN	24
037	RCL1	36 01	079	0	00	121	*LBL8	21 08
038	2	02	080	X	-35	122	0	00
039	X	-35	081	RTN	24	123	ST04	35 04
040	ST+5	35-55 05	082	*LBLD	21 14	124	ST05	35 05
041	RCL3	36 03	083	RCLD	36 14	125	ST06	35 06
042	RCL6	36 06	084	-	-45	126	RTN	24
						127	R/S	51



Denna serie rapporter utges av Avdelningen för lantbrukets hydroteknik, Sveriges Lantbruksuniversitet, Uppsala. Serien innehåller forsknings- och försöksredogörelser samt andra uppsatser som dedöms vara lämpade för mer allmän spridning. Uppsatser av huvudsakligen internt intresse publiceras i serien Avdelningsmeddelande. Tidigare nummer i rapportserien kan i mån av tillgång levereras från avdelningen.

This series of Reports is produced by the Division of Agricultural Hydrotechnics, Swedish University of Agricultural Sciences, Uppsala. The series consists of reports on research and field trials and of articles or papers considered to be of general interest. Articles of mainly internal interest are published in a series of Divisional Communications (Avdelningsmeddelande). Earlier issues in the Report series can be obtained from the Division of Agricultural Hydrotechnics (subject to availability).

---

DISTRIBUTION:

Sveriges Lantbruksuniversitet  
Avdelningen för lantbrukets hydroteknik  
750 07 UPPSALA, Sverige  
Tel. 018-171165, 171181

---