



LANTBRUKSHÖGSKOLAN
UPPSALA

Kompendium i elementär hydromekanik

I: Hydromekanikens grunder

John Sandsborg

INSTITUTIONEN FÖR MARKVETENSKAP

AVDELNINGEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK

STENCILTRYCK NR 65

UPPSALA 1973

Innehåll

	Sid.
Förord	
Del 1. Hydromekanikens grunder	
Kapitel 1. 1. Vätskors och gasers allmänna egenskaper samt definitioner av grundläggande begrepp	
1.1 Definition av en vätska eller en gas	7
1.2 Måttenheter	10
1.3 Viskositet	11
1.4 Densitet, specifik volym, specifik vikt, tryck	15
1.5 Gaser	16
1.6 Sammantryckbarhet	18
1.7 Ångtryck	19
1.8 Ytspänning	20
1.9 Kapillaritet	24
Kapitel 2. Hydrostatik	31
2.1 Begreppet vätsketryck	32
2.2 Trycket i en punkt	33
2.3 Nivåytor eller ekvipotentialytor	37
2.4 Hydrostatikens grundekvation	37
2.5 Tryckets tillväxt med djupet	44
2.6 Vätskeytan i ett kärl som roterar	50
2.7 Hydrostatiskt tryck mot plana ytor	54
2.8 Tryckcentrum och dess läge	56
2.9 Hydrostatiskt tryck mot buktiga ytor	59
2.10 Tryck på i vätska nersänkta kroppar	60
2.11 Dragspänningen i ett rör	62
2.12 Dragspänningen i ett tunt sfäriskt skal	63
Hydrodynamik	64
Kapitel 3. Grunddragen av vätske- och gasrörelsens kinematik	65
3.1 Hastighetsfältet	66
3.2 Hastighetsgradienter och skjuvspänningar	69
Kapitel 4. För vätskors och gasers strömning grundläggande begrepp och ekvationer	70
4.1 Begreppen system och kontrollvolym	71
4.2 Kontinuitets-, energi- och rörelsemängds- ekvationerna för bestämda kontrollvolymer	74

	Sid.
4.3 Strömningskarakteristika, definitioner	79
4.4 Strömlinjer och bankurvor	85
4.5 Kontinuitetsekvationen	87
4.6 Euler's rörelseekvation längs en strömlinje	94
4.7 Energiekvationen för endimensionell, stationär strömning	95
4.8 Sambandet mellan Euler's ekvationer och termodynamiska relationer	100
4.9 Bernoullis ekvation	101
4.10 Trycken i en strömmande vätska	107
4.11 Tillämpningen av Bernoullis ekvation och energiekvationen vid stationär strömning hos vätskor och gaser	112
4.12 Tillämpningen av den lineära rörelsemängds-ekvationen	120
 Kapitel 5. Dimensionsanalys och dynamisk likformighet	 136
5.1 Dimensionell homogenitet och dimensionslösa kvoter	137
5.2 Dimensioner och enheter	139
5.3 Dimensionsanalys	141
5.4 Likformighet - modellstudier	151
5.5 Reynolds tal och modellregel	153
5.6 Froudes tal och modellregel	156
 Kapitel 6. Viskösa effekter: Strömningsmotstånd	 161
6.1 Energiförluster vid inkompressibel, stationär, laminär strömning	162
6.2 Laminär strömning i cirkulära rör	164
6.3 Laminär strömning i öppen ledning. Medelhastigheten och vätskeföringen vid laminär strömning över ett brett plan	169
6.4 Reynolds kritiska tal	171
6.5 Stokes lag	174
6.6 Turbulent strömning i cirkulära rör	175
6.7 Turbulent strömning i öppna ledningar	177
6.8 Moodydiagrammet (f-Re-diagrammet)	180
6.9 De Chezy's och Gauckler-Hagen-Stricklers formler för rörledningar	183
6.10 Särskilda motstånd i slutna ledningar	187
6.11 Inloppsförluster i brotrummar	189

	Sid.
Kapitel 7. Ideala vätskors och gasers strömning	190
7.1 Fordringar på ideala vätskors och gasers strömning	191
7.2 Vektoroperatören $\vec{\nabla}$	191
7.3 Eulers rörelseekvation	198
7.4 Rotationsfri strömning. Hastighetspotentialen	203
7.5 Bernoullis ekvation för rotationsfri strömning	206
7.6 Strömfunktionen. Gränsvillkor	208
7.7 Strömnätet	211

1. Hydromekanikens grunder

Vätskors och gasers allmänna egenskaper samt
definitioner av grundläggande begrepp

1.1 Definition av en vätska eller en gas

Vätskor och gaser är substanser, som deformeras kontinuerligt, när de utsätts för skjuvspänningar, hur små dessa än är.

En skjuvspänning är riktad längs tangenten till en yta och denna kraft dividerad med ytans area är medelskjuvspänningen över ytan.

Skjuvspänningen i en punkt fås som gränsvärdet mellan skjuvspänningen och ytan då arean går mot noll (reduceras till en punkt).

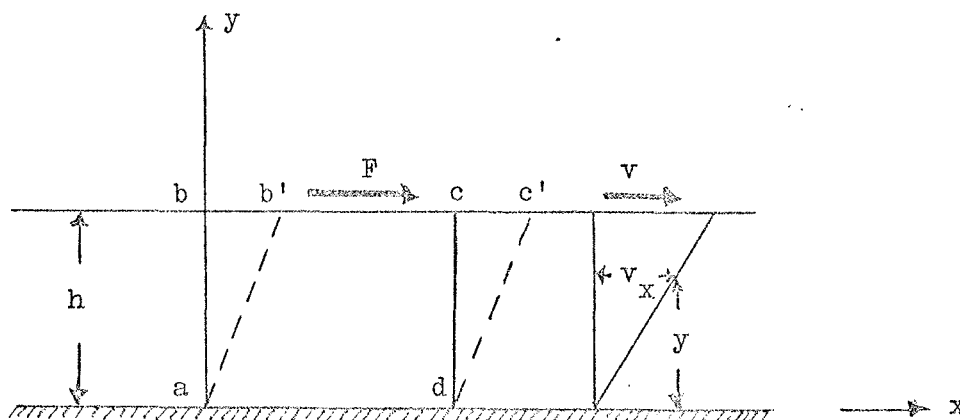


Fig. 1.1 Deformation som resultatet av en anbringad konstant skjuvspänning

I fig. 1.1 är en substans placerad mellan två närliggande parallella plattor, så stora, att förhållandena vid kanterna kan försummas. Den nedre plattan är fast medan den övre är rörlig. En kraft F anbringas i den övre plattan och förorsakar en skjuvspänning på en godtycklig substans mellan plattorna av storleken F/A , om A är den övre plattans area.

Om nu kraften F åstadkommer, att den övre plattan rör sig med en jämn hastighet (skild från noll), oavsett hur liten kraften F är, då kan den slutsatsen dras, att substansen mellan de två plattorna är en vätska eller en gas.

En vätska eller en gas i omedelbar kontakt med en fast gränsyta har samma hastighet som denna, dvs. det föreligger ingen glidning vid själva gränsytan. Detta är experimentellt fastställt; har verifierats i otaliga försök.

Vätskan eller gasen inom ytan abcd i fig. 1.1 strömmar till det nya läget ab'c'd med varje vätske- eller gaspartikel i en rörelse parallell med plattorna och med hastigheten varierande likformigt från noll vid den nedre fasta plattan till v vid den övre rörliga plattan.

Experiment visar, att om andra faktorer hålls konstanta, så är F direkt proportionell mot A och v och omvänt proportionell mot h . I ekvationens form

$$F = \mu \frac{Av}{h}$$

där μ är en proportionalitetsfaktor.

Om $\tau = F/A$ fås

$$\tau_{\text{lam.}} = \mu \frac{v}{h}$$

Kvoten v/h är vinkelhastigheten för linjen ab, eller graden av vätskans (eller gasens) vinkeldeformation, dvs. graden av minskning i vinkeln bad.

Vinkelhastigheten kan också skrivas dv_x/dy , eftersom både v/h och dv_x/dy uttrycker hastighetsförändringen dividerad med det avstånd längs vilket förändringen inträffar.

Emellertid är uttrycket dv_x/dy mera generellt, eftersom det gäller för situationer vid vilka vinkelhastigheten och skjuvspänningen ändras med y .

Hastighetsgradienten dv_x/dy kan också sägas ange den hastighet med vilken ett skikt rör sig relativt ett närliggande skikt. I differentialform blir

$$\tau_{\text{lam.}} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad 1.1.1$$

I ord uttryckt är relationen ovan lika med sambandet mellan skjuvspänning och graden av vinkeldeformation vid en gas eller en vätskas en-dimensionella strömning.

Proportionalitetsfaktorn μ kallas gasens eller vätskans viskositet och ekvationen (1.1.1) Newtons viskositetslag.

En plastisk substans uppfyller ej definitionen på en vätska eller gas given på sidan 7, beroende på, att substansen har en inneboende skjuvspänning, som måste övervinnas innan en kontinuerlig deformation kan åstadkommas.

En elastisk substans, placerad mellan plattorna, kommer att deformeras till ett bestämt belopp proportionellt mot kraften, men ej kontinuerligt vid en bestämd hastighet.

Ett komplett vacuum mellan plattorna kommer ej att resultera i en konstant slutlig hastighet utan i en ständigt ökande sådan.

Placeras sand mellan de två plattorna kommer torrfriktionen att kräva en bestämd kraft för att åstadkomma en kontinuerlig rörelse. Således satisfierar sanden ej definitionen på en vätska eller en gas.

Vätskor och gaser kan klassificeras som "Newtonska" eller "icke-Newtonska". Hos "Newtonska" vätskor eller gaser föreligger en lineär relation mellan storleken på den anbringade skjuvspänningen och den resulterande deformationsgraden. I ekvationen (1.1.1) är då μ konstant, vilket framgår av fig. 1.2.

Är vätskan eller gasen "icke-Newtonsk" blir sambandet mellan skjuvspänningen och deformationsgraden ej lineärt.

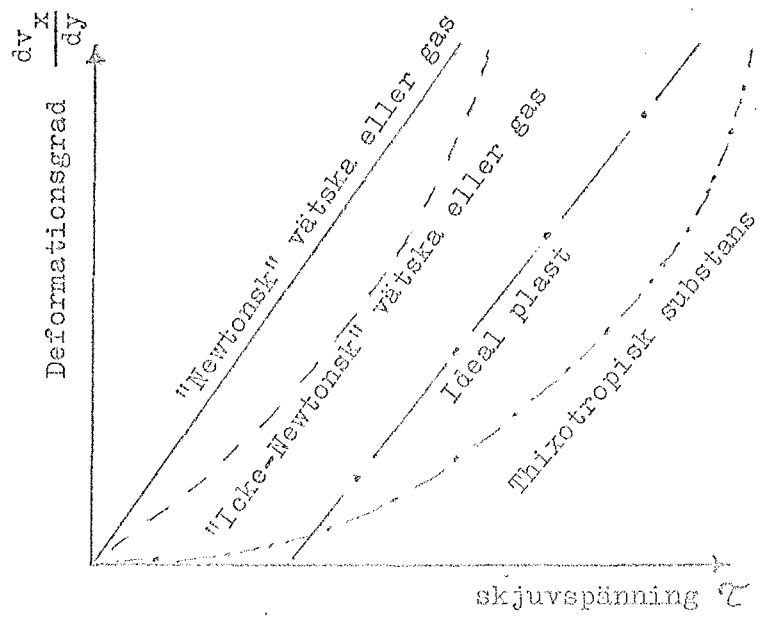


Fig. 1.2 Rheologiskt diagram

En ideal plastmassa har en bestämd inneboende skjuvspänning och en konstant linjär relation mellan τ och dv_x/dy .

En thixotropisk substans, sådan som trycksvärta, har en viskositet vilken är beroende av substansens omedelbart föregående vinkeldeformation.

Gaser och tunnflytande vätskor (t.ex. vatten) tenderar att vara "Newtonska", medan tjockflytande hydrokarboner med långa molekylkedjor kan vara "icke-Newtonska".

För analysändamål göres ofta det antagandet, att en vätska eller en gas ej är viskös. Med ingen viskositet blir skjuvspänningen alltid noll oavsett vätskans eller gasens rörelse. Anses sedan en vätska vara osammantryckbar benämnes den ideal.

1.2 Måttenheter

Storleken av enheterna för mekaniska egenskaper och verkningar härleds ur Newtons andra lag.

Denna lag anger, att en massa, som rör sig på grund av en anbringad kraft, kommer att accelereras och att kraftkomponenten i accelerationsriktningen blir proportionell mot produkten av massan och accelerationen.

Väljes enheterna sådana, att en kraftenhet, verkande på en massenhet, producerar en accelerationsenhet kommer proportionalitetskonstanten att bli ett, och vi kan skriva att kraften är lika med massan gånger accelerationen. Vi får vektorekvationen:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad 1.2.1$$

där

$$\vec{F} = \text{kraft (N, dyn)}$$

$$m = \text{massa (vikt) (kg, g)}$$

$$\vec{a} = \text{acceleration (m/sek}^2, \text{ cm/sek}^2)$$

Här kommer att förordas det alltmera accepterade SI-systemet (Système Internationale), som använder kraftenheten 1 Newton, massenheten 1 kg och accelerationsenheten 1 m per sek².

I ekvationsform

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/sek}^2$$

Äldre enhetssystem

CGS-systemet

Längd: 1 cm = 10^{-2} m

Tid: 1 sek

Massa: 1 g = 10^{-3} kg

Äldre tekn. syst.

Längd: 1 m

Tid: 1 sek

Kraft: 1 kp, dvs. den kraft, som ger massan 1 kg en acceleration av 9,80665 m per sek²

Ekvationer och enhetsbyten

Storhet = måttetal · enhet. Ex: 3,0 m/sek = måttetalet 3 · enheten 1 m/sek

Storhetsekvation: Samband mellan storheter

Måttetalsekvation: Samband mellan måttetal

Dimension: Två storheter har samma dimension om deras enheter är lika bortsett från ett måttetal

Enhetsbyten: Algebraisk operation. Ex: $30 \text{ m/sek} = 30 \frac{\frac{\text{km}}{1000}}{\frac{\text{h}}{3600}} = 30 \frac{\text{km} \cdot 3600}{\text{h} \cdot 1000}$

$$= 30 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \text{ km/h}$$

1.3 Viskositet

Av alla egenskaper hos vätskor och gaser har, då det gäller dessas strömning, viskositeten ett avgörande inflytande.

Viskositeten är den egenskap hos en vätska eller gas genom vilken dessa bjuder motstånd mot skjuvspänningar.

Sirap och tjära är exempel på vätskor med hög viskositet; vatten och luft har låg viskositet.

Viskositeten hos en gas ökar med temperaturen, medan den hos en vätska minskar med temperaturen. Olikheterna kan förklaras genom en undersökning av orsakerna till viskositeten.

Motståndet hos en vätska eller en gas mot skjuvspänningar beror på kohe- sionen, dvs. den molekylära attraktionen, och på överföringsgraden av molekylär rörelsemängd.

En vätska med mycket större molekylär täthet än en gas har mycket större kohesiva krafter än en gas.

Kohesion förefaller att vara den helt dominerande orsaken till viskositet hos en vätska och eftersom kohesionen minskar med temperaturen gör viskositeten detsamma.

En gas, å andra sidan, har mycket små kohesiva krafter. Det mesta av motståndet mot skjuvspänningar hos en gas är resultatet av överföring av molekylär rörelsemängd.

Hur överföring av rörelsemängd kan ge upphov till en tydlig skjuvspänning framgår av följande.

Vi har två "idealiserade" järnvägsvagnar lastade med vattenabsorberande material placerade på parallella spår enligt fig. 1.3 (nedan).

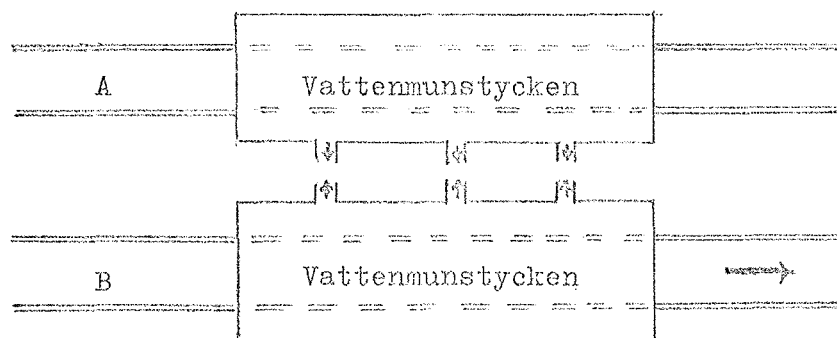


Fig. 1.3 Skiss illustrerande överföring av rörelsemängd.

Vi antar att varje järnvägsvagn har en vattentank och pump med slangar vars munstycken är riktade vinkelrätt mot järnvägsspåren.

Först hålles A stilla medan B rör sig åt höger med vatten sprutande över A. Vattnet tas upp av det absorberande materialet på A, och A kommer att sättas i rörelse på grund av strålarnas rörelsemängdskomponent, som är parallell med järnvägsspåren. Rörelsemängdskomponenten ger upphov till en tydlig skjuvspänning mellan A och B.

Om nu vatten pumpas från A över till B med samma mängd per tidsenhet som från B till A, kommer B att sakta farten, och resultatet blir lika stora och motsatt riktade skjuvspänningar.

När A och B är stationära eller har samma hastighet åstadkommer pumpningen av vattnet ingen påvisbar skjuvspänning på någondera järnvägsvagnen.

Inom en vätska eller en gas förekommer alltid en transport av molekyler fram och tillbaka över en godtycklig fiktiv yta förlagd inom mediet. När ett skikt rör sig relativt ett närliggande, överför den molekyllära rörelsemängdstransporten rörelsemängder från den ena sidan till den andra, med påföljd att en tydlig skjuvspänning uppkommer. Denna motverkar den relativa rörelsen och tenderar att utjämna hastigheterna för närliggande skikt på ett sätt, som är analogt med det i fig. 1.3.

Måttet på rörelsen hos ett skikt relativt ett närliggande är dv_x / dy .

Molekyllär aktivitet ger i gaser upphov till en tydlig skjuvspänning, som är av avsevärt större betydelse än den de kohesiva krafterna förorsakar.

Eftersom den molekyllära aktiviteten stiger med temperaturen ökar också viskositeten med denna.

Vid ordinära tryck är viskositeten oberoende av trycket och beror enbart på temperaturen.

En vätska eller en gas i vila, eller i rörelse, så att inget skikt rör sig relativt ett närliggande, kommer ej att ha någon tydlig skjuvspänning, oavsett viskositeten, eftersom dv_x / dy är lika med noll i hela mediet.

Därför behövs i hydrostatiken ej någon hänsyn tas till skjuvspänningar. De enda spänningar, som där återstår, är normalspänningar eller normaltryck.

Detta förenklar hydrostatiska studier av en vätska eller en gas avsevärt. Vilken som helst "fri kropp" av mediet påverkas endast av tyngdkrafter och ytkrafter (normalt riktade).

Dimensionen för den absoluta eller dynamiska viskositeten fås ur Newtons viskositetslag (ekv. 1.1.1). Vi löser ut μ och erhåller

$$\mu = \frac{\tau_{lam.}}{dv_x / dy}$$

Insättning av dimensionerna M, L, T för massa, längd och tid ger

$\zeta_{\text{lam.}} = \frac{F}{A} : \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} : \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}{L^2}$ $\frac{v_x}{x} : \frac{L \cdot T^{-1}}{L}$ $y : L$ och $\underline{\mu}$
 får dimensionen $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$.

Den dynamiska viskositeten μ i SI-enheter blir kg per m per sek. Eftersom ζ har dimensionen kraft per ytenhet (N/m^2) kan μ också uttryckas i dimensionen $\frac{\text{kraft} \cdot \text{tid}}{\text{yta}}$ enligt följande

$$\mu : \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L}{L \cdot T^{-1}} : \frac{F \cdot T}{L^2} \quad \text{t.ex.} \quad \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \quad (\text{dekapois})$$

Fortfarande mätes μ ofta i CGS-enheter: g per cm per sek eller dyn-
 sek. per cm². Enheten kallas pois. Här uttryckes μ oftast i 0,01 pois
 eller centipois.

Definitioner på μ

1 dekapois eller 1 Ns/m² är den dynamiska viskositeten hos ett homogent material i vilken en skjuvspänning av 1 N/m² åstadkommer en hastighetsgradient av 1 m per sek per m (Lundberg: Hydromaskinlära).

Viskositetskonstanten μ även kallad dynamisk viskositet är den kraft varmed ytenheten av ett skikt påverkas då hastighetsdifferensen mellan detta och ett med detsamma parallellt skikt, beläget på längdenhetens avstånd är lika med hastighetsenheten (Svensk Uppslagsbok).

Kinematisk viskositet

Kinematiska viskositeten är förhållandet mellan absoluta eller dynamiska viskositeten och densiteten. I ekvationsform.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad 1.3.1$$

Dimensionen blir

$$\nu : \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}}{M \cdot L^{-3}} : L^2 \cdot T^{-1}$$

Enheten i SI-systemet är myriastok eller 1 m²/sek.

ν i CGS-enheter benämnes stok (cm²/sek) och 1 stok = 10⁻⁴ m²/sek.

Kinematiska viskositeten hos vätskor och gaser vid ett givet tryck är huvudsakligen en funktion av temperaturen.

Tabell 1.1. Kinematiska viskositeten ν (m^2/sek) för vatten

Temperatur, $^{\circ}\text{C}$	$\nu \cdot 10^{-4} = \text{cm}^2/\text{sek}$ (stok)
0	0.0178
10	0.0131
15	0.0114
20	0.0101
50	0.0055
100	0.0027

1.4 Densitet, specifik volym, specifik tyngd, specifik vikt, tryck

Densiteten ρ för en vätska eller en gas definieras som massa per volymenhet.

Specifika volymen v_s är inverterade värdet av densiteten ρ , dvs. den volym som upptas av massenheten. Således

$$v_s = \frac{1}{\rho} \quad 1.4.1$$

Specifika tyngden ρ_g för en substans är dess tyngd per volymenhet. Den förändras med lokalen beroende på ändringarna i tyngdkraftsaccelerationen.

Specifika vikten (egentliga vikten) ρ_s anger förhållandet mellan vikten (i lufttomt rum) av en viss volym av en viss substans och vikten (ävenledes i lufttomt rum) av en lika stor volym av en normalsubstans.

Vanligen väljes som normal-substans vatten av $+4^{\circ}\text{C}$. Då specifika vikten varierar med temperaturen bör vid noggrann angivelse den temperatur till vilken angivelsen hänför sig, uppges.

Specifika vikten för vätskor kan bestämmas med pyknometer, aerometer eller Mohrs våg.

Vid bestämning av specifika viken för fasta kroppar kommer huvudsakligen hydrostatiska vågen eller, då det gäller pulverformiga kroppar, pyknometern till användning.

Anmärkningsvärd är relationen mellan spec. vikten och densiteten hos en kropp.

Om man hänför spec. vikten till vatten av $+4^{\circ}\text{C}$, där vattnets densitet är $999,973 \text{ kg/m}^3$, dvs. mycket nära 1000 kg/m^3 , så får spec. vikt och densitet praktiskt taget samma talvärde, om man bortser från den i de flesta fall betydelselösa avvikelser från värdet 1000 kg/m^3 av vattnets densitet vid $+4^{\circ}\text{C}$.

Ur fysikalisk synpunkt består den helt avgörande skillnaden mellan spec. vikt och densitet i, att spec. vikten är ett dimensionslöst tal, medan däremot densiteten har dimensionen av en massa dividerad med en volym.

Trycket p är kraft per ytenhet. Om en volym av ett ämne kan isoleras som en "fri kropp" omfattar kraftsystemet, som verkar på volymen yt-krafter över varje ytelement, som begränsar volymen. I allmänhet kommer en ytkraft att ha komponenter vinkelräta emot och parallella med den berörda ytan.

I vilken som helst punkt benämnes den vinkelrätt riktade kraftkomponenten per ytenhet normaltryck. Om detta är ett kompressionstryck kallas det helt enkelt för tryck.

Tryck är en skalär kvantitet och kraften förbunden med ett givet tryck, som verkar på en ytenhet, är $p dA$ med en riktning längs normalen till enhetsarean dA .

Således är tryckkraftens riktning i en punkt i det inre av en volym av en vätska eller en gas beroende av ett eventuellt plans orientering genom punkten.

Tryck mätes relativt till ett absolut nollvärde (absolut tryck) eller relativt till atmosfärstrycket (tryck). Således:

$$p (\text{tryck}) = p (\text{absolut}) - p_{\text{atm.}} (\text{absolut})$$

1.5 Gaser

En homogen gas lyder gasernas allmänna tillståndslag (Gay-Lussacs-Mariottes)

$$p \cdot v_s = R_i \cdot T \quad 1.5.1$$

där p är absoluta trycket, v_s specifika volymen, dvs. volymen av t.ex. 1 g av gasen, R_i den individuella gaskonstanten och T absoluta temperaturen.

Ekvationen 1.5.1 kan skrivas

$$p = \rho \cdot R_i \cdot T \quad 1.5.2$$

Vid konstant temperatur, dvs. isotermisk tillståndsändring, följer gaserna Boyle-Mariottes lag

$$\frac{p}{\rho} = R_i \cdot T = \text{konst.} \quad 1.5.3$$

Vid konstant tryck, dvs. isobar tillståndsändring, gäller Gay-Lussacs lag, enligt vilken gasens specifika volym är proportionell mot temperaturen

$$p = \rho \cdot R_i \cdot T = \text{konst.} \quad 1.5.4$$

Volymen v av m massenheter av en gas är $m v_s$ varför

$$p \cdot v = m \cdot R_i \cdot T \quad 1.5.5$$

Vi kan med fördel skriva gasernas allmänna tillståndslag på molbasis. En kgmol av en gas är lika många kg av gasen, som molekylvikten anger, t.ex. en kgmol O_2 är 32 kg. Med v_s lika med molvolymen fås:

$$p \cdot v_s = M \cdot R_i \cdot T \quad 1.5.6$$

om M är molekylvikten. I allmänhet om n är antalet moler av gasen i volymen v

$$p \cdot v = n \cdot M \cdot R_i \cdot T \quad 1.5.7$$

eftersom $n \cdot M = m$.

Nu gäller enligt Avogadros lag, att lika volymer av gaser vid samma absoluta temperatur och tryck innehåller lika många molekyler; varför deras massor är proportionella mot molekylvikten.

Av ekv. 1.5.7 ser vi att MR_i måste vara konstant, eftersom $p \cdot v/n \cdot T$ är konstant för vilken som helst homogen gas.

Produkten MR_i benämnes den universella gaskonstanten, vars värde endast är beroende av de valda enheterna.

$$R_u = MR_i = 8,3143 \text{ J/mol K} = 8,3143 \cdot 10^7 \text{ erg/mol K}$$

Avogadros tal $N_A = 6,02252 \cdot 10^{23}$ per mol

Molvolymer av en homogen gas (0° , 1 atm):

$$V_0 = 2,24136 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{mol}$$

1.6 Sammantryckbarhet

Vätskor har, till skillnad från gaser, en ringa sammantryckbarhet, som varierar med temperatur, tryck och den mängd gaser, som finns lösta.

Sambandet mellan en tryckökning och motsvarande volymsminskning hos en vätska vid isoterm tillståndsändring kan skrivas

$$\Delta p = k \frac{\Delta V}{V} \quad 1.6.1$$

där Δp = tryckökning

ΔV = volymsminskning

V = total ursprunglig volym

k = sammantryckbarhetsmodul (för vatten $203 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 = 20700 \text{ kp/cm}^2$)

Vattnets sammantryckbarhet kan ha praktisk betydelse, när en tryckökning äger rum hos en begränsad vattenvolym.

Detta kan ske i en rörledning eller kraftverkstubb när en ventil eller turbin öppnar eller stänger.

Förhållandet kan också uppkomma i en stor artesisisk grundvattenström vid grävning av brunn.

Vid provtryckning av långa rörledningar måste man räkna med vattnets sammantryckbarhet.

I de allra flesta fall kan man dock i praktiken anse vattnet som osammantryckbart.

Exempel 1.1

För provning av en 1200 m lång huvudvattenledning med 0,8 m inre diameter tillslutes ledningens båda ändar med vattentäta ändflänsar. Sedan ledningen fyllts med vatten sättes den under 10 at övertryck med en högtryckspump. Beräkna hur mycket vatten, som måste inpumpas i ledningen om ingen fri luft finns i ledningen vid provningens början och skarvarna är täta. Rörets utvidgning försummas. Sammantryckbarhetsmodulen k sättes till 20 000 kp/cm².

Lösning: Vi har att $\Delta p = k \frac{\Delta V}{V}$

dvs. $\Delta V = \frac{1}{k} \cdot \Delta p \cdot V$ eller

$$\Delta V = \frac{1}{20000 \cdot 10^4} \cdot 10 \cdot 10^4 \cdot 1200 \cdot \pi \cdot 0,4^2 = 0,3016 \text{ m}^3 =$$

= volymsminskningen hos vattnet i tuben före tryckökningen.

Motsvarande vattenmängd måste inpumpas och har vid 0 atö volymen ΔV_0 .
Då fås

$$\Delta V_0 = \frac{1}{20000 \cdot 10^4} \cdot 10 \cdot 10^4 \cdot \Delta V_0 = 0,3016$$

$$\Delta V_0 = \frac{0,3016}{0,9995} = 0,302 \text{ m}^3$$

1.7 Ångtryck

Det tryck vid vilket en vätska kokar benämnes dess ångtryck, och är det jämviktspartialtryck, som de från vätskeytan lösgjorda vätskemolekylerna utövar över en godtycklig fri yta.

Ångtrycket stiger med temperaturen.

I ej få situationer, där vätska förekommer i ett system, händer det att mycket låga tryck uppträder i vissa bestämda punkter av systemet. Under sådana omständigheter kan trycken bli lika med eller mindre än ångtrycket. När detta inträffar övergår vätskan mycket snabbt i ånga. Detta fenomen kallas för kavitation.

En snabbt expanderande ångficka eller kavitet bildas, som vanligen föres bort från platsen, där den bildas, till regioner i strömningen där trycket är högre än ångtrycket. Kaviteten kollapsar.

Denna tillväxt och upplösning av ångbubblor påverkar verkningsgraden hos hydrauliska pumpar och turbiner och kan medföra erosion av metall-delarna där kaviteterna uppkommer.

1.8 Ytspänning

Molekylär attraktion och ytenergi

Arbete vid kohesion och adhesion

Alla materiella kroppar, vare sig de är fasta eller flytande, utövar på varandra en attraktionskraft, som är direkt proportionell mot kropparnas massor och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan deras masscentra, dvs.

$$F = \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \qquad 1.8.1$$

Helt skild från en sådan massattraktion är en elektrokemisk kraft kallad molekylär attraktion, som ger upphov till egenskaper hos vätskor benämnda kohesion och adhesion.

Man kan säga att den huvudsakliga skillnaden mellan massattraktion och molekylär attraktion är, att den senare kraften är verksam på ett ytterst litet avstånd.

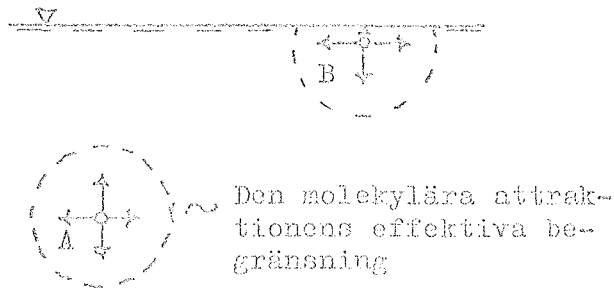


Fig. 1.4. Molekylär attraktion

En molekyl i punkt A i ovanstående figur kommer att attraheras lika i alla riktningar genom inverkan av angränsande molekyler, medan en molekyl i punkt B, mycket nära en fri yta, blir utsatt för en mindre kraft från den fria ytans sida, där ett mindre antal molekyler är verksamma. Följden blir att molekyler nära en vätskeyta kommer att utsättas för en resulterande kraft, som verkar vinkelrätt inåt från ytan.

För att åstadkomma en fri yta inom en vätska måste ett arbete utföras, som övervinner molekylernas ömsesidiga attraktion på båda sidor om separationszonen.

Existensen av en fri yta anger då närvaron av vad som benämnes ytenergi, lika stor som arbetet åstadkommit vid ytans bildande.

Anges denna energi per ytenhet med symbolen γ blir det erforderliga arbetet W , vid delning av en vätskepelare med godtyckligt tvärsnitt A , $2A\gamma$, eftersom två fria ytor med arean A har bildats.

Kvantiteten

$$\frac{W}{A} = 2\gamma \quad (\text{N m/m}^2 = \text{N/m}) \quad 1.8.2$$

kallas vätskans kohesionsarbete.

Storleken av γ för en given vätskeyta kommer att bli beroende av storleken av attraktionskrafterna, ej endast mellan vätskans egna molekyler utan också av motsvarande i mediet på andra sidan ytan.

För att åstadkomma delning av två vätskor längs en beröringsyta med arean A måste det erforderliga arbetet vara lika med skillnaden mellan ytenergien för de två fria ytorna $A\gamma_a + A\gamma_b$ och ytenergien för den ursprungliga beröringsytan $A\gamma_{ab}$.

Sålunda

$$\frac{W_{ab}}{A} = \gamma_a + \gamma_b - \gamma_{ab} \quad 1.8.3$$

Alldeles som kvantiteten $W/A = 2\gamma$ kan sägas ange kohesionsarbetet i en given vätska, så är kvantiteten W_{ab}/A ett uttryck för adhesionsarbetet mellan två vätskor.

Ju mindre värdet på W_{ab}/A är (dvs. ju större γ_{ab} är i förhållande till $\gamma_a + \gamma_b$) ju mindre uttalad kommer adhesionen att bli mellan de två vätskorna och vice versa.

Härav följer, att om γ_{ab} blir likamed noll - eller negativ - så kommer de två vätskornas molekyler att ha åtminstone lika stor attraktion till varandra, som den mellan molekylerna inom varje vätska för sig; ett

tillstånd av fullständig blandbarhet uppkommer. Den resulterande processen av molekylär blandning eller diffusion kommer snart att utplåna den ursprungliga kontaktytan.

Föreställningen om begreppet ytenergi är användbar, när man vill förklara sådana fenomen som spridningen av vissa oljor på en vattenyta, och tendensen hos alla vätskor att bilda sfäriska droppar (dvs. kroppar med s.k. "minimumyta") när de sprutas ut i luften.

Bildandet av en ny yta kräver ej endast mekanisk energi utan även - om ytans temperatur skall vara oförändrad - värmeenergi.

Vi har också, att en resulterande kraft vinkelrät mot vilken som helst yta måste motverkas av en lika stor och motsatt riktad kraft om statisk jämvikt skall bestå. Det måste finnas ett inre tryck inom en vätska av sådan storlek, att det motverkar ytkrafter beroende av obalanserade molekylära attraktionskrafter.

Så länge som ytan ifråga är plan kommer storleken av trycket beroende på molekylära krafter att vara så liten, att den är omöjlig att direkt mäta. Emellertid, så snart ytan har krökts kommer ifrågavarande tryck att både bli påtagligt och mätbart.

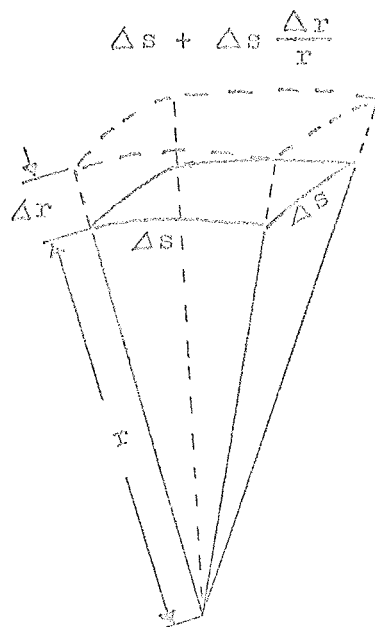


Fig. 1.5. En sfärisk vätska-gas kontaktyta.

Vi betraktar i ovanstående figur en schematiskt återgiven sfärisk vätska-gas kontaktyta.

Ytenergien kan enligt det föregående tecknas $\gamma (\Delta s)^2$. Om nu ytan förflyttas den radiala distansen Δr kommer ytenergien att bli (approximativt) $\gamma (\Delta s + \Delta s \frac{\Delta r}{r})^2$.

Om arbetet mot de intermolekylära krafterna, som är följden av denna förändring i ytenergi, utförs bara av den radiella kraften $\Delta p (\Delta s)^2$ (tyngdkraftseffekter negligeras), ett resultat av tryckdifferensen mellan den konkava och konvexa sidan av beröringsytan, så fås:

$$\begin{aligned} w &= \Delta p (\Delta s)^2 \Delta r = \gamma (\Delta s + \Delta s \frac{\Delta r}{r})^2 - \gamma (\Delta s)^2 = \\ &= \gamma (\Delta s)^2 + \gamma (\Delta s)^2 (\frac{\Delta r}{r})^2 + 2 \gamma (\Delta s)^2 \frac{\Delta r}{r} - \gamma (\Delta s)^2 \end{aligned}$$

Vi dividerar med $(\Delta s)^2 \Delta r$ och får $\Delta p = \gamma \frac{\Delta r}{r^2} - \frac{2\gamma}{r}$

Vi låter $\Delta r \rightarrow 0$ och erhåller till slut

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} \quad (\text{N/m}^2) \quad 1.8.4$$

Tryckdifferensen vid en sfärisk yta är alltså proportionell mot kvoten emellan ytenergien och ytans kurvradie.

Lägg märke till ur härledningen, att trycket alltid är högre på den konkava sidan.

Kraftdiagram för adhesion och kohesion

För att illustrera metoden med kraftdiagram betraktar vi kraftmotsvarigheten till den analys som leder till ekvationen $\Delta p = 2\gamma/r$.

I stället för att undersöka arbetsåtgången vid ökningen av vätskeytan i fig. 1.5 sid. 22, är det endast nödvändigt att anta närvaron av ett system av kraftvektorer, vilka verkar vid kanterna av ytan enligt nedanstående figur.

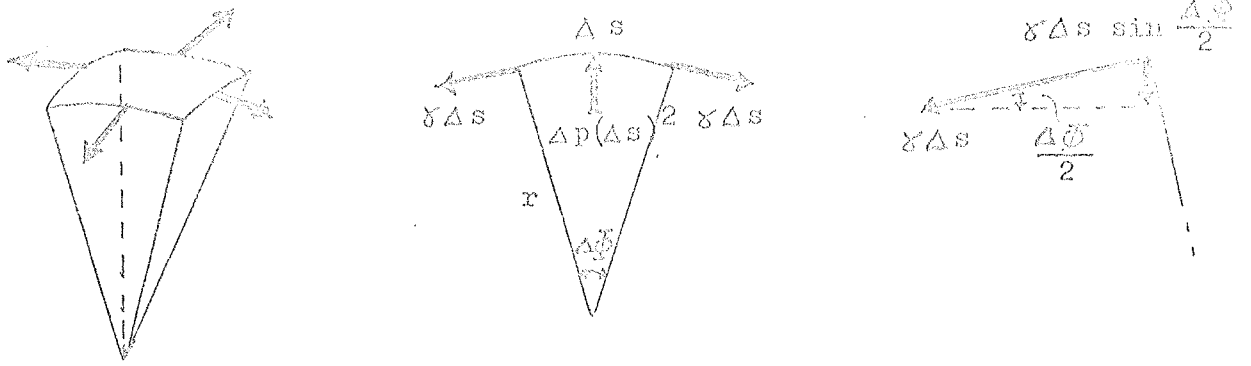


Fig. 1.6. Kraftvektorer vid kontaktyta vätska-gas.

Komponenterna till de fyra vektoreorna i normalens riktning kan sedan sättas lika med ökningen i trycket på den konkava sidan enligt följande

$$\Delta p (\Delta s)^2 = 4 \gamma \Delta s \sin \frac{\Delta \phi}{2}$$

Eftersom $\sin \frac{\Delta \phi}{2} \approx \frac{\Delta \phi}{2} \approx \frac{\Delta s}{2r}$ fås

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} \quad (\text{N/m}^2)$$

1.9 Kapillaritet

En mycket betydelsefull användning av principen för adhesion föreligger vid behandlingen av vätskors kapillära stigning i fina rör och i hålrummen hos porösa material.

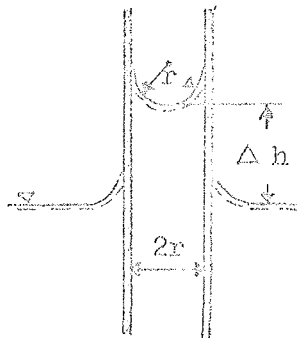


Fig. 1.7. Kapillär stigning av vätska i rör

Om ett rör har en mycket liten innerdiameter, och om vätskan fullständigt "väter" rörets inneryta kommer vätskans menisk att få den cylindriska form, som framgår av fig. 1.7. Eftersom trycket i vätskan just under den fria ytan måste vara mindre än motsvarande ovanför densamma i enlighet med ekvationen $\Delta p = 2\gamma/r$, och då trycket i en given nivå alltid är detsamma innanför och utanför röret, följer, att vätskepo-

rens menisk kommer att ligga ovanför den yttre vätskans fria yta.

Skillnaden i höjd fås ur ekvationen ovan och ur hydrostatiska elementa.

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} = \rho g \Delta h \quad \text{eller} \quad \Delta h = \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{2\gamma}{r}$$

Vid användningen av relationen ovan bör ihågkommas, att den är exakt endast om rörets radie är oändligt liten.

Ehuru felet kommer att bli omärkbart för små radier, kan kontinuerlig ökning av radien åstadkomma en markerad avvikelse från den sfäriska ytformen, beroende på tyngdkraftens utjämnande effekt.

Det är också viktigt att notera, att det minsta spår av förorening i en beröringsyta mellan vätska-fast kropp kan märkbart förändra kontaktvinkeln. Som regel blir därför den uppmätta kapillära stighöjden i rör lägre än den, som kan beräknas för kemiskt rena förhållanden.

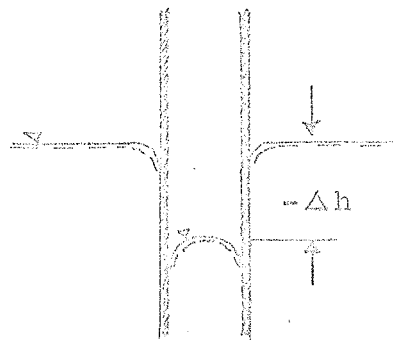


Fig. 1.8. Kapillär depression av vätska i rör.

I det fall vätningsgraden är försumbar (dvs. för kontaktvinklar i närheten av 180°) blir resultatet en kapillär depression av den fria ytan i enlighet med figuren ovan. Beräkningen av depressionens storlek leder till ett samband, som är identiskt med ekvationen

$$\Delta h = \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{2\gamma}{r}$$

utom att höjdtersen skall ha negativt tecken. Alltså

$$-\Delta h = \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{2\gamma}{r}$$

Stabila linser vid kontaktytor

Vi studerar fallet med två vätskor A och B, vilka ej blandar sig med varandra, och en tredje icke fast kropp, antingen gas eller vätska, C, som ej heller är blandningsbenägen, i kontakt enligt nedanstående figur. Om kraftvektorer, representerande hypotetiska spänningar i de fyra ytorna antas enligt figurerna, fås för att jämvikt skall råda:

$$\gamma_{AC} = \gamma_{AB} \cos \phi_{AB} + \gamma_{BC} \cos \phi_{BC}$$

och

$$\gamma_{AB} \sin \phi_{AB} = \gamma_{BC} \sin \phi_{BC}$$

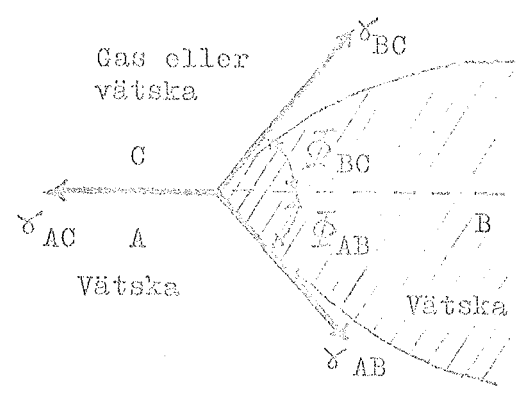


Fig. 1.9. Schematisk bild av kontakten mellan ej blandningsbenägna vätskor.

Dessa ekvationer satisfieras om $\gamma_{AC} < (\gamma_{AB} + \gamma_{BC})$. Om $\gamma_{AC} > (\gamma_{AB} + \gamma_{BC})$ är jämvikt ej möjlig. Vätskan B kommer att sprida sig mellan A och C.

Vätning av fasta ytor

Vid gränser, som skiljer gas-vätska-fast kropp, beror de resulterande fria ytkonfigurationerna på den relativa styrkan av kohesiva krafter mellan vätskomolekylerna och de adhesiva krafterna mellan vätskans och den fasta kroppens molekyler.

Om den resulterande affiniteten av den fasta kroppens molekyler för vätskans förorsakar vätning är den fasta ytan hydrofil, i annat fall hydrofob.

Kontaktvinkeln ϕ vid kontaktpunkten vätska-fast kropp-gas är ett mått

på vätningen (Θ mätt i vätskan från den fasta ytan).

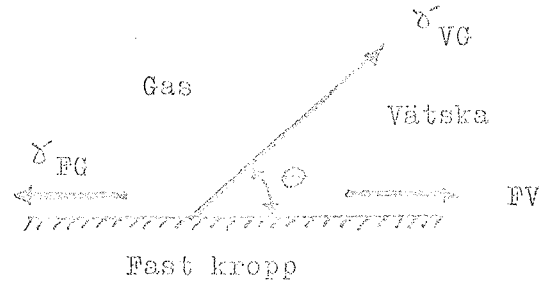


Fig. 1.10. Schematisk bild av kontakten mellan vätska-gas-fast kropp.

Med hänvisning till ovanstående figur har vi, att det arbete, som erfordras för att åstadkomma separering av en vätska från en fast yta beror på deras enskilda ytspänningar enligt relationen

$$\frac{W_{FW}}{A} = \gamma_{FG} + \gamma_{VG} - \gamma_{FV} \quad (\text{se ekv. 1.8.3 sid. 21})$$

För jämvikt måste ytspänningskrafterna satisfiera

$$\gamma_{FG} = \gamma_{FV} + \gamma_{VG} \cos \Theta$$

Efter kombination av ekvationerna fås

$$\begin{aligned} \frac{W_{FW}}{A} &= \gamma_{FV} + \gamma_{VG} \cos \Theta + \gamma_{VG} - \gamma_{FV} = \\ &= \gamma_{VG}(1 + \cos \Theta) \end{aligned} \quad 1.9.2$$

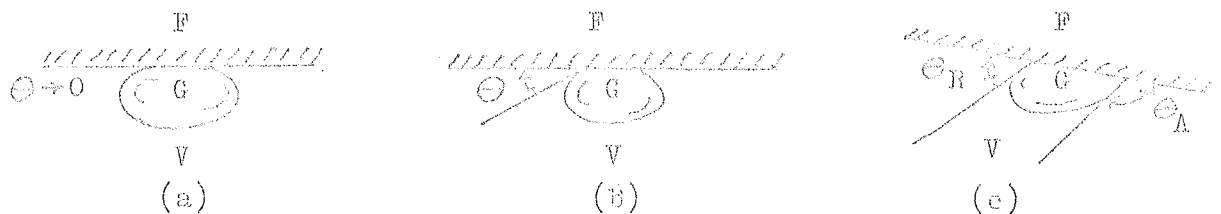


Fig. 1.11 (a). Stabil bubbla på hydrofil yta. Fullständig vätning. $\Theta = 0^\circ$; (b) stabil bubbla på hydrofob yta. Ofullständig vätning. $\Theta > 0^\circ$; (c) bubbla vid begynnande rörelse på hydrofob yta. $\Theta_A > \Theta_R$ (alltid).

Ekvationen ovan anger, att för $\Theta = 0^\circ$ är $W_{FV}/A = 2 \gamma_{VG}$, dvs. adhesioner är lika stor som kohesionen. När vätskans attraktion av den fasta kroppen överstiger den förras kohesiva krafter kommer Θ också att bli noll. Vid $\Theta = 180^\circ$ uppträder ingen adhesion.

I realiteten förekommer alltid någon adhesion, varför Θ alltid är mindre än 180° .

Sålunda är vid fullständig vätning kontaktvinkeln, vilket framgår av (a) ovan, mätt i vätskan noll grader. Vid fullständig icke vätning är $\Theta = 180^\circ$. Alla intermediära vinklar motsvarar ofullständig vätning, som i (b).

Kontaktvinkeln skall mätas när beröringsytan mellan fast kropp-gas är täckt med en mycket tunn vätskefilm. Om den fasta kroppens yta är torr och vätningen ofullständig beror Θ av om huruvida vätskan närmar sig jämviktstilläget genom framryckning eller tillbakadragande över ytan [åstadkommande vinklarna Θ_A respektive Θ_R i (c) ovan]. Som framgår av (c) ovan, så är alltid $\Theta_A > \Theta_R$. Fig. 1.12 visar variationer i kontaktvinkeln vid olika grader av vätning.

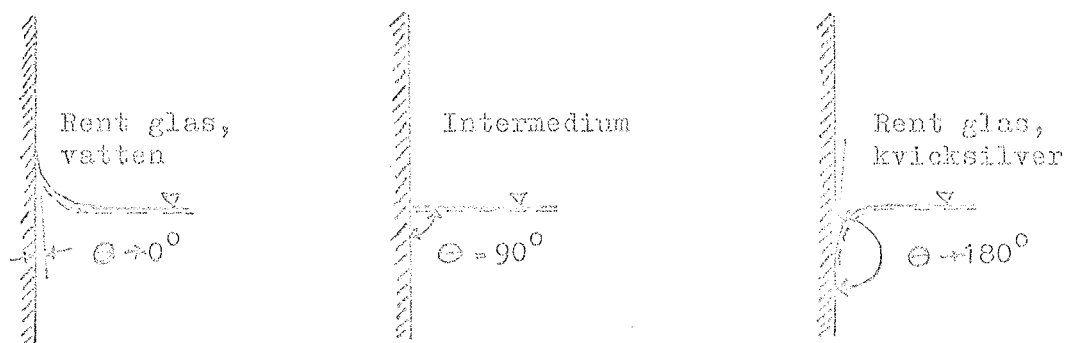


Fig. 1.12. Variationer i kontaktvinkeln vid olika grader av vätning.

Kapillär stighöjd

Hur vätskor i smala rör uppför sig beror på ytspänningen och vätningen av rörväggarna. Figurerna nedan illustrerar (a) ett smalt glasrör doppat i kvicksilver, (b) ett liknande rör doppat i vatten. Vätning (eller icke vätning) förorsakar att vätskeytan blir krökt.

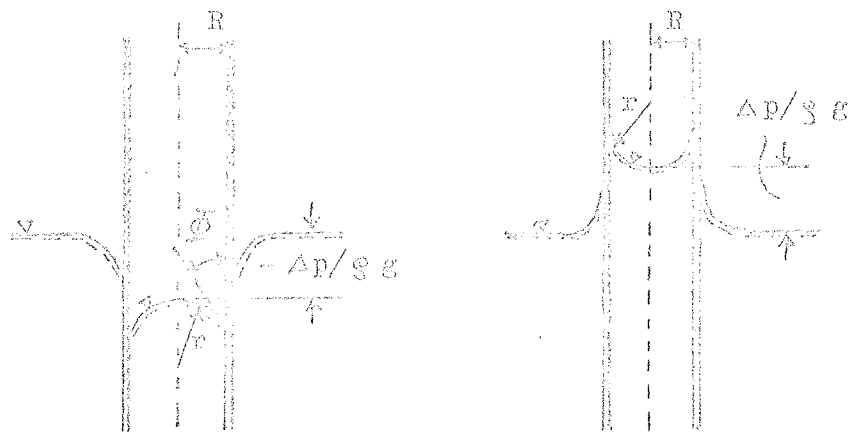


Fig. 1.13. Kapillaritet i rör: (a) kvicksilver i glas, (b) vatten i glas.

Som en konsekvens därav åstadkommer ytspänningen en tryckdifferens mellan den konkava översidan och den konvexa undersidan i nedanstående figur.

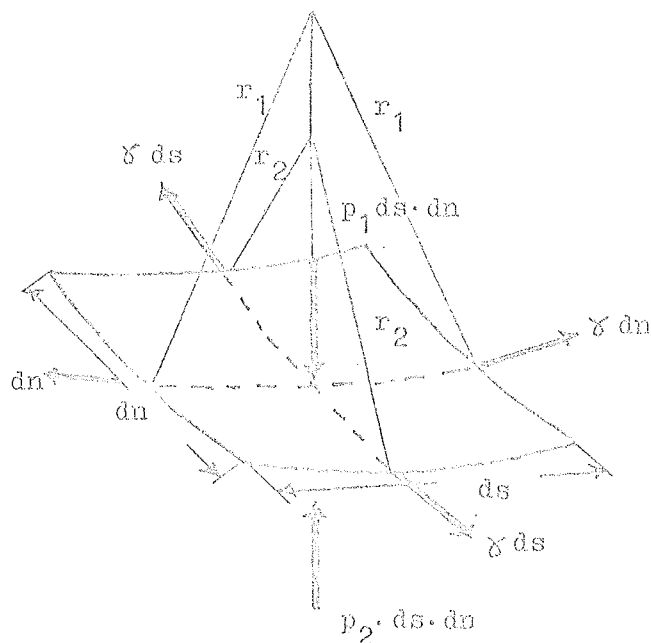


Fig. 1.14. Jämvikt under ytspänning.

Tryckdifferensen mellan den konkava och konvexa sidan för ytan böjd i två riktningar blir då

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r_1} + \frac{\gamma}{r_2} = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad 1.9.3$$

Ekvationen 1.9.3 benämnes Laplace's ekvation.

För cirkulära rör är $r_1 = r_2 = r$ där r är kurvradien för menisken. Menisken är för rör mindre än 2,5 mm i diameter nästan sfärisk och r blir då likamed $R/\cos \bar{\phi}$ (se fig. 1.13).

R = rörets radie
 $\bar{\phi}$ = vinkel mätt vid vätske-fast kroppkontaktpunkten.

Märk, att $\bar{\phi}$ vid vätning blir lika med Θ , som definierats tidigare. Vid icke vätning är $\bar{\phi}$ supplementvinkel till Θ .

Då fås kapillära stigningen eller nedsjunkningen till

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2 \gamma}{\rho g R} \cos \bar{\phi} \quad 1.9.4$$

För rent vatten och rent glas är $\bar{\phi}$ (och Θ) nära noll, medan för kvicksilver och glas $\bar{\phi}$ är omkring 50° (Θ omkring 130°).

2. Hydrostatik

2.1 Begreppet vätskestryck

En vätska antar vi består av en stor mängd partiklar eller element i nära kontakt med varandra.

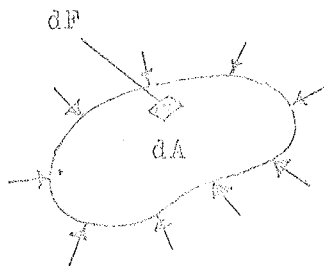


Fig. 2.1. Vätskeelement
i en ideal vätska.

Ovanstående figur föreställer ett vätskeelement i en ideal vätska.

På elementets begränsningsyta verkar dels ytkrafter från den omgivande vätskan dels masskrafter (t.ex. tyngdkraft, centripetalkraft m.m.), som orsakar ett rörelse- eller vilotillstånd.

Då vätskan antagits friktionsfri måste krafterna från omgivande vätska vara normalkrafter eller normaltryck. Skjuv- eller tangentialkrafter förutsätter inre friktion.

Vi betecknar ett oändligt litet ytelement i fig. 2.1 med dA och tryckkraften vinkelrätt mot elementet med dF .

Då blir kvoten $\frac{dF}{dA}$ det på ytelementet verkande trycket eller

$$p = \frac{dF}{dA} \quad 2.1.1$$

Ofta kallar man p det specifika trycket eller enbart trycket.

Om trycket över en större yta kan anses konstant = p fås tryckkraften ur ekvation 2.1.1 genom integration.

$$\int dF = p \int dA$$

$$P = p \cdot A \quad 2.1.2$$

Beviset gäller också för en icke ideal vätska under förutsättning att den befinner sig i relativ vila. I annat fall måste hänsyn tas till den inre friktionen, som ger snett riktade resultanter.

2.2 Trycket i en punkt

I en punkt har en vätska i vila samma tryck i alla riktningar.

Detta innebär, att ett mycket litet ytelement, som fritt kan rotera kring sin tyngdpunkt i en vätska i vila, kommer att påverkas av lika stora och konstanta krafter på båda sidor, oberoende av ytelementets orientering.

Vi studerar ett prismatiskt vätskeelement i vila med längden 1 längdenhet och med kantlängderna dx , dy och ds (fig. 2.2).

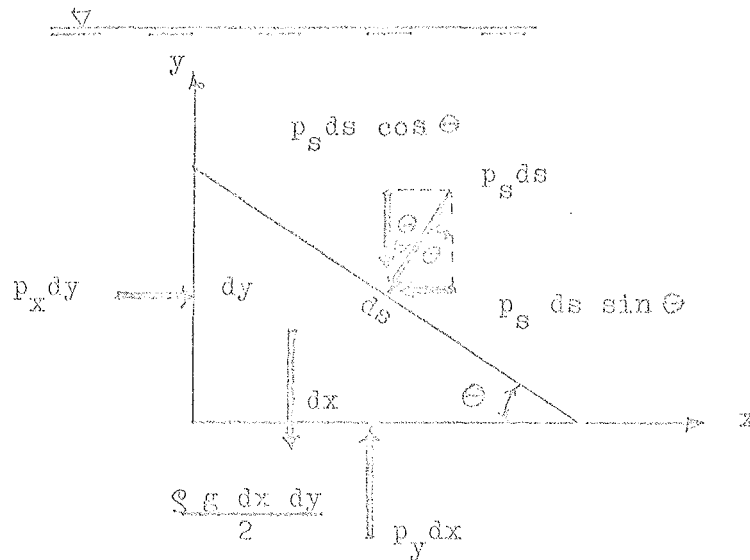


Fig. 2.2. Tvådimensionell skiss, visande ett prismatiskt vätske- eller gaselement i vila.

Eftersom det ej kan föreligga några skjuvspänningar är de enda förefintliga krafterna normalkrafter (yttkrafter) och tyngdkraften.

Jämviktsekvationerna i x - och y -riktningarna blir då

$$\sum P_x = p_x dy - p_s ds \sin \Theta = \frac{dx dy}{2} \rho a_x = 0$$

$$\sum P_y = p_y dx - p_s ds \cos \Theta = \rho g \frac{dx dy}{2} = \frac{dx dy}{2} \rho a_y = 0$$

där p_x , p_y , p_s är medeltrycken på de tre ytorna, och ρg vätskans specifika tyngd.

Vi har i limes, eftersom $dy = ds \sin \Theta$ och $dx = ds \cos \Theta$, att

$$p_x dy - p_s dy = 0 \quad \text{och} \quad p_y dx - p_s dx - \rho g \frac{dx dy}{2} = 0$$

Sista termen av andra ekvationen ovan är en infinitesimal av högre ordning och kan således försummas. Efter division med respektive dy och dx kan ekvationerna kombineras och vi får

$$p_s = p_x = p_y \quad 2.2.1$$

Eftersom Θ är en godtycklig vinkel visar ekv. 2.2.1 att trycket är detsamma i alla riktningar i en punkt i en vätska i vila. Beviset för det tvådimensionella fallet kan härledas till att gälla även det tredimensionella fallet (se nedan).

Bevis I.

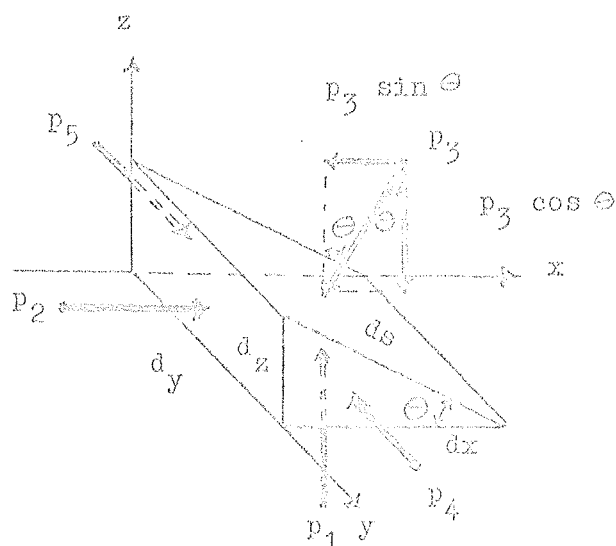


Fig. 2.3. Tredimensionell skiss visande ett prismatiskt vätske- eller gaselement i vila.

Fig. 2.3 föreställer ett oändligt litet vätskeelement i vila påverkad av vätskans kring det. Tryckkrafternas storlek anges med p och index.

Förutom av tryckkrafter angrips elementet av en masskraft, nämligen tyngdkraften.

Vi har också att då tryckkrafterna är proportionella mot ytorna så är masskrafterna proportionella mot volymerna.

Eftersom volymen är liten av 3:e ordningen kan enligt differentiakalkylen masskraften (tyngdkraften) försummas när dx , dy och $dz \rightarrow 0$.

Tryckkrafterna måste därför vid jämvikt ge resultanten 0 i samtliga axelriktningar.

Då fås

$$\text{I } x\text{-riktningen: } p_2 dy dz - p_3 dy ds \sin \Theta = 0$$

$$\text{Men } dz = ds \sin \Theta \text{ varför } p_2 = p_3$$

I y -riktningen är krafterna lika och tar ut varandra

$$\text{I } z\text{-riktningen: } p_1 dx dy - p_3 dy ds \cos \Theta = 0$$

$$\text{Men } dx = ds \cos \Theta \text{ varför } p_1 = p_3$$

$$\text{Alltså } p_1 = p_2 = p_3$$

Bevis II.

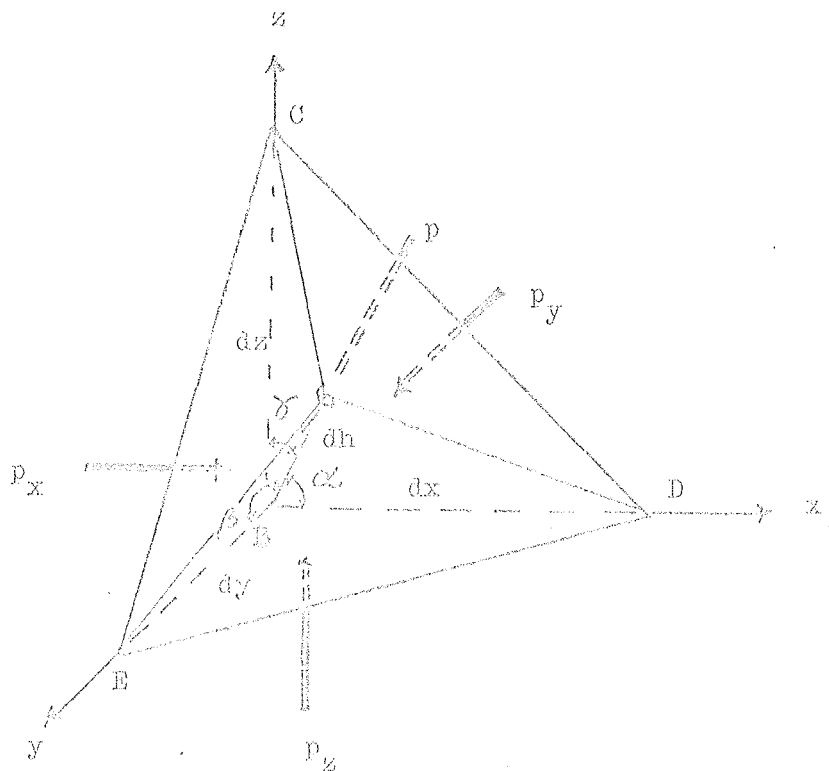


Fig. 2.4. Tredimensionell skiss visande ett prismatiskt vätske- eller gaslement i vila.

Fig. 2.4 visar ett oändligt litet vätskeelement (i form av en tetraeder) i vila.

Förutom av tryckkrafter angrips elementet också av masskrafter, i detta fall tyngdkraften.

Tryckkrafterna är proportionella mot ytorna, masskrafterna (tyngdkraften) mot elementets volym.

Tetraederytorna är små av 2:a ordningen, volymen liten av 3:e ordningen. Masskraften (tyngdkraften) kan försummas då dx , dy och $dz \rightarrow 0$.

För att jämvikt skall råda måste resultanten till tryckkrafterna i samtliga axelriktningar vara = 0.

p_x , p_y och p_z betecknar trycken i respektive axelriktningar och p trycket mot den sneda tetraederytan CDE.

De vinklar som normalen dh till ytan $CDE = dA$ bildar med koordinataxlarna betecknas med α , β och γ .

Då fås för tetraederns volym

$$\frac{dA \cdot dh}{3} = \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2 \cdot 3} \quad \text{eller} \quad dA \cdot dh = \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{dh}{dx} \quad \text{eller} \quad dh = dx \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{dh}{dy} \quad \text{eller} \quad dh = dy \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{dh}{dz} \quad \text{eller} \quad dh = dz \cos \gamma$$

Genom insättning fås

$$dA dx \cos \alpha = \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} \quad \text{eller} \quad dA \cos \alpha = \frac{dy \cdot dz}{2}$$

$$dA dy \cos \beta = \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} \quad \text{eller} \quad dA \cos \beta = \frac{dx \cdot dz}{2}$$

$$dA dz \cos \gamma = \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} \quad \text{eller} \quad dA \cos \gamma = \frac{dx \cdot dy}{2}$$

Jämviktsvillkoret för de angripande krafterna ger

$$p_x \frac{dy \cdot dz}{2} - p \, dA \cos \alpha = 0$$

$$p_y \frac{dx \cdot dz}{2} - p \, dA \cos \beta = 0$$

$$p_z \frac{dx \cdot dy}{2} - p \, dA \cos \gamma = 0$$

Kombination av ekvationssystemen ger

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

2.3 Nivåytor eller ekvipotentialytor

Att trycket i en godtycklig punkt i ideal vätska, såväl i vila som i rörelse, är lika i alla riktningar gäller också för vätskeelement i omedelbar beröring med en fast kropp t.ex. en kärlvägg.

Trycket är oberoende av väggens lutning och är alltid riktat vinkelrät mot väggen.

Satsen om tryckets oberoende av riktningen gäller också för viskösa vätskor om inga formförändringar uppkommer. I annat fall uppträder nämligen snett riktade krafter (tangentialkrafter).

Trycket i en vätska är en kontinuerlig funktion av ortskoordinaterna x , y , z eller

$$p = f(x, y, z)$$

Sättes $p = p_1$ fås

$$p_1 = f(x, y, z)$$

Geometriskt betyder detta en yta där överallt råder samma tryck = p_1 . En sådan yta kallas nivåyta eller ekvipotentialyta.

2.4 Hydrostatikens grundekvation I.

Tryckets variation i en vätska eller en gas i vila. Framställning utan användning av vektorer.

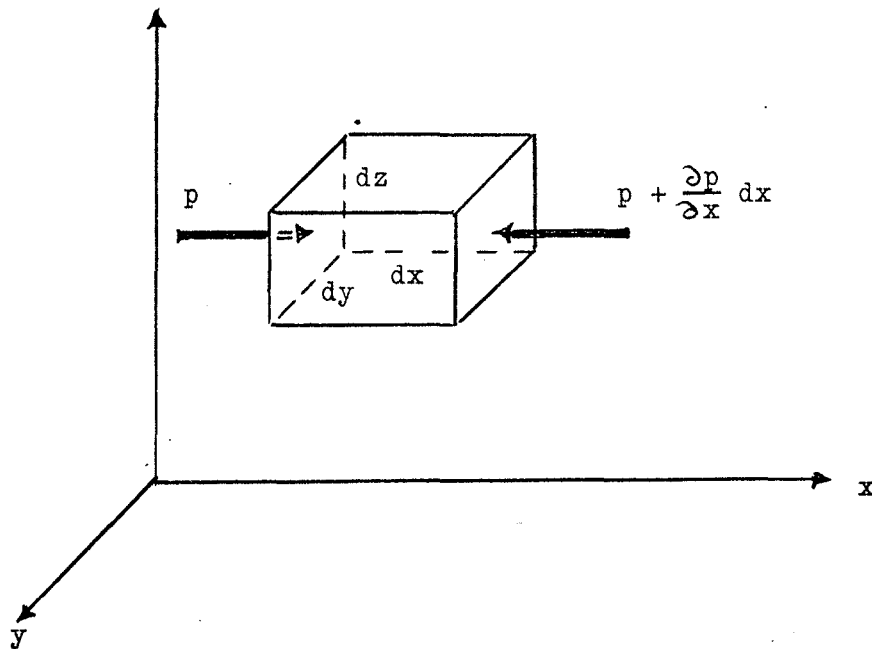


Fig. 2.5. Rektangulärt parallelepipediskt vätske- eller gaselement i vila.

På ett oändligt litet volymselement med kantlängderna dx , dy och dz i fig. 2.5 verkar dels per massenhet masskrafterna X , Y och Z dels per ytenhet ytkrafterna (tryckkrafterna) p och $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$, p och $p + \frac{\partial p}{\partial y} dy$ samt p och $p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$.

En närmare förklaring av uttrycken för tryckkrafterna. Som exempel tas tryckkrafterna längs x -axeln.

Förändringen i trycket vid förflyttningen sträckan dx kan tecknas $\frac{\partial p}{\partial x} dx$. Matematiskt är uttrycket $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ den partiella differentialen av p med avseende på x .

Tryckgradienten eller den lokala förändringen i p med avseende på x uttrycks genom den partiella derivatan av p med avseende på x $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Den kan tecknas $\frac{\partial p}{\partial x}$ eller $(\frac{dp}{dx})_{y,z}$. Det senare uttrycket anger den lokala förändringen i p med avseende på x för vilka som helst givna värden på x , y och z när y och z hålls konstanta.

Jämvikt i x -riktningen råder om

$$p \, dy \, dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) \, dy \, dz + X \, \rho \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$p \, dy \, dz - p \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz + X \, \rho \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \quad 2.4.1$$

På samma sätt fås

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \quad 2.4.2$$

och

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad 2.4.3$$

Ekvationerna ovan visar, att tryckgradienten längs axlarna är direkt proportionell mot vätskans täthet och den verkande masskraften.

Trycket i punkten x, y, z är p eller

$$p = f(x, y, z) \quad 2.4.4$$

Den totala differentialen av funktionen

$$p = f(x, y, z)$$

skrives

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad 2.4.5$$

Multiplieras ekv. 2.4.1 med dx , ekv. 2.4.2 med dy och ekv. 2.4.3 med dz samt adderas led för led fås

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz$$

och

$$dp = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz \quad 2.4.6$$

För en vätska i vila och endast utsatt för tyngdkraftens inverkan är per massenhet

$$X = 0 ; Y = 0 \text{ och } Z = -g$$

Insättning i grundekvationen ger

$$dp = - \rho g dz$$

Vi integrerar och får

$$p = - \rho g z + C$$

Räknas z från vätskans yta och är trycket där p_0 fås efter omkastning av axelriktningen och utbyte av z mot h

$$C = p_0$$

och

$$p = p_0 + \rho gh$$

2.4.7

Hydrostatikens grundekvation II

Tryckets variation i en vätska eller en gas i vila

Vektoriell framställning

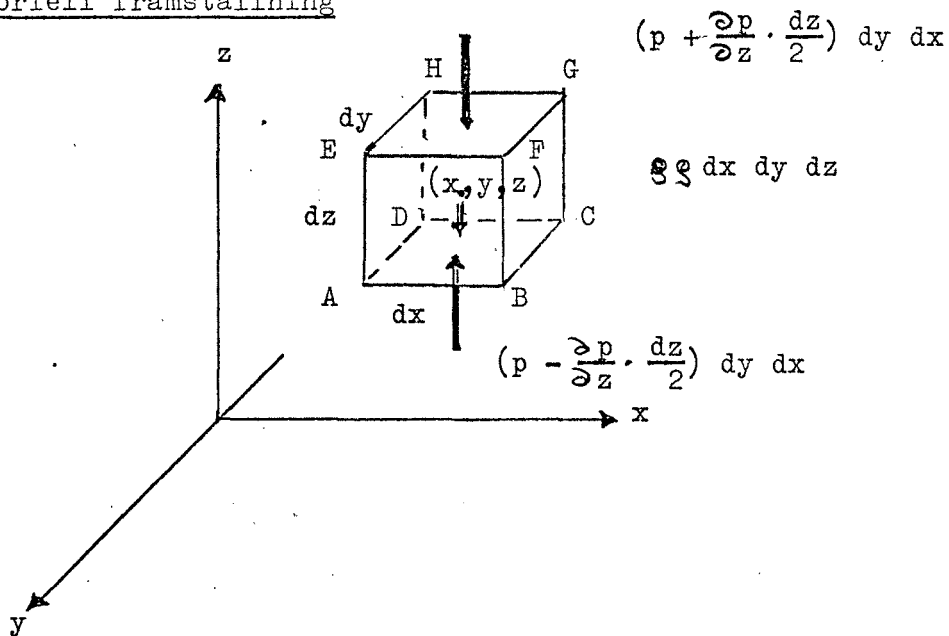


Fig. 2.6. Rektangulärt parallelepipediskt vätske- eller gaselement i vila.

De krafter, som verkar på ett vätske- eller gaselement i en vätska i vila (se bilden) består av yt- och masskrafter.

Med tyngdkraften som enda masskraft och genom att rikta z-axeln uppåt fås uttrycket för denna masskraft till

$$- \int g \, dx \, dy \, dz$$

i z-axelns riktning.

Med trycket p i centrum (x, y, z), blir den approximativa kraften, som verkar på sidan ABCD

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx \, dy$$

och kraften på den motsatta sidan EFGH approximativt

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx \, dy$$

Vid summering av krafterna på vätske- eller gaselementet i z-axelns riktning fås

$$\begin{aligned} dF_z &= - p \, dx \, dy - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \, dx \, dy + p \, dx \, dy - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \, dx \, dy - \int g \, dx \, dy \, dz \\ &= - \frac{\partial p}{\partial z} \, dx \, dy \, dz - \int g \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

För x- och y-riktningarna gäller, eftersom inga masskrafter verkar

$$dF_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \, dy \, dz \quad \text{och} \quad dF_y = - \frac{\partial p}{\partial y} \, dx \, dy \, dz$$

Kraftvektorn \vec{dF} är given genom relationen

$$\vec{dF} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k}$$

varför vi kan skriva enligt ovan

$$d\vec{F} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dx \, dy \, dz - \int g \, dx \, dy \, dz \vec{k}$$

I limes, efter division med $dx \, dy \, dz = dV$ ($dV \rightarrow 0$)

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) p - \int g \vec{k}$$

Detta är den resulterande kraften per volymsenhet i en punkt. Kraften kan sättas lika med noll för en vätska i vila. Kvantiteten inom parentes är gradienten, även benämnd nabla eller del (se avsnitt 7.2 sid. 191-198)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad 2.4.9$$

Den negativa gradienten av p , $-\vec{\nabla}p$ är vektorfältet \vec{F} för tryckkraften per volymsenhet

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} p \quad 2.4.10$$

Hydrostatiska ekvationen för variationen i trycket blir då

$$\vec{F} - \rho g \vec{k} = 0 \quad 2.4.11$$

I komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad 2.4.12$$

Eftersom p endast är en funktion av z kan vi skriva

$$dp = -\rho g dz \quad 2.4.13$$

Denna differentialekvation anger tryckförändringarnas beroende av specifika tyngden och höjden över en referensnivå. Den gäller för både kompressibla och inkompressibla vätskor och gaser.

Normalt brukar hydrostatiska trycket räknas som övertryck i förhållande till atmosfärstrycket.

Om p_0 = atmosfärstrycket är $p - p_0 = \rho g h$, i så fall det hydrostatiska trycket.

Ekvationen ovan ger uttryck för den hydrostatiska paradoxen (Pascal 1662), som säger att bottentrycket i ett kärl endast är beroende av fria vätskeytans höjd över botten, ej av vätskans kvantitet eller kärlets form.

Kommunicerande kärl

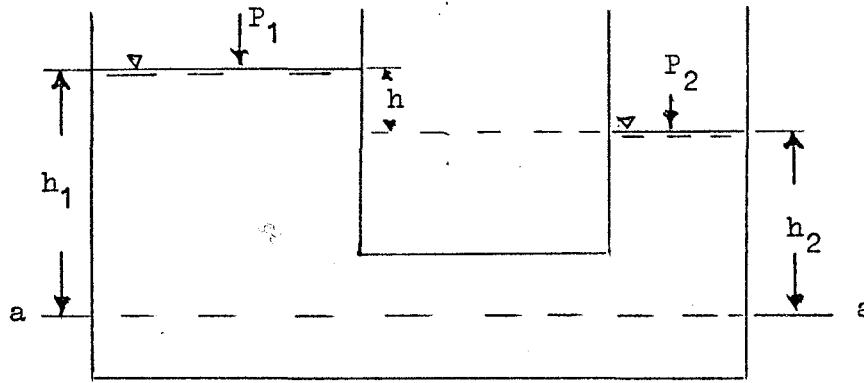


Fig. 2.7. Kommunicerande kärl

Trycket på planet a - a är

$$p_a = p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2$$

$$p_2 - p_1 = \rho g (h_1 - h_2)$$

$$p_2 - p_1 = \rho g h$$

2.4.14

Öppen vätskemanometer

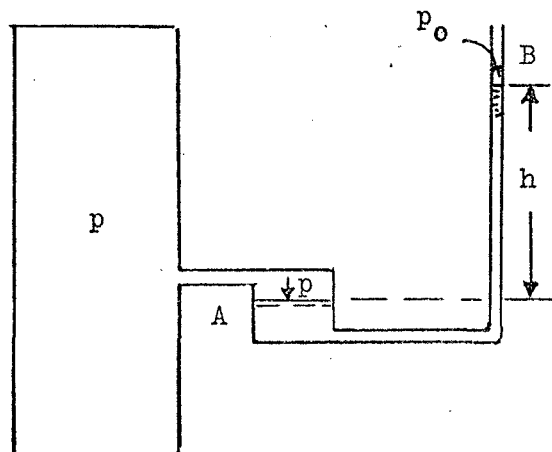


Fig. 2.8. Öppen vätskemanometer

Öppen vätskemanometer används vid små eller måttliga tryckskillnader.

Trycket vid A

$$p = p_0 + \rho g h$$

Övertrycket vid A

$$p - p_o = g h$$

2.4.15

där p_o = atmosfärstrycket

Hävert

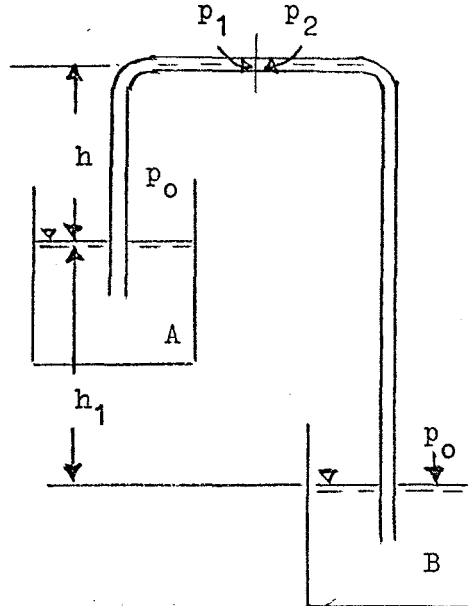


Fig. 2.9. Hävert

Tänker man sig den horisontella skänkeln stängd genom en ventil så verkar på denna från vänster → höger ett tryck

$$p_1 = p_o - \rho g h$$

från höger → vänster ett tryck

$$p_2 = p_o - \rho g(h + h_1)$$

Sålunda finns ett från vänster → höger riktat övertryck

$$p_1 - p_2 = \rho g h_1$$

2.4.16

2.5 Tryckets tillväxt med djupet

Som påpekats på sid. 37 är en vätskeyta där trycket är konstant en nivåyta.

En vätskeyta mot vilken verkar ett konstant gastryck är också en nivåyta

Enligt det föregående är en nivåyta i varje punkt vinkelrät mot de i punkten angripande masskrafterna.

Då trycket är konstant blir i enlighet med hydrostatikens grundekvation ($dp = 0$)

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

2.5.1

En nivåyta, som ej är horisontell uppkommer, om en vätska i en behållare rör sig uppför eller nedför ett lutande plan under konstant acceleration

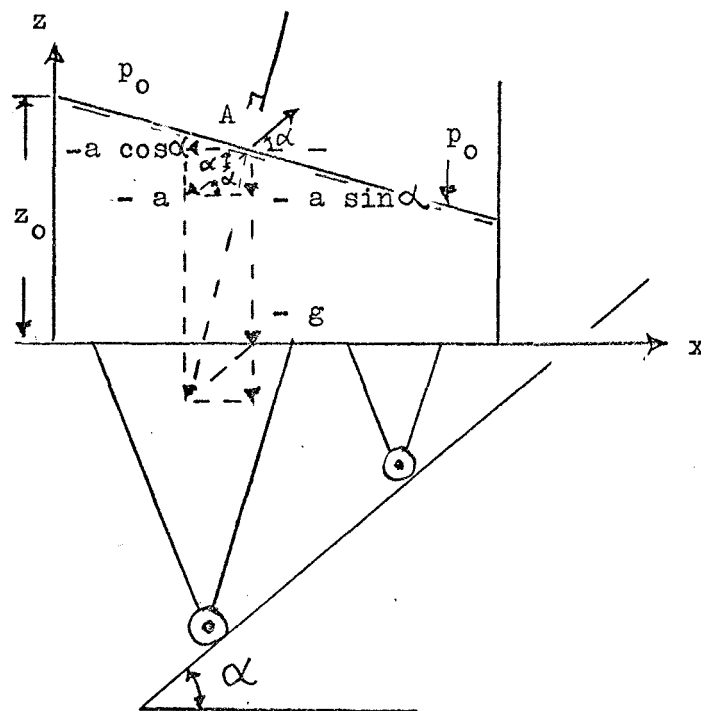


Fig. 2.10. Behållare med vätska rör sig uppför ett lutande plan.

Enligt ovanstående figur så utsätts ett masselement i punkten A per massenhet dels av tyngdkraften $-g$ dels (enligt d'Alamberts princip) av tröghetskraften $-a$. Resultant = F .

Vi tecknar masskrafterna längs respektive axlar och får

$$X = -a \cos \alpha$$

$$Y = 0$$

$$Z = -a \sin \alpha - g = -(a \sin \alpha + g)$$

Observera att resultanten F är vinkelrät mot nivåytan enligt det föregående.

Vi insätter värdena ovan i grundkv. och får ($dp = 0$, nivåyta)

$$- a \cos \alpha dx - (a \sin \alpha + g) dz = 0$$

$$dz = - \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g} dx$$

och

$$dz = - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{g}{a}} dx$$

Vi integrerar

$$z = - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{g}{a}} \cdot x + C$$

För $x = 0$ blir $C = z_0$.

Nivåytornas (ekvipotentialytornas) ekvation blir då

$$z = z_0 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{g}{a}} \cdot x \quad 2.5.2$$

Tryckets tillväxt med djupet i behållaren ovan kan fås ur ekvationen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho z$$

om z räknas från vätskeytan för varje x .

För z har vi redan uttrycket

$$z = - a \sin \alpha - g$$

och vi får

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho (a \sin \alpha + g)$$

eller

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{z,y} = - \rho (a \sin \alpha + g)$$

Då fås

$$dp = - \rho (a \sin \alpha + g) dz$$

och integration ger efter omkastning av axelriktningarna

$$p = \rho (a \sin \alpha + g) z + C$$

För $z = 0$ blir $C = p_0$ och vi får till slut om z utbytes mot h

$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{a}{g} \sin \alpha + 1\right) h \quad 2.5.3$$

Några specialfall

$\alpha = 0$. Nivåytornas ekvation blir

$$z = z_0 - \frac{a}{g} \cdot x \quad 2.5.4$$

och ekvationen för tryckets tillväxt med djupet

$$p = p_0 + \rho g h \quad 2.5.5$$

Är $a = g$ för $\alpha = 0$ blir

$$z = z_0 - x \quad 2.5.6$$

Nivåytornas lutning är 45° .

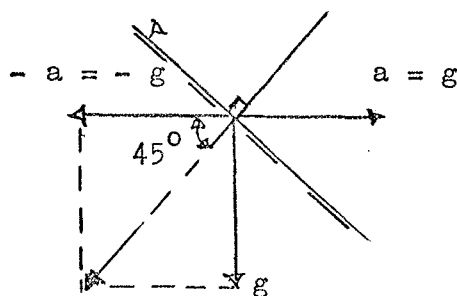


Fig. 2.11. Skiss visande nivåytornas lutning för $a = g$.

$\alpha = 90^\circ$. Nivåytornas ekvation blir

$$z = z_0$$

2.5.7

dvs. de är horisontella.

Tryckets tillväxt med djupet är

$$p - p_0 + \rho g \left(\frac{a}{g} + 1 \right) h \quad 2.5.8$$

$$\alpha = -90^\circ.$$

Här blir också $z = z_0$ och således nivåytorna horisontella.

Tryckets tillväxt med djupet blir

$$p = p_0 + \rho g \left(1 - \frac{a}{g} \right) h \quad 2.5.9$$

Speciellt gäller här om $a = g$ att $p = p_0$. Vätskan beter sig som om den vore utan tyngd.

Tryckets tillväxt med djupet i en behållare med vätska, som med konstant acceleration

- a) dras uppför ett lutande plan
- b) nedför ett lutande plan.

a)

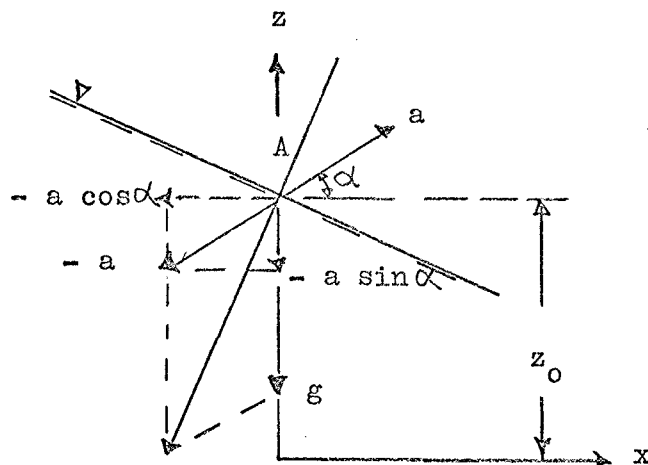


Fig. 2.12. Kraftriktningar vid rörelse uppför ett lutande plan.

Ett masselement i punkten A i ovanstående figur påverkas per massenhet av tyngdkraften g och tröghetskraften $-a$. Resultant = F .

Hydrostatikens grundekvation ger

$$dp = \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz \quad 2.5.10$$

Här är

$$X = -a \cos \alpha; \quad Y = 0 \text{ och } Z = -a \sin \alpha - g$$

Insättning i ekv. 2.5.10 ger

$$dp = -\rho a \cos \alpha dx - \rho (a \sin \alpha + g) dz$$

Integration ger

$$p = -\rho a \cos \alpha \cdot x - \rho (a \sin \alpha + g) \cdot z + C$$

För $x = 0$ och $z = z_0$ är $p = p_0$, som ger

$$C = p_0 + \rho (a \sin \alpha + g) z_0$$

Till slut fås

$$p = p_0 - \rho a \cos \alpha x - \rho (a \sin \alpha + g) z + \rho (a \sin \alpha + g) z_0$$

eller

$$p = p_0 - \rho a \cos \alpha x + \rho g(z_0 - z) \left(1 + \frac{a}{g} \sin \alpha\right) \quad 2.5.11$$

b)

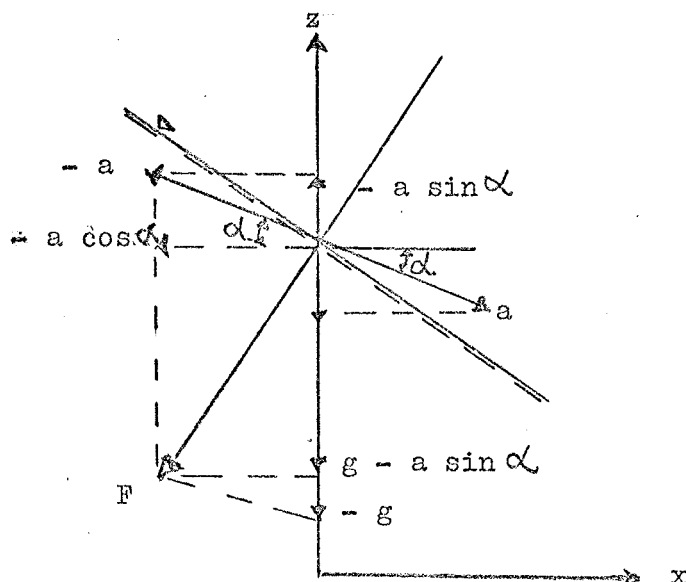


Fig. 2.13. Kraftriktningar vid rörelse nedför ett lutande plan.

Krafterna som verkar på ett masselement per massenhet i punkten A i ovanstående figur ger

$$X = - a \cos \alpha$$

$$Y = 0$$

$$Z = -(g - a \sin \alpha) = a \sin \alpha - g$$

Grundekv. ger

$$dp = - \rho a \cos \alpha dx + \rho (a \sin \alpha - g) dz$$

Vi integrerar och får

$$p = - \rho a \cos \alpha \cdot x + \rho (a \sin \alpha - g) z + C$$

För $x = 0$ och $z = z_0$ är $p = p_0$, som ger

$$C = p_0 - \rho (a \sin \alpha - g) z_0$$

Då fås

$$p = p_0 - \rho a \cos \alpha \cdot x + \rho (a \sin \alpha - g) z - \rho (a \sin \alpha - g) z_0$$

eller

$$p = p_0 - \rho a \cos \alpha \cdot x + \rho g(z - z_0) \left(\frac{a}{g} \sin \alpha - 1 \right) \quad 2.5.12$$

2.6 Vätskeytan i ett kärl som roterar

En fri vätskeyta, som är buktad, uppkommer om förutom tryckkraften också centrifugalkraften verkar som masskraft.

Exempel på detta är en vätska, som med konstant vinkelhastighet ω roterar kring en vertikal axel i ett cylindriskt kärl.

I nedanstående figur utsätts ett masselement i punkten A per massenhet, dels av centrifugalkraften $\frac{v^2}{x}$ där $v =$ hastigheten, eller eftersom $v = \omega \cdot x$, $\omega^2 \cdot x$ där $\omega =$ vinkelhastigheten.

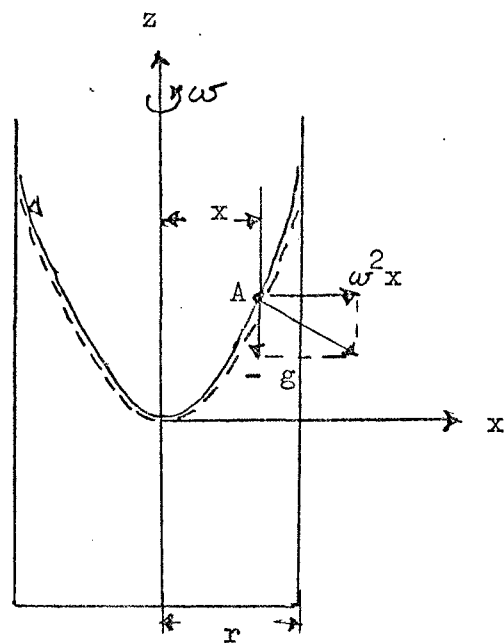


Fig. 2.14. Vätskeyta vid rotationsrörelse.

Uttrycken för masskrafterna i de olika axelriktningarna blir då

$$X = \omega^2 \cdot x$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g$$

Insättning i grundekvationen ($dp = 0$, nivåyta) ger då

$$\omega^2 x dx - g dz = 0$$

eller

$$dz = \frac{\omega^2}{g} x dx$$

Vi integrerar och får

$$z = \frac{\omega^2}{g} \int x dx$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 + C$$

För $x = 0$ blir $z = 0$ och också $C = 0$.

Då fås

$$z = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2$$

som är ekvationen för en rotationsparaboloid.

Från matematiken har vi att volymen under en rotationsparaboloid är lika med hälften av den omskrivna cylinderns volym.

Bevis:

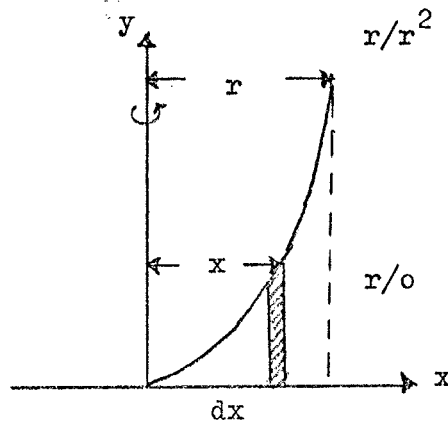


Fig. 2.15. Parabel, roterande kring y-axeln.

Vi har parabeln $y = x^2$. Rotationsparaboloidens elementarvolym kan tecknas

$$dV = 2\pi x y dx$$

med ledning av nedanstående figurer.

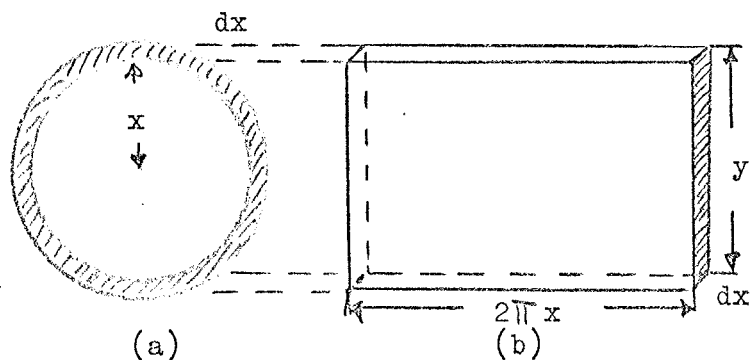


Fig. 2.16. a) den bildade rotationscylindern b) rotationscylindern uppskuren.

$$y = x^2 \text{ varför } dV = 2\pi x^3 dx$$

Vi integrerar

$$dV = 2\pi \int_0^r x^3 dx$$

$$V = 2\pi \int_0^r \frac{x^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

Omskrivna cylinderns volym tecknas

$$\pi \cdot r^2 \cdot y = \pi r^2 \cdot r^2 = \pi r^4$$

Volymer under en rotationsparaboloid är alltså hälften av den omskrivna cylinderns volym.

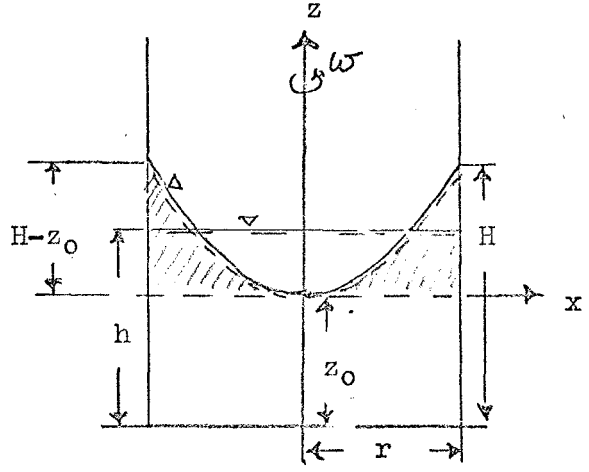


Fig. 2.17. Volymer under en rotationsparaboloid.

En vätska roterar i ett cylindriskt kärl enligt ovanstående figur.

Innan rotationen är uttrycket på vätskans volym $\pi r^2 h$.

Vid rotation och jämvikt är omskrivna cylinderns volym $\pi r^2 H$.

Då fås enligt ovan ett nytt uttryck på vätskans volym.

$$\pi r^2 z_0 + \frac{1}{2} \pi r^2 (H - z_0)$$

Vi kombinerar uttrycken och hyfsar

$$\pi r^2 z_0 + \frac{1}{2} \pi r^2 H - \frac{1}{2} \pi r^2 z_0 = \pi r^2 h$$

$$\frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{2} H = h$$

$$z_0 + H = 2 h$$

eller

$$H - h = h - z_0$$

2.6.2

Alltså: Vid rotation i ett cylindriskt kärl stiger vätskan lika mycket vid kärllkanten som den sjunker i centrum räknat från utgångsnivån.

Enligt ekv. 2.6.1

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

gäller för punkten A i föregående figur

$$z = H - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Kombineras denna ekv. med ekv.

$$2h = z_0 + H ; H = 2h - z_0$$

fås

$$2h - z_0 - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$h - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{4g}$$

2.6.3

Nersjunkningen respektive stigningen blir alltså

$$\frac{\omega^2 r^2}{4g}$$

2.6.4

2.7 Hydrostatiskt tryck mot plana ytor

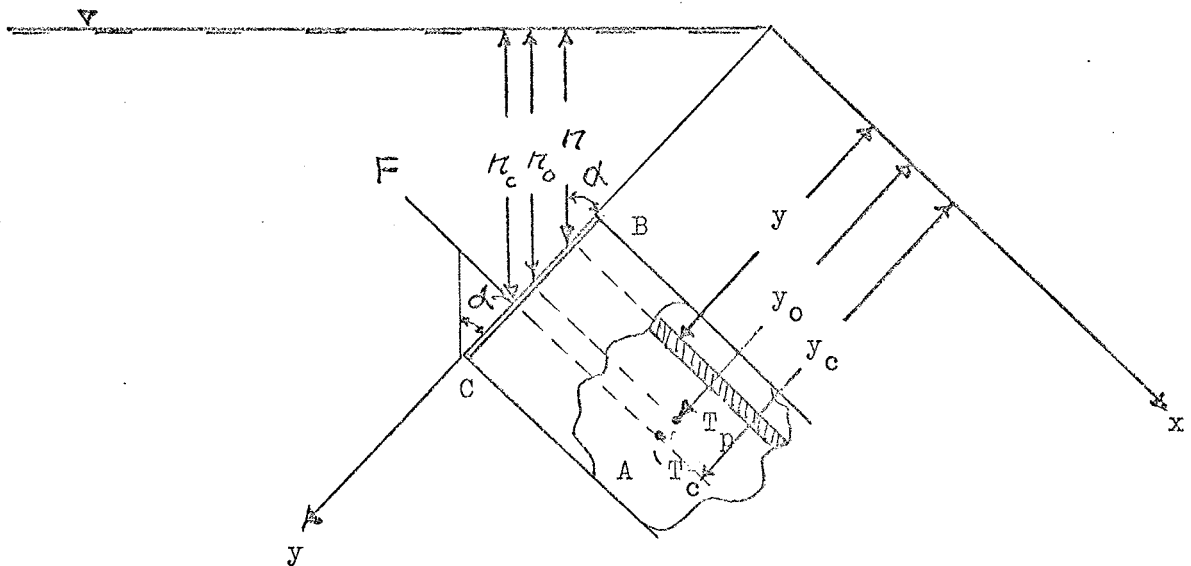


Fig. 2.18. Kraftverkan mot en plan yta nersänkt i en vätska.

Om F i figuren är totala tryckkraften mot den plana ytan A (BC) och trycket är dF mot ett ytelement dA beläget på djupet h blir

$$dF = p \, dA = \rho \, g \, h \, dA \quad 2.7.1$$

Nu är enligt figuren

$$h = y \cos \alpha$$

varför

$$dF = \rho \, g \, y \cos \alpha \, dA$$

Integration ger

$$F = \rho \, g \cos \alpha \int y \, dA$$

Integralen $\int y \, dA$ är ytan A 's (BC 's) geometriska moment med avseende på x -axeln.

Enligt mekaniken gäller att hela ytans moment är lika med summan av delytornas moment. Alltså

$$y_0 \, A = \int y \, dA$$

och således

$$F = \rho \, g \cos \alpha \, y_0 \, A$$

Nu är enligt figuren

$$h_0 = y_0 \cos \alpha$$

varför

$$F = \rho \, g \, h_0 \, A \quad 2.7.2$$

Totala vätsketrycket mot en begränsad plan yta är lika med tyngden av den vätskepelare, som har ytan till bas och ytans tyngdpunkts avstånd från den fria vätskeytan till höjd.

2.8 Tryckcentrum och dess läge

Tryckresultantens angreppspunkt T_c benämnes tryckcentrum. Den sammanfaller med ytans tyngdpunkt endast om ytan är horisontell.

Ur definitionen på tryckcentrum kan vi uppställa följande ekvation, om moment tages kring x-axeln

$$F y_c = \int y \, dF \quad 2.8.1$$

där y_c är tryckcentrums y-koordinat.

Vi har också att, eftersom

$$F = \int g \, h_0 \, A$$

och

$$dF = \int g \, h \, dA$$

$$\text{är } \int g \, h_0 \, A \, y_c = \int y \int g \, h \, dA$$

Nu är

$$h_0 = y_0 \cos \alpha$$

och

$$h = y \cos \alpha$$

varför

$$\int g \, y_0 \cos \alpha \, A \, y_c = \int g \cos \alpha \int y^2 \, dA$$

och

$$y_c = \frac{\int y^2 \, dA}{y_0 \, A} = \frac{I_x}{y_0 \, A} = \frac{\int y^2 \, dA}{\int y \, dA} = \frac{\iint y^2 \, dx \, dy}{\iint y \, dx \, dy} \quad 2.8.2$$

$I_x = \int y^2 \, dA$ är ytan A:s geometriska tröghetsmoment med avseende på x-axeln

$I_y = \int x^2 dA$ är ytan A:s geometriska tröghetsmoment med avseende på y-axeln.

Masströghetsmomentet fås genom att multiplicera geometriska tröghetsmomentet med massan per enhet.

Geometriska tröghetsmoment har dimensionerna

$$L^3 \quad \left(\int r^2 ds \right)$$

$$L^4 \quad \left(\int r^2 dA \right)$$

$$L^5 \quad \left(\int r^2 dV \right)$$

Parallell-axelteoremet (Steiners sats)

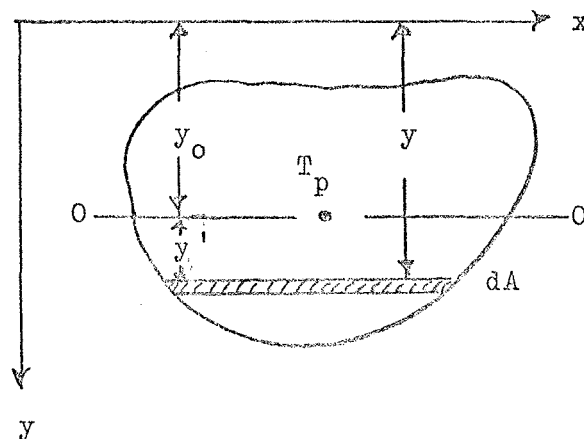


Fig. 2.19. Moment kring x-axeln och en med x-axeln parallell linje genom tyngdpunkten.

Enligt figuren är

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA = \int (y' + y_0)^2 dA = \\ &= \int \left[(y')^2 + (y_0)^2 + 2 y' y_0 \right] dA = \\ &= \int (y')^2 dA + \int (y_0)^2 dA + 2 \int y' y_0 dA = \\ &= \int (y')^2 dA + y_0^2 \int dA + 2 y_0 \int y' dA \end{aligned}$$

Här är värdet av $\int y' dA$ geometriska momentet av ytan A med avseende på linjen 0 - 0. Då linjen går genom tyngdpunkten är $\int y' dA = 0$.

Vi får då eftersom $\int (y')^2 dA = I_o$

$$I_x = I_o + y_o^2 A \quad (\text{Steiners sats}) \quad 2.8.3$$

$$\text{Då fås: } y_c = \frac{I_x}{y_o A} = \frac{I_o + y_o^2 A}{y_o A} = y_o + \frac{I_o}{y_o A} \quad 2.8.4$$

Tryckcentrums läge för oregelbundna ytor

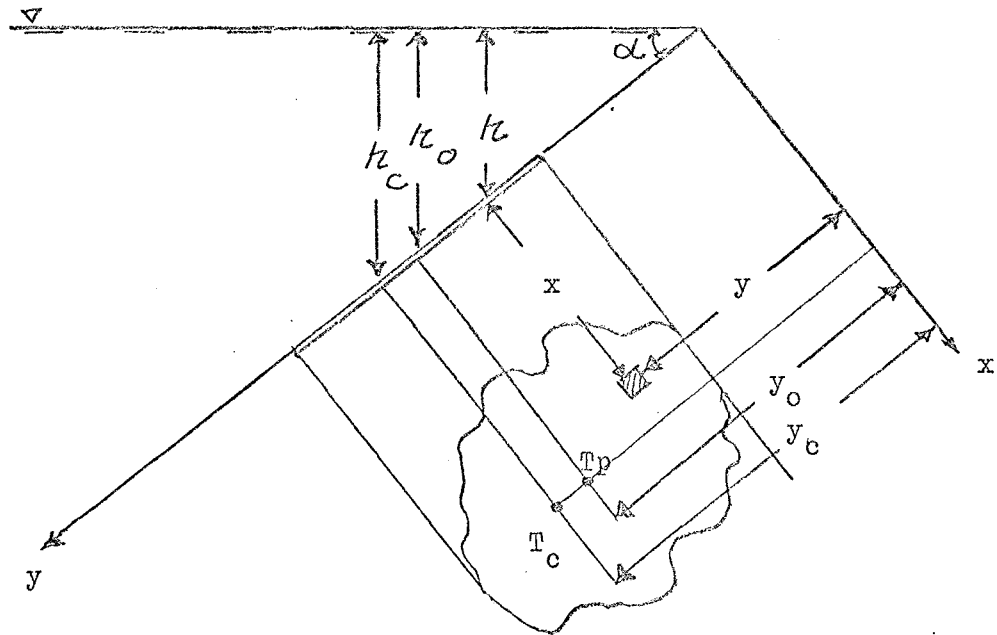


Fig. 2.20. Kraftverkan på en plan oregelbunden yta nersänkt i en vätska.

För oregelbundna ytor är tryckcentrums läge bestämd av båda koordinaterna (ej enbart av en).

Vi beräknar tryckcentrums läge också för x-koordinaten.

Enligt definition på tryckcentrum gäller

$$F x_c = \int x dF \quad 2.8.5$$

Enligt det föregående har vi att

$$dF = p dA = \rho g h dA$$

Nu är enligt figuren

$$r = y \sin \alpha$$

varför

$$F x_c = \int g \sin \alpha \int x y dA$$

Men $F = \rho g r_0 A$. Då $r_0 = y_0 \sin \alpha$ fås

$$F x_c = \rho g y_0 \sin \alpha A x_c = \rho g \sin \alpha \int x y dA$$

eller

$$y_0 \cdot A \cdot x_c = \int x y dA$$

dvs.

$$x_c = \frac{\int x y dA}{y_0 A} = \frac{\int xy dA}{\int y dA} = \frac{\iint xy dx dy}{\iint y dx dy} \quad 2.8.6$$

Integralen $\int x y dA$ kallas inom mekaniken centrifugalmoment eller tröghetsprodukt och betecknas C_{xy} .

Om ytan A har en symmetriaxel parallell med y-axeln och dessa tillåtes sammanfalla blir $C_{xy} = 0$. Bevis: x-koordinaten blir = 0 varför

$$\int x y dA = 0 \text{ och följaktligen även } C_{xy} = 0.$$

2.9 Hydrostatiskt tryck mot buktiga ytor

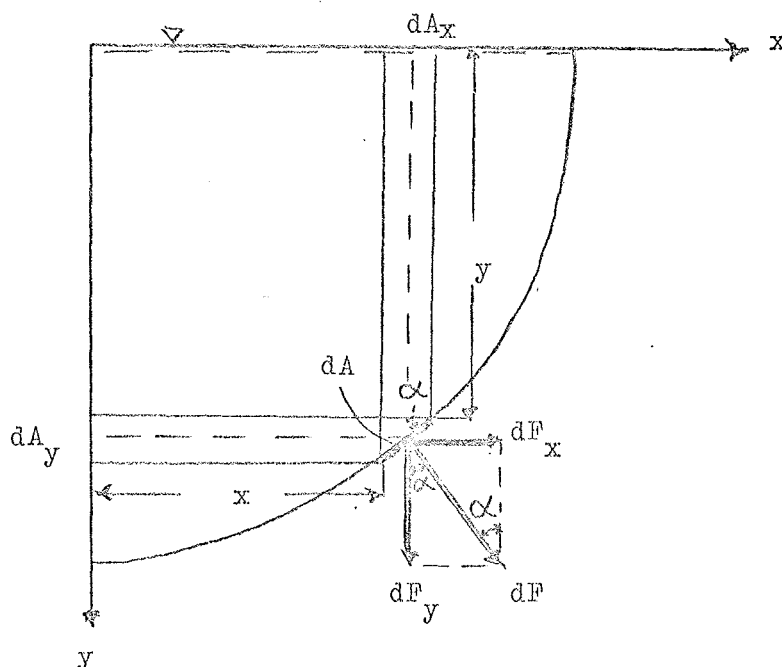


Fig. 2.21. Kraftverkan på en buktig yta nersänkt i en vätska.

I figuren är enl. föregående

$$dF = \int g y dA \quad 2.9.1$$

$$dF_x = dF \sin \alpha = \int g y dA \sin \alpha \quad 2.9.2$$

$$dF_y = dF \cos \alpha = \int g y dA \cos \alpha \quad 2.9.3$$

Dessutom är $dA_x = dA \cos \alpha$ och $dA_y = dA \sin \alpha$.

Ekv. 2.9.2 ger vid integration enligt föregående

$$F_x = \int g \int y dA_y = \int g y_0 A_y \quad 2.9.4$$

Ekv. 2.9.3 ger

$$F_y = \int g \int y dA_x = \int g V \quad 2.9.5$$

I ord uttryckt blir den vertikala tryckkraften mot en buktig yta lika med tyngden av den vertikala vätskepelare, som nedtill begränsas av den givna ytan och upptill av ytans projektion på den fria vätskeytan, likgiltigt om vätskan helt fyller detta rum eller ej.

Den horisontella tryckkraften mot en buktig yta är lika med det tryck som vätskan utövar på ytans vertikala projektion.

2.10 Tryck på i vätska nersänkta kroppar

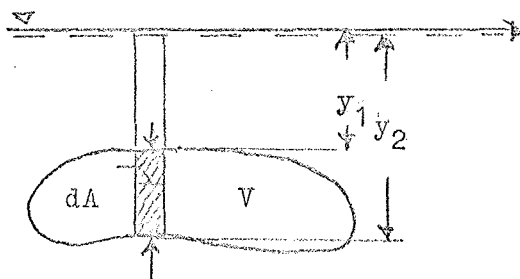


Fig. 2.22. Kropp nersänkt i en vätska.

En kropp nersänkt i en vätska antas indelad i vertikala volymssegment med horisontella tvärsnittet dA .

På elementets övre yta verkar då vertikala tryckkraften $\int g y$, dA nedåt

och på den nedre ytan vertikala tryckkraften $\int g y_2 dA$ uppåt.

Den vertikala kraftresultanten blir

$$dR = \int g(y_2 - y_1) dA$$

Detta uttryck anger tyngden av en med volymselementet lika stor vätskevolym. För hela kroppen fås efter integration

$$R = \int g \int (y_2 - y_1) dA = \int g V \quad 2.10.1$$

Kraftresultanten på en i en vätska helt eller delvis nersänkt kropp är lika med deplacementet, dvs. den av kroppen undanträngd vätskemassans tyngd (Archimedes princip).

Archimedes princip kan också härledas på följande sätt.

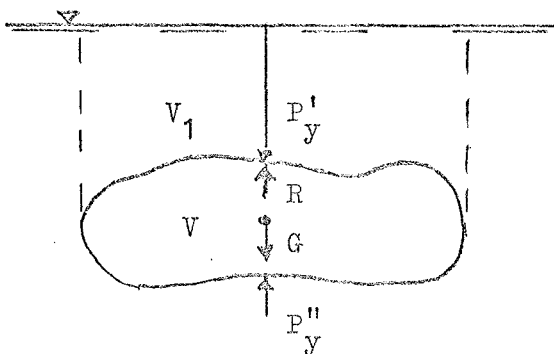


Fig. 2.23. Kropp nersänkt i en vätska.

Ovanstående figur föreställer en kropp nersänkt i en vätska med tätheten ρ . Kroppen hänger i en tråd. Spänningen i tråden = R . Resulterande nedåtriktade tryckkraften = P'_y , uppåtriktade tryckkraften = P''_y . Kroppens tyngd = G .

För jämvikt fordras

$$P'_y + G - P''_y = R$$

Nu är $P'_y = \rho g V'$ och $P''_y = \rho g(V + V')$

varför

$$\rho g V' + G - \rho g(V + V') = R$$

eller

$$G - \rho g V = R$$

Kroppen förlorar lika mycket i tyngd som tyngden av den undanträngda vätskevolymen.

2.11 Dragspänningen i ett rör

Ett cirkulärt rör under inverkan av ett inre tryck får en spänning runt sin periferi. Om vi antar, att inga längsriktade spänningar uppträder kan dragspänningen illustreras som i nedanstående figur.

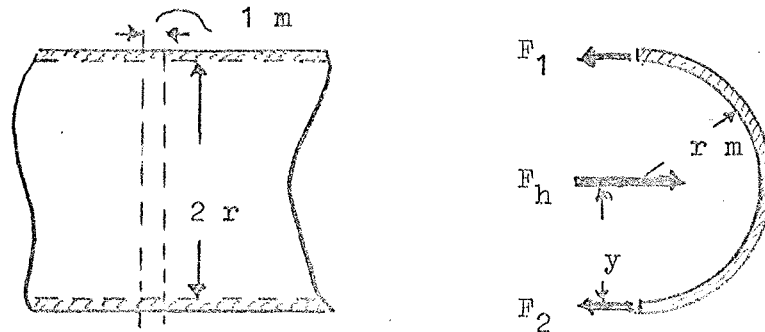


Fig. 2.24. Dragspänningen i ett rör.

Vi studerar en tvärsektion av röret av 1 m bredd. Om ena hälften av tvärsektionen tas som en "fri kropp", blir spänningen per m vid ovasidan och undersidan F_1 och F_2 (se fig.).

Den horisontella kraftkomponenten F_h verkar genom projektionsareans tryckcentrum och är $2 \cdot p \cdot r$, där p är trycket i centrumlinjen i N/m^2 och r är rörets inre radie.

Vid höga tryck kan tryckcentrum förläggas till rörcentrum, varvid $F_1 = F_2$ och

$$F = p \cdot r \quad 2.11.1$$

där F är dragspänningen per m. Med vägg tjockleken t m blir dragspänningen σ i rörväggen

$$\sigma = \frac{F}{t} = \frac{p \cdot r}{t} \quad 2.11.2$$

Vid större variationer i trycket mellan över- och undersidan av röret måste tryckcentrums läge beräknas, och två ekvationer fordras då

$$F_1 + F_2 = 2 \cdot p \cdot r$$

$$2 \cdot r \cdot F_1 - 2 \cdot p \cdot r \cdot y = 0$$

Den andra ekvationen är momentekvationen kring den fria kroppens nedre ända, med bortseende från den vertikala komponentkraften.

Vi löser ekvationssystemet och får

$$F_1 = p \cdot y \quad ; \quad F_2 = p(2r - y)$$

med y i m.

Exempel. Ett 4,0" stålrör har en vägg tjocklek av 0,25". Med en tillåten dragspänning av 10 000 atm., vad blir maximumtrycket?

Lösning:

$$\gamma = \frac{p \cdot r}{t} = 10\,000 = \frac{p \cdot 2}{0,25}$$

och alltså

$$p = 1250 \text{ atm.}$$

2.12 Dragspänningen i ett tunt sfäriskt skal

Om ett tunt sfäriskt skal är föremål för ett inre tryck kan man - om man bortser från tyngden av vätskan eller gasen inom sfären - finna uttryck för spänningen i väggarna genom att studera kraftverkan på en av de halvsfärer, som uppkommer vid delning av sfären genom ett vertikaltplan.

Vätskan eller gasens kraftkomponent, som är riktad vinkelrät mot planet på halvsfärens insida är $p \pi r^2$, om r är lika med radien. Spänningen γ gånger den avskurna väggytan $2 \pi r t$, där t är vägg tjockleken, måste balansera kraftkomponenten ovan. Alltså

$$\gamma = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t}$$

Hydrodynamik

3. Grunddragen av vätske- och gasrörelsers kinematik

3.1 Hastighetsfältet

Olika delar av en strömmande vätska eller en gas har vanligen olika hastigheter och accelerationer. Rörelsefältet kan då beskrivas med hjälp av vätske- eller gaspartiklarnas hastigheter och accelerationer i hela det fyllda rummet.

Både hastigheter och accelerationer är vektorstorheter, som vi kan beteckna med \vec{v} och \vec{a} respektive.

I Cartesiska koordinater är x , y , z -komponenterna v_x , v_y och v_z respektive a_x , a_y och a_z .

I allmänhet är \vec{v} och \vec{a} funktioner av tiden och även beroende av läget i rummet vid varje tidpunkt.

Det finns två sätt att beskriva partiklars rörelse i rummet.

I den första, Lagranges metod, är de rörliga partiklarnas koordinater satta som funktioner av tiden. Detta betyder att vid en godtycklig tidpunkt t_0 är en partikels koordinater a , b , c och partikelns läge vid varje annan tidpunkt är given genom ekvationer av formen

$$x = f_1(a, b, c, t); \quad y = f_2(a, b, c, t); \quad z = f_3(a, b, c, t) \quad 3.1.1$$

Motsvarande hastigheter och accelerationer blir

$$v_x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) a, b, c; \quad v_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) a, b, c; \quad v_z = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) a, b, c; \quad 3.1.2$$

$$a_x = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) a, b, c; \quad a_y = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) a, b, c; \quad a_z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) a, b, c; \quad 3.1.3$$

Tillägget a , b , c till de partiella derivatorna är en påminnelse om att a , b , c skall hållas konstanta vid deriveringen efter t .

Ovanstående metod är den vanligaste i fasta kroppars dynamik, där det ofta är lämpligt att identifiera en diskret (avskild) partikel (t.ex. masscentrum i ett fjäder-masssystem) och bestämma dess följande rörelse i tiden.

När det gäller en vätska eller en gas blir Lagranges' metod mycket svårhanterlig eftersom beskrivningen av ett strömningsfält kräver tre gånger så många parametrar av formen $x = f_1(a, b, c, t)$ etc.

Dessutom är vi inom hydromekniken vanligtvis ej intresserade av en partikels rörelse i detalj på grund av att vätskan eller gasen kan deformeras. Hellre vill vi då lära känna relationen mellan strömningsegenskaper vid individuella punkter i strömningsfältet.

Den andra metoden, att beskriva en vätskas eller en gas' rörelse, ger oss möjlighet att observera strömningen vid slumpmässigt utvalda punkter, utan att behöva ta hänsyn till identiteten hos de partiklar, som uppträder vid dessa punkter i ett givet ögonblick.

Vid användningen av denna metod, Eulers metod, observeras strömningsskarakteristika i närheten av bestämda punkter, när partiklar passerar.

Beskrivningen av det fullständiga strömningsfältet är väsentligen en ögonblicksbild av varje partikels hastighet och acceleration.

Grundskillnaden mellan de två metoderna ligger i det förhållandet att i Lagranges metod är partiklarnas koordinater givna som funktioner av tiden medan i Eulers metod partikelhastigheterna i olika punkter är satta som funktioner tiden.

Eulers hastighetsfält är givet genom

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad 3.1.4$$

där

$$v_x = f_1(x, y, z, t)$$

$$v_y = f_2(x, y, z, t)$$

$$v_z = f_3(x, y, z, t)$$

och \vec{i} , \vec{j} och \vec{k} är enhetsvektorer längs x, y resp. z-axlarna.

Vid användningen av denna metod kan vi uttrycka hastighetsförändringen i närheten av en punkt genom de partiella derivatorna av de fyra oberoende variablerna x, y, z, t samt de totala differentialerna. I x-riktningen:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

Komponenterna till den tillryggalagda vägen är ej oberoende utan tecknas

$$dx = v_x dt ; \quad dy = v_y dt \quad \text{och} \quad dz = v_z dt$$

Genom insättning i ekvationen ovan efter division med dt fås

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Detta är totala derivatan representerande hastighetsförändringen i x-riktningen för en partikel, som upptar ett bestämt läge i rummet vid en bestämd tidpunkt.

Denna består av "lokala" förändringen, som en funktion av tiden ($\partial v_x / \partial t$) och den "konvektiva" förändringen beroende av partikelns rörelse i rummet $\left[v_x (\partial v_x / \partial x) + v_y (\partial v_x / \partial y) + v_z (\partial v_x / \partial z) \right]$.

Liknande uttryck fås på samma sätt för y- och z-riktningarna.

Vilken som helst annan egenskap hos en vätska eller gas kan behandlas på samma sätt. Sålunda är totala täthetsförändringen hos en (kompressibel) vätska eller gas

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

För de tre accelerationskomponenterna fås

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

3.2.1

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Uttryckt i vektorform

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

3.2.2

eller

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

där vektoroperatoren $\vec{\nabla}$ ("nabla" eller "del") definieras

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad 3.2.3$$

i Cartesiska koordinater. (En härledning av $\vec{\nabla}$ med tillämpningar lämnas i avsnitt 7.2 sid. 191-198.)

Om alla lokala accelerationer är lika med noll, benämnes rörelsen stationär (se också i kapitel 4, avsnittet strömningskaraktistika). Hastigheten kan ändras från punkt till punkt i rummet, men i en bestämd punkt sker ingen förändring med tiden.

Om alla konvektiva accelerationer är lika med noll, är rörelsen likformig (se, som ovan, kapitel 4, avsnittet strömningskaraktistika). Är den konvektiva accelerationen noll betyder det, att strömningen är parallell. Hastighetsvektorerna är i likformig strömning överallt parallella.

3.2 Hastighetsgradienter och skjuvspänningar

Vi har sett i kapitel 1, att hastighetsgradienter ger ett mått på deformationen och att skjuvspänningar uppträder i viskösa vätskor beroende på deformationen.

Deformationen är kinematisk, medan skjuvspänningen är dynamisk (inbegriper en kraft).

Således är viskositeten den mekanism, som tillsammans med massverkan förbinder kinematiken hos en vätska med dess dynamiska uppträdande vid rörelsen.

4. För vätskors och gasers strömning grundläggande begrepp och ekvationer

4.1 Begreppen system och kontrollvolym

Ett system hänför sig till en bestämd massa av materia.

Enligt lagen om massans oförstörbarhet förblir massan inom ett system konstant med tiden. I ekvationsform

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad 4.1.1$$

där m är totala massan.

Newtons andra lag för ett system skrives i vektorform

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \quad 4.1.2$$

där m är systemets konstanta massa. $\sum \vec{F}$ är resultanten till alla yttre krafter, vilka verkar på systemet, inklusive masskrafter, som t.ex. tyngdkraften, och \vec{v} är hastigheten hos systemets masscentrum.

En kontrollvolym hänför sig till ett avsnitt av rummet och användes vid analysen av flöden in i och ut ur ifrågavarande avsnitt.

Gränserna till en kontrollvolym är dess kontrollyta. Storleken och formen hos en kontrollvolym kan tas helt godtyckliga.

Kontrollvolymbegreppet användes vid härledning av kontinuitets-, rörelsemängds- och energiekvationerna.

Oavsett strömningens natur är den underkastad följande lagar, som kan uttryckas analytiskt.

1. Newtons rörelselagar.
2. Lagen om kontinuitet eller lagen om massans oförstörbarhet.
3. Termodynamikens 1:a och 2:a huvudsatser.

1:a huvudsatsen: Ett perpetuum mobile av 1:a slaget är en omöjlighet varmed menas, att det är omöjligt att konstruera en maskin, som ständigt uträttar arbete utan energitillförsel. Med andra ord: Summan av alla existerande energimängder är konstant.

2:a huvudsatsen: Ett perpetuum mobile av 2:a slaget är en omöjlighet dvs. det är omöjligt att konstruera en maskin, som oavbrutet utför arbete, om energien skall tas från en värmereservoir, vars temperatur icke är högre än temperaturen hos de andra kroppar, som deltar i processen.

4. Lagen om gränsförhållandena, som säger, att vid gränser skall vätskans (eller gasens) hastighet vara noll, och att en ideal vätska eller gas ej kan överskrida en gräns.

5. Newtons viskositetslag.

Det är lämpligt, att först använda kontrollvolymbegreppet på en godtycklig egenskap hos ett system, för att sedan speciellt överföra det på kontinuitets-, energi- och rörelsemängdssambanden.

Vi betraktar en strömning i vilken strömningshastigheten är given relativt ett rätvinkligt koordinatsystem (fig. 4.1).

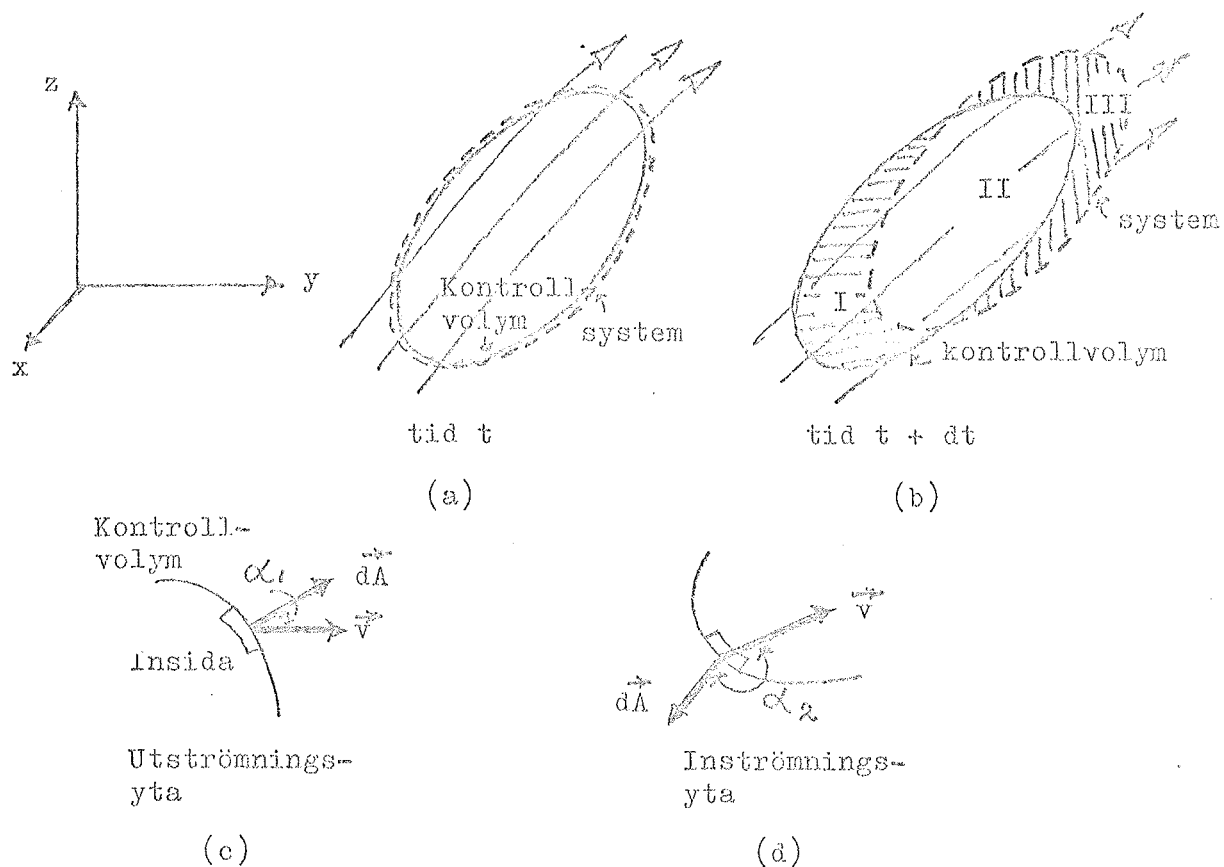


Fig. 4.1. System med identisk kontrollvolym vid tiden t i ett hastighetsfält.

Vid tiden t befinner sig en viss massa inom systemet begränsat av den brutna ovalen. Kontrollvolymen, fixerad relativt xyz-axlarna, sammanfaller exakt med systemet vid tiden t . Vid tiden $t + dt$ har systemet förflyttat sig enligt fig. 4.1 b.

Vi låter så N representera totala mängden av en viss egenskap (t.ex. massa, energi, rörelsemängd) inom systemet vid tiden t , och låter sam-

tidigt κ vara mängden av sagda egenskaper per massenhet. Ökningen per tidsenhet av N hos systemet kan nu formuleras utifrån kontrollvolymbegreppet.

Vid tiden $t + dt$ består systemet av volymerna II och III i fig. 4.1 b, medan det vid tiden t upptar volymerna I och II. Ökningen i egenskapen N hos systemet är då given av relationen

$$N_{\text{syst. } t + dt} - N_{\text{syst. } t} = \left(\int_{\text{II}} \kappa \rho \, dV + \int_{\text{III}} \kappa \rho \, dV \right)_{t + dt} - \left(\int_{\text{I}} \kappa \rho \, dV + \int_{\text{II}} \kappa \rho \, dV \right)_t$$

Vi flyttar om och dividerar med dt

$$\frac{N_{\text{syst. } t + dt} - N_{\text{syst. } t}}{dt} = \frac{\int_{\text{II } t + dt} \kappa \rho \, dV - \int_{\text{II } t} \kappa \rho \, dV}{dt} + \frac{\int_{\text{III } t + dt} \kappa \rho \, dV}{dt} - \frac{\int_{\text{I } t} \kappa \rho \, dV}{dt} \quad 4.1.3$$

Termen till vänster är ökningen av N i medeltal per tidsenhet inom systemet under tiden dt . I limes, då dt närmar sig 0 blir ökningen dN/dt .

I limes blir också de två första termerna till höger i ekvationen innehållande volym II, enligt definitionen på en partiell derivata

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{KV}} \kappa \rho \, dV$$

eftersom volym II blir detsamma som kontrollvolymen då $dt \rightarrow 0$.

Nästa term, som är flödet av N per tidsenhet ut ur kontrollvolymen kan i limes skrivas

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\int_{\text{III } t + dt} \kappa \rho \, dV}{dt} = \int_{\text{utströmn. yta}} \kappa \rho \vec{v} \cdot \vec{dA} = \int \kappa \rho \, v \, dA \cos \alpha \quad 4.1.4$$

där \vec{dA} i fig. 4.1 c är en vektor representerande ett ytelement av utströmningsarean. Den är riktad vinkelrätt mot kontrollvolymens yta, positiv utåt. α är vinkeln mellan hastighetsvektorn och ytelementets vektor.

På samma sätt fås, att den sista termen i ekv. 4.1.3 är flödet av N per tidsenhet in i kontrollvolymen med negativt tecken. I limes fås

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\int_{I \ t} \rho \, dV}{dt} = \int_{\text{inströmn.yta}} \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA} = \int \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA} \cos \alpha \quad 4.1.5$$

Som framgår av fig. 4.1 d är α negativ i detta fall.

De två termerna givna i ekv. 4.1.4 och 4.1.5 kan sammanfattas i en enda term, som är en integral över hela kontrollvolymytan, eftersom det har tagits vederbörlig hänsyn till tecken och att $\vec{v} \cdot \vec{dA}$ är lika med noll, då det ej förekommer strömning över gränsen.

Sammanfattningsvis fås

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, dV + \int_{KS} \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA} \quad 4.1.6$$

I ord uttryckt är ökningen av N per tidsenhet inom ett system lika med ökningen av N per tidsenhet inom kontrollvolymen (fixerad relativt xyz) plus nettoutströmningen av N över kontrollvolymgränsen.

Eftersom xyz-koordinatsystemet kan ges en godtycklig konstant hastighet utan att påverka kontrollsystemets och dess omgivningars dynamiska egenskaper gäller ekvation 4.1.6 om kontrollvolymen, bestämd till storlek och utformning, har en likformig translationshastighet.

4.2 Kontinuitets-, energi- och rörelsemängdsekvationerna för bestända kontrollvolymner.

Kontinuitetsekvationen

Kontinuitetsekvationen härleds ur den allmänna principen om massans oförstörbarhet ekv. 4.1.1, som anger, att inom ett system förblir massan konstant med tiden, dvs.

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

I ekv. 4.1.6 låter vi N vara systemets massa m . ρ är då massa per massenhet, dvs. lika med ρ . Då fås

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, dV + \int_{KS} \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{A} \tag{4.2.1}$$

I ord anger kontinuitetsekvationen för en kontrollvolym, att massans ökning per tidsenhet inom kontrollvolymen är lika med nettoinflödet per tidsenhet in i kontrollvolymen.

Energiekvationen

För ett system anger termodynamikens första huvudsats, att den värme Q_H , som tillförs systemet minus arbetet W utfört av systemet, endast beror på systemets begynnelse- och sluttillstånd.

Skillnaden i tillstånd hos systemet, som är oberoende av vägen från begynnelse- till sluttillståndet, är alltså en egenskap hos systemet. Skillnaden kallas förändringen i energi E . Termodynamikens första huvudsats i ekvationsform kan då skrivas

$$dQ_H - dW = dE \tag{4.2.2}$$

Förändringen i energi per massenhet kallas e , varför vid tillämpningen av ekv. 4.1.6, N blir lika med E och ρ lika med $\rho e/\rho$. Vi får alltså

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e \, dV + \int_{KS} \rho e \, \vec{v} \cdot d\vec{A} \tag{4.2.3}$$

eller genom användning av ekv. 4.2.2

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e \, dV + \int_{KS} \rho e \, \vec{v} \cdot d\vec{A} \tag{4.2.4}$$

Arbetet utfört av systemet på dess omgivningar kan innefatta

- (a) W_p , normaltryckens arbete (tryckintensiteten) verkande på systemets gränser

- (b) W_{fr} , tangentialspänningarnas (skjuvspänningarnas) arbete utfört vid systemets gränser på närliggande yttre vätska eller gas i rörelse.
- (c) W_{ut} , vridningsarbete utfört på ett roterande element inom systemet och fört utanför systemet genom en roterande axel.

Således kan vänstra ledet i ekv. 4.2.4 skrivas

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_p}{dt} - \frac{dW_{fr}}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad 4.2.5$$

Energien E är lagrad energi och är lika med dess specifika värde, energi per massenhet e , summerad över hela massan. Den lagrade energien är av tre slag:

- (a) $e_u = u$, inre energi per massenhet förbunden med vätskan eller gasens lokala temperaturnivå.
- (b) $e_p =$ läges (potentiell) energi per massenhet
- (c) $e_v = v^2/2$, rörelse (kinetisk) energi per massenhet förbunden med vätskan eller gasen lokala hastighet v relativt referenssystemet.

Den totala lagrade energien per massenhet är då

$$e = e_u + e_p + e_v = u + e_p + \frac{v^2}{2} \quad 4.2.6$$

I jordens gravitationsfält är $e_p = g z$ där z är vätskan eller gasens höjd över ett referensplan. Alltså

$$e = \frac{v^2}{2} + u + g z \quad 4.2.7$$

Vi kan först konstatera, att arbetet per tidsenhet, som utförs av normaltrycket på en enhetsyta är lika med enhetskraften p beroende på det lokala trycket gånger hastighetskomponenten i kraftriktningen, eller för kontrollsystemet.

$$\frac{dW_p}{dt} = \int_{KS} p \vec{v} \cdot \vec{dA}$$

Här räknas $\vec{v} \cdot d\vec{A}$ negativ för flöde in i kontrollvolymen (vinkeln α negativ, se fig. 4.1 d sid. 72) och positiv för flöde ut ur densamma.

Förändringen per tidsenhet i den lagrade energien E blir lika med nettoenergiflödet per tidsenhet genom kontrollvolymen plus förändringen per tidsenhet inom volymen eller

$$\frac{dE}{dt} = \int_{KS} e \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} e \rho dV$$

Den allmänna energiekvationen 4.2.5 kan nu skrivas

$$\begin{aligned} \frac{dQ_H}{dt} - \int_{KS} p \vec{v} \cdot d\vec{A} - \frac{dW_{fr}}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} &= \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e dV + \int_{KS} \rho e \vec{v} \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{fr}}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \int_{KS} p \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{KS} \rho e \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e dV \\ &= \frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{fr}}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \int_{KS} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e dV \quad 4.2.7 \end{aligned}$$

För system i jämvikt med små eller inga förändringar i rörelse eller lägesenergi är dE/dt helt beroende av förändringar i den inre energien. Följaktligen är E i den klassiska termodynamiken vanligen benämnd inre energi.

Antar vi att e i ekv. 4.2.6 endast beror av jordens gravitationsfält fås uttrycket på e (enligt ekvation 4.2.7) till $e = \frac{v^2}{2} + u + g z$ och vi erhåller allmänna energiekvationen för tyngdkraftsfältet till

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{fr}}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \int_{KS} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u + g z \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e dV \quad 4.2.8$$

Vid användningen av ekv. 4.2.8 är det lämpligt att eliminera termen för arbetet åstadkommet av skjuvspänningar genom ett passande val av kontrollvolymensgränser.

Således sammanfaller kontrollvolymensgränserna i fig. 4.2 med anordningens

väggar och de förra är också vinkelräta mot strömlinjerna i (1) och (2).

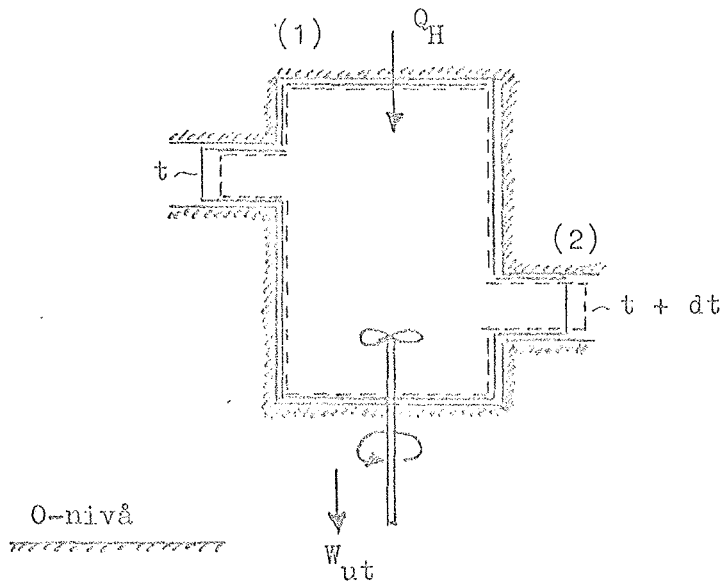


Fig. 4.2. Kontrollvolym för energibalansen i en generell anordning.

Eftersom hastigheten är noll vid fastlagda gränser och då det inte finns några tangentialkrafter vid (1) och (2) är arbetet åstadkommet av skjuvspänningar lika med noll.

Ekvation 4.2.8 reduceras då till

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \int_{KS} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u + g z \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e \, dV \tag{4.2.9}$$

Lineära rörelsemängdsekvationen

Newtons andra lag för ett system, ekv. 4.1.2, ligger till grund för härledningen av en kontrollvolymns lineära rörelsemängdsekvation med hjälp av ekv. 4.1.6.

Vi låter N vara den lineära rörelsemängden $m \vec{v}$ hos systemet och ρ vara den lineära rörelsemängden per massenhet $\rho \vec{v} / \rho$.

Då blir med användning av ekv. 4.1.2 och 4.1.6

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \vec{v} \, dV + \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \tag{4.2.10}$$

I ord uttryckt är den resulterande kraften, som verkar på en kontrollvoly-
m lika med ökningen av den lineära rörelsemängden inom kontrollvoly-
men per tidsenhet plus nettoutströmningen av lineär rörelsemängd från
kontrollvolymen per tidsenhet.

Det kan vara lämpligt, att kortfattat beröra rörelsemängdsprincipen. Denna
är, som förut påpekats härledd ur Newtons andra lag och har följande ly-
delse.

Vektorsumman $\sum \vec{F}$ av alla yttre krafter, som verkar på en vätske- eller
gasmassa, är lika med förändringen per tidsenhet av vätske- eller gas-
massans lineära rörelsemängdsvektor \vec{M} eller

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} \quad 4.2.11$$

De yttre krafterna är av två slag:

(a) gränskrafter, som innefattar

- 1) sådana, som verkar vinkelrätt mot kontrollgränsen, och vilka kan
mätas i termer av tryck i vätske- eller gassystem, \vec{F}_p
- 2) sådana, vilka verkar parallellt med kontrollgränserna, och som kan
mätas i termer av tangential- eller skjuvspänningar, \vec{F}_{fr}

(b) mass- eller fältkrafter, sådana, som beror av tyngdkrafts- eller mag-
netiska fält, \vec{F}_m .

Ekvation 4.2.10 kan nu skrivas

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_{fr} + \vec{F}_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \vec{v} dV + \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad 4.2.12$$

För stationär strömning och försumbara masskrafter fås

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{fr} = \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad 4.2.13$$

4.3 Strömningskaraktistika, definitioner

Strömning kan klassificeras på många sätt, t.ex. som turbulent, laminär,
verklig, ideal, stationär, icke stationär, likformig, olikformig, icke

rotationsfri, rotationsfri osv.

Situationer med turbulent strömning är mest allmänt förekommande i praktiken. Vid turbulent strömning rör sig vätske- eller gaspartiklarna på ett oregelbundet sätt från en del av vätskan eller gasen till en annan. Förloppet är mycket likt den molekylära rörelsemängdstransporten beskriven i avsnitt 1.3 sid. 11 och 12 men försiggår i en mycket större skala. Vätske- eller gaspartiklarna kan variera i storlek från att vara mycket små (några tusen molekyler) till att vara mycket stora (tusentals kubikmeter i en flodvirvel eller i en atmosfärisk luftblåsa).

I en situation, där strömningen antingen kan vara turbulent eller icke turbulent (laminär) åstadkommer turbulens större skjuvspänningar, än om icke turbulens skulle ha rått, med större friktionsförluster som följd.

Friktionsförlusterna i turbulent strömning visar sig också variera med kvadraten på hastigheten medan de i laminär strömning är proportionella mot hastighetens första potens. (Mera om detta längre fram.)

En vätskas rörelse säges vara laminär, då alla vätskepartiklar rör sig i jämna, bredvid varandra löpande banor.

Laminär strömning följer Newtons viskositetslag (ekv. 1.1.1), som förbinder skjuvspänning med vinkeldeformation.

Vid laminär strömning utjämnar verkan av viskositeten tendenser till turbulens.

Laminär strömning är ej stabil i situationer med låg viskositet kombinerad med hög hastighet, utan övergår då lätt i turbulent strömning.

En ekvation liknande Newtons viskositetslag kan skrivas för turbulent strömning

$$\tau_{\text{turb.}} = \mu \frac{d\bar{v}}{dy} + \mu_t \frac{d\bar{v}}{dy} \quad 4.3.1$$

där \bar{v} = medelhastigheten definierad enligt följande.

Den ögonblickliga hastigheten sätts lika med summan av ett medelvärde plus en fluktuerande komponent. Således kan vi skriva för xyz-riktningarna

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x ; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y ; \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad 4.3.2$$

där

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t} \int_0^t v_x dt \quad \text{etc. för } \bar{v}_y \text{ och } \bar{v}_z \quad 4.3.3$$

Eftersom fluktuationerna är både positiva och negativa blir medelvärdet av v'_x lika med

$$\bar{v}'_x = \frac{1}{t} \int_0^t v'_x dt = 0 \quad 4.3.4$$

Att medelvärdet av \bar{v}_x (och på samma sätt också v'_y och v'_z) är lika med noll för ett givet tidsintervall kan illustreras av fig. 4.3 för vindhastigheten i en given riktning.

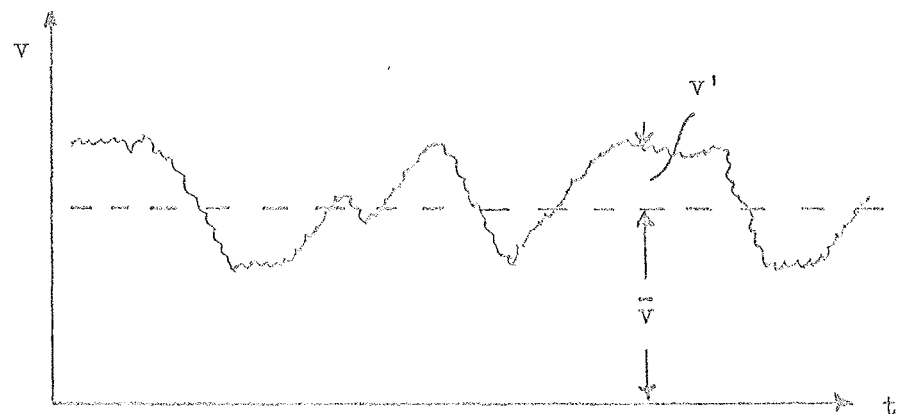


Fig. 4.3. Variationer i vindhastigheten för en given riktning (v'_x).

μ = den dynamiska, molekylära viskositeten, en egenskap hos vätskan eller gasen

ν = en dynamisk virvelviskositet, som beror på rörelsen och densiteten hos vätskan eller gasen.

En ideal vätska är friktionsfri och osammantryckbar (inkompressibel).

Vätske- eller gasskiktet i omedelbar närhet av en avgränsande yta, där det förra har en hastighet relativt den avgränsande ytan, som påverkas av viskösa skjuvspänningar kallas gränsskiktet. Gränsskikt kan vara laminära eller turbulenta, beroende huvudsakligen på deras längd, viskositeten, strömningshastigheten i deras närhet och gränsykans skrovlighet.

Adiabatisk strömning uppträder, när ej någon värme överförs till eller borttransporteras från vätskan eller gasen.

Reversibel adiabatisk strömning (friktionsfri adiabatisk strömning) benämnes isentropisk strömning.

Stationär strömning föreligger när förhållandena i vilken som helst punkt av vätskan eller gasen ej ändras med tiden.

Till exempel, om hastigheten i en viss punkt är 2.5 m/sek i positiva x-axelns riktning vid stationär strömning, bibehålles denna storlek på hastigheten i den givna riktningen i obegränsad tid. Detta kan skrivas

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{x,y,z} = 0$$

På samma sätt sker det vid stationär strömning ingen förändring med tiden i en godtycklig punkt av densiteten ρ , trycket p eller temperaturen T . Således

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x,y,z} = 0 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{x,y,z} = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x,y,z} = 0$$

Vid turbulent strömning uppkommer alltid små fluktuationer i hastigheten i en godtycklig punkt. Definitionen av stationär strömning måste här generaliseras med hänsyn till dessa fluktuationer. Detta illustreras i fig. 4.2.

Om tidsmedelvärdena för hastigheterna enligt ekv. 4.3.3

$$\bar{v}_x = \frac{1}{t} \int_0^t v_x dt \quad \text{etc. för } \bar{v}_y \text{ och } \bar{v}_z$$

(också generellt illustrerat i fig. 4.2 genom den horisontella linjen), ej ändras med tiden, säges strömningen vara stationär.

Samma generalisering gäller densiteten, trycket, temperaturen, etc. om de ersätter v i formeln ovan.

Strömningen är ej stationär när förhållandena i en godtycklig punkt ändras med tiden, dvs. $(\partial v / \partial t)_{x,y,z} \neq 0$.

Vatten, som pumpas genom ett fixerat system med konstant mängd per tidsenhet är ett exempel på stationär strömning. Vatten som pumpas genom ett

fixerat system med ökande mängd per tidsenhet är ett exempel på icke stationär strömning.

Likformig strömning uppkommer, när hastighetsvektorn är identisk (till storlek och riktning) i varje punkt i ett givet ögonblick, eller i ekvationsform

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial s}\right)_t = 0$$

varvid tiden hålls konstant och ds är en förflyttning i en godtycklig riktning.

Ekvationen anger, att det förekommer ingen ändring i hastighetsvektorn i någon som helst riktning någonstans i vätskan i ett godtyckligt valt ögonblick. Den anger däremot ingenting om förändringen i hastigheten med tiden.

Definitionen på likformig strömning kan också i de flesta fall utsträckas till att gälla för verklig strömning i en vätska eller en gas i öppna eller täckta ledningar, trots att hastighetsvektorn vid en gränssyta alltid är lika med noll.

När alla tvärsektioner av ledningen är identiska och medelhastigheten vid varje tvärsektion är densamma i ett godtyckligt ögonblick säges strömning en vara likformig.

En strömning, som är sådan att hastighetsvektorn varierar från punkt till punkt i ett givet ögonblick benämnes olikformig.

En vätska, som pumpas genom ett långt, rakt rör har likformig strömning, medan en vätska, som strömmar genom en minskad tvärsektion eller genom ett krokigt rör får olikformig strömning.

En vätska eller gaspartikels rotation (virvling) kring en given axel definieras som medelvinkelhastigheten hos två oändligt små linjeelement inom partikeln, vilka är vinkelräta mot varandra och den givna axeln.

Om vätske- eller gaspartikeln inom ett avsnitt roterar kring en godtycklig axel, då kallas strömningen för rotations (virvel) strömning, i annat fall är strömningen rotations (virvlings) fri.

Är en friktionsfri (ideal) vätska eller gas i vila, kommer varje dess senare rörelse att bli rotations (virvlings) fri. (Mera om rotation och rotationsfri strömning i avsnittet 7.4 sid. 203-206).

I endimensionell strömning bortses från variationer i hastighet, tryck etc. vinkelrätt mot strömningens huvudriktning. Förhållandena i en tvärsektion uttrycks ofta som medelvärden av hastighet, densitet osv. Strömning genom ett rör karakteriseras vanligen som endimensionell.

Många praktiska problem kan behandlas mycket enklare om man antar endimensionell strömning än om man skulle tillämpa ett två- eller tredimensionellt betraktelsesätt.

En strömlinje är en kontinuerlig linje så dragen i vätskan eller gasen, att den i varje punkt anger hastighetsvektorns riktning (se också avsnitt 4.4 sid. 85-87).

Någon strömning över en strömlinje kan ej uppträda, då detta skulle förutsätta två hastigheter i en och samma punkt, vilket vore orimligt.

Eftersom det ej föreligger någon ändring av hastighetsvektorns riktning i en godtycklig punkt vid stationär strömning, får strömlinjen en bestämd lutning i varje punkt, varför den är fastlagd i rummet.

En partikel rör sig alltid i tangenriktningen till strömlinjen, varav följer att vid stationär strömning är partikelns bankurva en strömlinje.

Vid icke stationär strömning kommer en strömlinje att förflyttas i rummet från ett ögonblick till ett annat, eftersom hastighetsvektorns riktning ändras med tiden. En partikel följer då en strömlinje ena ögonblicket, en annan nästa ögonblick, varför partikelns bankurva ej får någon likhet med en given strömlinje.

En illustration av en inkompressibel tvådimensionell strömning ges i fig. 4.4, där strömlinjerna är dragna så, att per tidsenhet är volymen, som strömmar mellan närliggande strömlinjer densamma (breddenheten antas vinkelrät mot figurens plan).

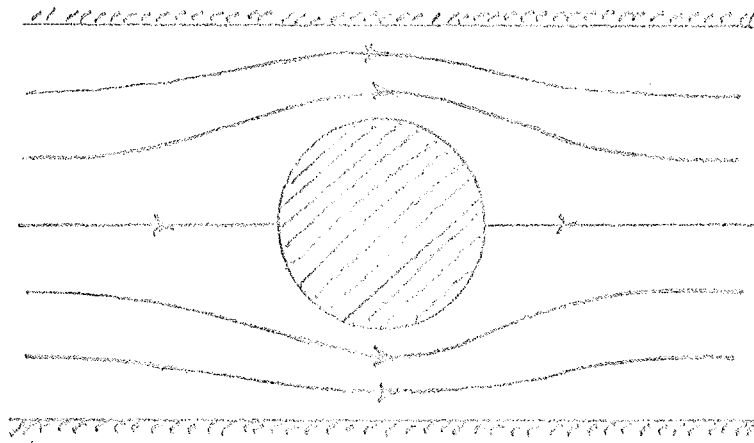


Fig. 4.4. Strömlinjer vid stationär strömning runt en cylinder mellan parallella väggar.

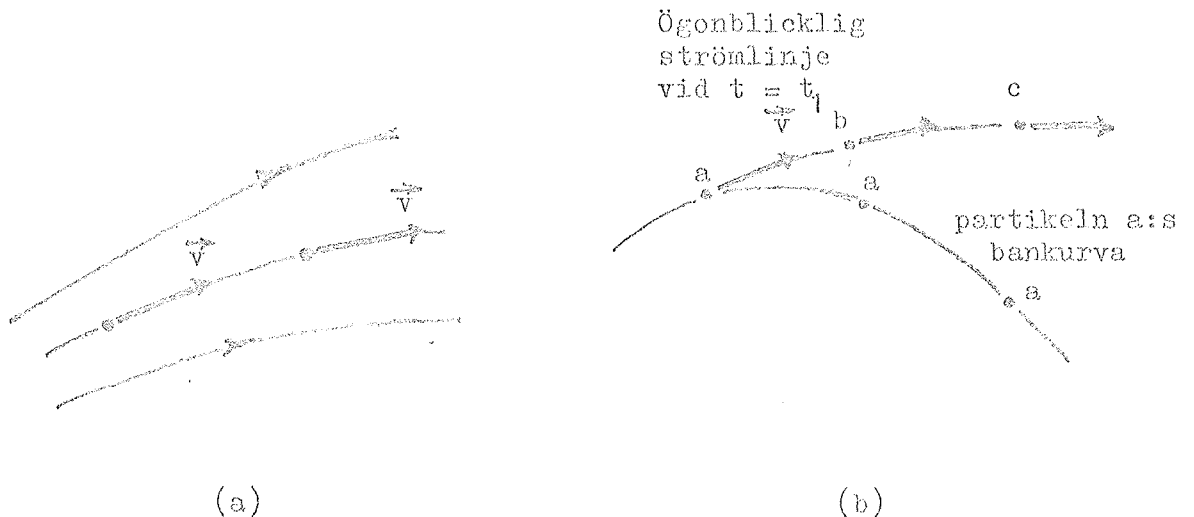
Förutsättningarna anger, att när strömlinjerna ligger nära varandra måste hastigheten vara större och vice versa. Om \bar{v} är medelhastigheten mellan två närliggande strömlinjer i ett läge, där avståndet dem emellan är h blir strömningsvolymen per tidsenhet

$$\Delta q = \bar{v} \cdot h \quad 4.3.5$$

I en annan punkt där distansen mellan strömlinjerna är h_1 , blir hastigheten $\bar{v}_1 = \Delta q/h_1$. Genom ökning av antalet strömlinjer, dvs. genom att minska Δq fås i limes hastigheten i en punkt.

Ett strömrör är ett rör, åstadkommet av strömlinjer passerande en liten sluten kurva. Vid stationär strömning är strömröret fastlagt i rummet och kan ej ha någon strömning genom sina väggar, eftersom hastighetsvektorn ej har någon komponent vinkelrätt mot rörytan.

4.4 Strömlinjer och bankkurvor



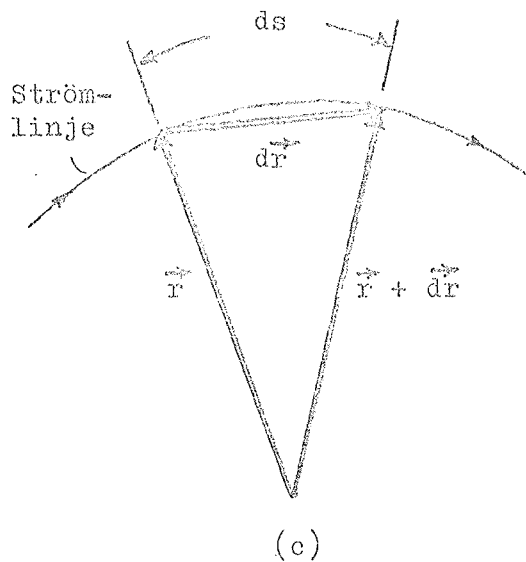


Fig. 4.5. Strömlinjer och bankurvor: (a) hastighetsvektorerna tangenter till strömlinjerna. (b) strömlinje och bankurva. (c) båglängdselement längs en strömlinje.

Vi har att $\vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$

I limes är $\vec{dr}/ds = \vec{n} =$ enhetstangentvektor.

$\vec{dr} = \vec{n} ds =$ båglängdselement längs en strömlinje.

En strömlinje är en imaginär linje sammanbindande en serie av punkter i rummet i ett givet ögonblick på ett sådant sätt, att alla partiklar, som befinner sig på linjen i detta ögonblick har hastigheter vars vektorer är tangenter till linjen [fig. 4.5 (a)].

Sålunda anger strömlinjerna rörelsens riktning i varje punkt i ett givet ögonblick.

Vid stationär strömning förblir strömlinjerna fixerade med hänsyn till referenssystemet. Vidare kommer de att sammanfalla med partiklarnas bankurvor, något som i allmänhet ej är fallet vid icke stationär strömning. Icke stationär likformig strömning utgör dock här ett undantag.

Fig. 4.5 (b) visar både en strömlinje och en bankurva för icke stationär olikformig strömning.

För en strömlinje i ett tvådimensionellt plan, xy-planet t.ex., fås differentialekvationerna för en strömlinje genom att skriva

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

varav följer att

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad 4.4.1$$

Alternativt kan vi skriva, eftersom hastighetsvektorn är en tangent till en strömlinje, vektorprodukten

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \quad 4.4.2$$

där $d\vec{r}$ = ett båglängdselement längs strömlinjen definierad enligt fig. 4.5 (c).

Sålunda för ett tredimensionellt fält i Cartesiska koordinater

$$\begin{aligned} v_y dx &= v_x dy \\ v_z dx &= v_x dz \\ v_z dy &= v_y dz \end{aligned} \quad 4.4.3$$

4.5 Kontinuitetsekvationen

Vi använder ekv. 4.2.1 sid. 75 dvs.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho dV + \int_{KS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Antag stationär strömning genom en del av strömröret i fig. 4.6. Kontrollvolymen begränsas av strömrörets väggar mellan sektion 1. och 2. samt ändytorna dA_1 resp. dA_2 . Eftersom strömningen är stationär blir första termen av ekv. ovan lika med noll varför

$$\int_{KS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad 4.5.1$$

Att ekv. 4.5.1 blir lika med noll betyder, att nettoutflödet av massa från kontrollvolymen också måste vara lika med noll.

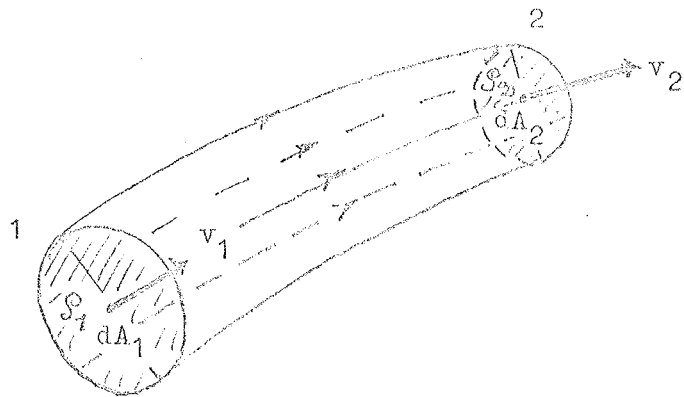


Fig. 4.6. Stationär strömning genom ett strömrör.

Vid sektion 1 blir nettoutflödet av massa $-\rho_1 v_1 dA_1$ och vid sektion 2 är den $\rho_2 v_2 dA_2$. Eftersom det ej sker någon strömning genom väggarna fås

$$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2 \tag{4.5.2}$$

Ovanstående uttryck är kontinuitetsekvationen tillämpad på två sektioner i ett strömrör vid stationär strömning. Lägena av sektionerna 1 och 2 är godtyckliga, varför vid stationär strömning massflödet per tidsenhet längs ett strömrör är

$$\rho v dA = \text{konst.} \tag{4.5.3}$$

Om densiteten är konstant, dvs. $\rho_1 = \rho_2$ fås

$$v_1 dA_1 = v_2 dA_2 \tag{4.5.4}$$

Kontinuitetsbegreppet för ett strömrör kan också utvecklas till att gälla för en kontrollvolym, vars väggar sammanfaller med en rörledningsvägg. Vi integrerar ekv. 4.5.2 över ytorna A_1 och A_2 och får

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2 = \int \rho dq \tag{4.5.5}$$

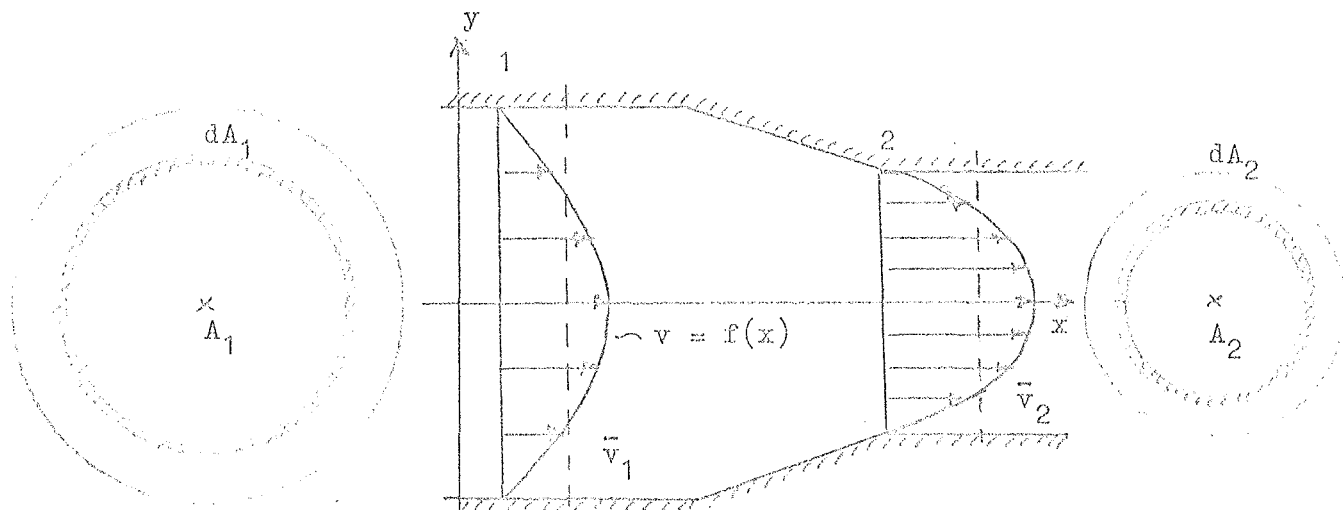


Fig. 4.7. Längdssektion av ett rör med rörförminskning.

I fig. 4.7 studerar vi en endimensionell strömning, dvs. vi antar parallella strömlinjer. I anslutning till figuren fås då generellt

$$\int_A \mathbf{v} \, dA = \int_A f(x) \, dA = \vec{v} \cdot A \quad 4.5.6$$

Massan, som per tidsenhet passerar sektion 1 blir då enligt ekv. 4.5.5:

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 \, dA_1 ; \text{ den vilken passerar sektion 2.: } \int_{A_2} \rho_2 v_2 \, dA_2.$$

Antar vi stationär strömning, så fås liksom enligt ekv. 4.5.5

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 \, dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 \, dA_2.$$

I en inkompressibel vätska är densiteten konstant, dvs. $\rho_1 = \rho_2$ och vi erhåller

$$\int_{A_1} v_1 \, dA_1 = \int_{A_2} v_2 \, dA_2 \quad 4.5.7$$

Men enligt ekv. 4.5.6 är $\int_{A_1} v_1 \, dA_1$ lika med $\vec{v}_1 \cdot A_1$ och $\int_{A_2} v_2 \, dA_2$ lika med $\vec{v}_2 \cdot A_2$

varför ekv. 4.5.7 kan tecknas

$$\vec{v}_1 \cdot A_1 = \vec{v}_2 \cdot A_2 \quad 4.5.8$$

Produkten $\vec{v} \cdot A$ är lika med den vätskemängd som per tidsenhet passerar ett godtyckligt tvärsnitt eller

$$q = \vec{v} \cdot A \quad 4.5.9$$

Antas vätskemängden dQ passera en tvärsektion under tiden dt säges dQ/dt vara flödet (= vätskeföringen) eller den momentana vätskemängd, som per tidsenhet passerar rörsektionen i ett givet ögonblick.

Är strömningen stationär gäller

$$\frac{dQ}{dt} = \text{konst.} = q \quad 4.5.10$$

Vi har då relationerna

$$Q = q \cdot t = \bar{v} \cdot A \cdot t$$

Q = en godtyckligt uttagen vätskemängd

q = vätskemängd per tidsenhet (flöde)

\bar{v} = medelhastighet

t = tiden.

Vid stationär strömning, där densiteten kan anses konstant, får ekv. 4.2.1 formen

$$\oint_{KS} \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad 4.5.11$$

Uttrycket anger, att nettovolymutflödet är lika med noll, dvs. kontrollvolymen är alltid fylld av det strömmande mediet.

Vid två- eller tredimensionella betraktelser används uttryck för kontinuitetsekvationen i differentialform.

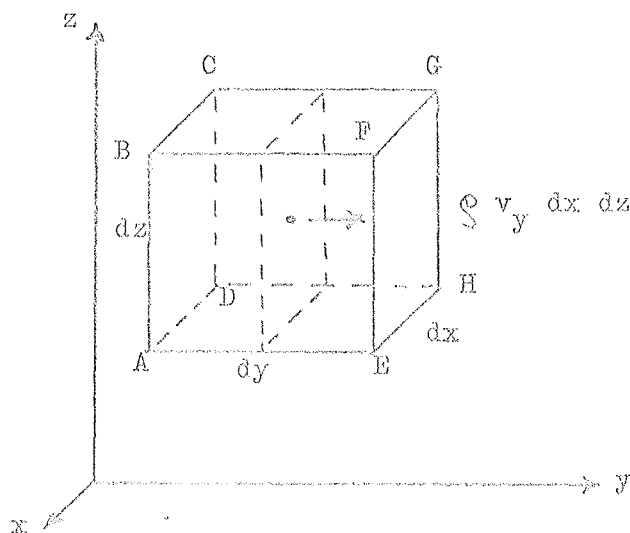


Fig. 4.8. Kontrollvolym för härledning av den tredimensionella kontinuitetsekvationen i Cartesiska koordinater.

För tredimensionella Cartesiska koordinater används ekv. 4.2.1 på kontroll elementet $dx dy dz$ i fig. 4.8 ovan med centrum i x, y, z , där hastighetskomponenterna i x, y och z -riktningarna är v_x, v_y och v_z respektive, och där ρ är densiteten.

Vi studerar först flödet genom de ändytor, som är vinkelräta mot y -riktningen. Genom ytan ABCD strömmar in i volymen mängden

$$\left[\rho v_y - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) \frac{dy}{2} \right] dx dz$$

eftersom både ρ och v_y antas variera kontinuerligt genom mediet. I uttrycket ingår $\rho v_y dx dz$, som är massflödet genom en yta i kontrollvolumens centrum lagd vinkelrät mot y -axeln. Den andra termen är förändringen av massflödet med avseende på y under förflyttningen $- dy/2$.

På samma sätt fås flödet ut ur volymen till

$$\left[\rho v_y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) \frac{dy}{2} \right] dx dz$$

Nettoflödet ut ur dessa båda ytor blir då

$$\rho v_y dx dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx \frac{dy}{2} dz - \left[\rho v_y dx dz - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx \frac{dy}{2} dz \right]$$

eller
$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx dy dz$$

De andra två axelriktningarna ger liknande uttryck varför nettomassutflödet blir

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz$$

Uttrycket ovan är högra delen av högra ledet i ekv. 4.2.1 ($0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho dV + \int_{KS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$). Vänstra delen av högra ledet blir då för ett element

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

Vi kan skriva

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz = - \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

I limes, när $dx dy dz$ går mot noll och efter division med $dx dy dz$, blir kontinuitetsekvationen i en punkt

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad 4.5.12$$

Denna ekvation gäller för varje punkt i strömningen, stationär eller icke stationär, kompressibel eller inkompressibel.

För inkompressibel, stationär strömning förenklas emellertid uttrycket till

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad 4.5.13$$

Vid plan eller tvådimensionell stationär strömning är $v_z = 0$. Vi får

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad 4.5.14$$

Vid parallell strömning eller endimensionell strömning är $v_z = v_y = 0$ varför

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

som efter integration ger

$$v = \text{konst.} \quad 4.5.15$$

Ekvationerna 4.5.12 och 4.5.13 kan skrivas mycket kompakta genom användning av vektorer.

Med hjälp av enhetsvektorerna \vec{i} , \vec{j} och \vec{k} längs respektive x , y och z -riktningarna kan vi enligt det föregående teckna vektoroperatören eller

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad 4.5.16$$

Hastighetsvektorn \vec{v} är given genom relationen

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad 4.5.17$$

Vi bildar skalära produkten av $\vec{\nabla}$ och $\mathcal{L}\vec{v}$ och får

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\mathcal{L}\vec{v}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (\mathcal{L}v_x \vec{i} + \mathcal{L}v_y \vec{j} + \mathcal{L}v_z \vec{k}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{L}v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{L}v_z) \end{aligned}$$

eftersom $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ etc.

Ekvation 4.5.12 får då formen

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{L}\vec{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.5.18}$$

och ekvation 4.5.13 blir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{4.5.19}$$

Skalära produkten $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ kallas divergensen av hastighetsvektorn \vec{v} .

I ord uttryckt anger denna att nettovolymutflödet i en punkt måste vara noll vid inkompressibel stationär strömning.

Exempel 4.1. Hastighetsfördelningen för en tvådimensionell inkompressibel stationär strömning är given genom relationerna

$$v_x = - \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad v_y = - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Visa att fördelningen satisfierar kontinuitetsekvationen.

Lösning: Kontinuitetsekvationen för två dimensioner är

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Då fås

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)^{-1} - (-x) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)^{-1} - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ekvationernas summor ovan blir lika med noll och satisfierar därigenom kontinuitetsekvationen.

4.6 Eulers rörelseekvation längs en strömlinje

Eulers rörelseekvation kan härledas genom användning av kontrollvolyms-ekvationerna, men erhålles ur Newtons andra lag på ett enklare sätt.

Vi betraktar i en ideal vätska som strömmar ett prismatiskt vätskeelement med längden ds i strömningsriktningen och tvärsnittsarean dA (se fig. 4.9).

De på elementet verkande krafterna är tyngdkraften mg samt tryckkrafterna $p dA$ på den nedre och $(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds) dA$ på den övre begränsningsytan.

De verkande krafterna ger elementet en acceleration i strömlinjens riktning.

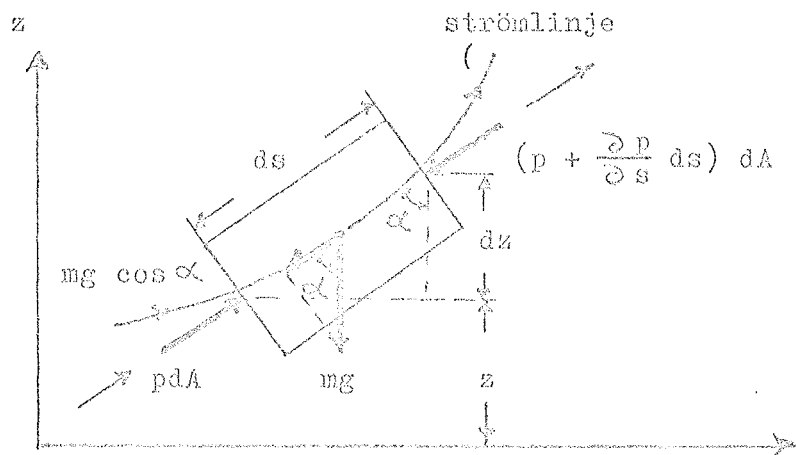


Fig. 4.9. Skiss visande ett prismatiskt vätskeelement i en strömmande ideal vätska.

Vi använder Newtons andra lag och får

$$F = m \cdot a = p dA - (p + \frac{\partial p}{\partial s} ds) dA - m g \cos \alpha$$

Dessutom är $m = \rho dA \cdot ds$ och $\cos \alpha = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial s}$

Då erhålles

$$\rho \, dA \, ds \, a = p \, dA - p \, dA - \frac{\partial p}{\partial s} \, dA \, ds - \rho \, g \, \frac{dz}{ds} \, dA \, ds$$

eller efter hyfsning och division med $dA \, ds$

$$\frac{dv}{dt} = a = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} \quad 4.6.1$$

Hastighetsförändringen dv i strömlinjens riktning kan uttryckas genom partiella differentialen

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} \, ds$$

Då blir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial s}$$

Insättning av uttrycket ovan i ekv. 4.6.1 och omgruppering ger då

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

Nu är s den enda oberoende variabeln varför totala differentialer kan ersätta de partiella differentialerna eller

$$\frac{dp}{\rho} + g \, dz + v \, dv = 0 \quad 4.6.2$$

Detta är en form av Eulers rörelseekvation.

4.7 Energiekvationen för endimensionell, stationär strömning

Om ekv. 4.2.9 tillämpas på stationär strömning genom en kontrollvolym enligt fig. 4.10 bortfaller volymintegralen och ekvationen antar formen.

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \frac{dE}{dt} = \int_{KS} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u + g \, z \right) \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA} \quad 4.7.1$$

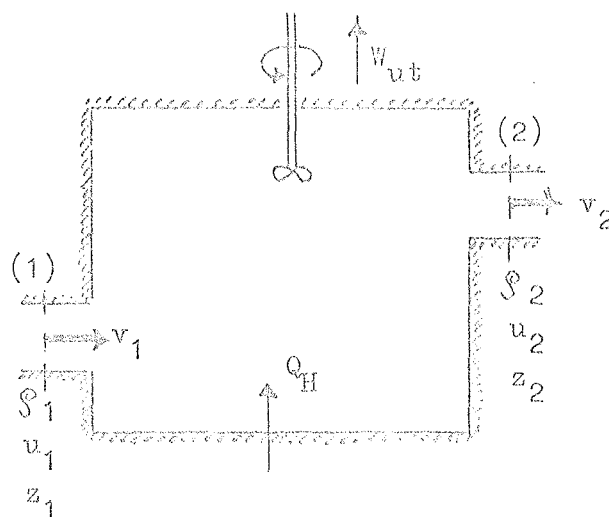


Fig. 4.10. Kontrollvolym med strömning vinkelrätt över kontrolllytan.

I många fall, när ekv. 4.7.1 tillämpas på strömning genom ledningar, är variationerna i olika egenskaper, t.ex. hastighet, tryck, densitet m.m. små över en tvärsektion.

Man kan då approximera de verkliga förhållandena genom att anta, att de olika egenskaperna är oförändrade vinkelrätt mot strömningsriktningen, dvs. vi antar strömningen vara endimensionell.

Den integrerade formen av ekv. 4.7.1 är då (se fig. 4.10).

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \left(\frac{p_2}{S_2} + \frac{v_2^2}{2} + u_2 + g z_2 \right) S_2 v_2 A_2 - \left(\frac{p_1}{S_1} + \frac{v_1^2}{2} + u_1 + g z_1 \right) S_1 v_1 A_1$$

där vi använt substitutionerna

$$\int_{(1)} S \vec{v} \cdot d\vec{A} = - S_1 v_1 A_1 = \text{masströmningen per tidsenhet in i kontrollvolymen (obs. neg. tecken, se fig. 4.1 d sid.72)}$$

och

$$\int_{(2)} S \vec{v} \cdot d\vec{A} = S_2 v_2 A_2 = \text{masströmningen per tidsenhet ut ur kontrollvolymen}$$

Eftersom strömningen antagits stationär, fås att $S_1 v_1 A_1 = S_2 v_2 A_2$. Division med massan per tidsenhet och med tyngdkraftsaccelerationen ger då

$$q_H - w_{ut} = \left(\frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{u_2}{g} + z_2 \right) - \left(\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{u_1}{g} + z_1 \right) \quad 4.7.2$$

där q_H är den tillförda värmemängden per mass- och tidsenhet av den strömmande vätskan eller gasen och w_{ut} korresponderande uttagna arbete.

Ekvation 4.7.2 gäller vid endimensionell strömning i en godtycklig vätska eller gas. Vid tillämpningen av ekvationen användes medelvärden på p , ρ , z , u och v vid tvärsektionerna ifråga. Det blir oftast en mycket god approximation för de fyra första parametrarna, så länge som strömningen är parallell vid sektionerna.

Hastigheten varierar emellertid över sektionen; i ett rör t.ex. från noll vid ledningsväggen till ett maximum i centrum. Det verkliga medelvärdet på flödet av rörelseenergi blir, om rörelseenergin betecknas med KE

$$\int (\text{KE/ enhet}) (\text{mass- enhet/sek}) = \int \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \alpha \frac{\rho}{2} \bar{v}^3 A \quad 4.7.3$$

där

\bar{v} = medelhastigheten över tvärsektionen ifråga

α = en korrektionsfaktor ≥ 1

Korrektionsfaktorn α kommer att närmare behandlas i sektion 4.11.

Ekvation 4.7.2 kan nu tecknas

$$q_H - w_{ut} = \left(\frac{p_2}{\rho_2 g} + z_2 + \alpha_1 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_1}{\rho_1 g} + z_1 + \alpha_2 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} \right) + \frac{(u_2 - u_1)}{g}; 4.7.4$$

För en vätska eller en gas med konstant densitet kan vi skriva efter omgruppering

$$\alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho_1 g} + z_1 = \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho_2 g} + z_2 + w_{ut} - q_H + \frac{(u_2 - u_1)}{g} \quad 4.7.5$$

I ägg märke till att varje term i ekv. 4.7.5 representerar en längd.

Vi kan också konstatera, att den algebraiska skillnaden mellan den vanna inre energien och värmetransporten från vätskan eller gasen representerar en "nettominskning" i systemets mekaniska energi. För vätskor visar det sig svårt att återföra denna minskning till mekanisk energi och minskningen betraktas därför som en "förlust".

Vi skriver ekv. 4.7.5 under formen

$$H_1 = H_2 + \Delta H_w + H_{f_{1-2}} \quad 4.7.6$$

där

H_1 och H_2 = medelvärden av strömningsenergin per mass- och tidsenhet
 = medelvärdet av totala tryckhöjden för alla strömlinjer,
 som passerar tvärsektionen (1) och (2) respektive

H_w = uttaget arbete

$H_{f_{1-2}}$ = förlust av mekanisk energi

Här sättes α lika med 1, om icke omständigheterna påfordrar något annat.

För kompressibla vätskor och gaser, där täthetsvariationer är av betydelse, kan ej förluster beroende på friktionsvärme beräknas med användning av allmänna energiekvationen.

Är däremot friktionsförlusterna försumbara och det samtidigt ej förekommer någon uteffekt eller värmetransport reduceras ekv. 4.7.5 till

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad 4.7.7$$

Om $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ fås Bernoullis ekvation för endimensionell strömning nämligen

$$H = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad 4.7.8$$

Ekv. 4.7.8 anger, att totala tryckhöjden längs en ledning är konstant. Den representerar en speciell form av en Bernoulliekvation, vilken vi kommer att härleda och diskutera i sektion 4.9.

Ekvationen 4.7.2 är energiekvationen för stationär strömning genom en kontrollvolym.

Energiekvationen 4.7.2 i differentialform för strömning genom ett strömrör (fig. 4.11) utan någon uttagseffekt (w_{ut}) skrives

$$dq_H = d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + d(u) + d(gz)$$

eller

$$\frac{dp}{\rho} + v dv + du + g dz - dq_H = 0$$

4.7.9

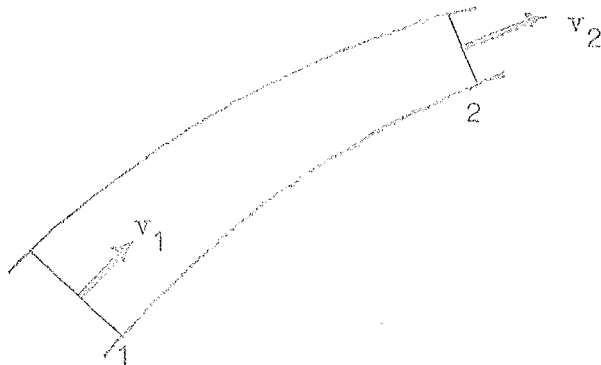


Fig. 4.11. Stationärt strömrör som kontrollvolym.

Ekvation 4.7.8 kan skrivas

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + v dv + du + p d \frac{1}{\rho} - dq_H = 0$$

4.7.10

De tre första termerna bildar Eulers ekvation (4.6.2); de tre sista är ett sätt att uttrycka termodynamikens första huvudsats, eller

$$dq_H = p d \frac{1}{\rho} + du$$

4.7.11

Nu är för en reversibel strömning, entropien s per massenhet definierad genom uttrycket

$$ds = \frac{dq_H}{T}$$

4.7.12

där T är absoluta temperaturen. Entropien är ett tillstånd hos vätskan eller gasen.

Eftersom ekv. 4.7.11 gäller för en friktionsfri vätska eller gas kan dq_H elimineras ur ekv. 4.7.11 och 4.7.12 eller

$$T ds = p d \frac{1}{\rho} + du$$

4.7.13

som är en mycket viktig termodynamisk relation.

Även om denna är härledd för en reversibel process, eftersom alla termerna är termodynamiska egenskaper, måste den också gälla för irreversibel strömning.

4.8 Sambandet mellan Eulers ekvationer och termodynamiska relationer

Termodynamikens första huvudsats i differentialform inkluderande "uttagseffekt" (dw_{ut}) fås ur ekv. 4.7.9

$$dw_{ut} + \frac{dp}{\rho} + v dv + g dz + p d \frac{1}{\rho} + du - dq_H = 0 \tag{4.8.1}$$

Substituering av $du + p d(1/\rho)$ för $T ds$ i ekv. 4.8.1 ger

$$dw_{ut} + \frac{dp}{\rho} + v dv + g dz + T ds - dq_H = 0 \tag{4.8.2}$$

Clausius s.k. "olikhet" anger att

$$ds \geq \frac{dq_H}{T}$$

eller

$$T ds \geq dq_H \tag{4.8.3}$$

Således är $T ds - dq_H \geq 0$. Likhetstecknet hänför sig till en reversibel process för en friktionsfri vätska eller gas, som ger ekv. 4.6.2 med en term för arbete. Om denna storhet, kallad "förluster", identifieras på såsom

$$d(\text{förluster}) \equiv T ds - dq_H \tag{4.8.4}$$

blir det klart att $d(\text{förluster})$ är positiva i irreversibel strömning och lika med noll i reversibel strömning. Det framgår också, att $d(\text{förluster})$ aldrig kan bli negativa.

Genom substituering av ekv. 4.8.4 i ekv. 4.8.2 fås

$$dw_{ut} + \frac{dp}{\rho} + v dv + g dz + d(\text{förluster}) = 0 \tag{4.8.5}$$

Detta är en mycket betydelsefull form av energiekvationen. I allmänhet måste "förlusterna" bestämmas genom tillgripande av experiment.

Ekvationen anger, att en del av den tillgängliga energien förvandlas till inre energi under en reversibel process.

Ekvation 4.8.5 skiljer sig vid frånvaron av "uttagseffekt", från Eulers ekvation endast genom "förlusttermen".

I integrerad form

$$\frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 + w_{ut} + \text{förluster}_{1-2} \quad 4.8.6$$

Om arbete utförs på vätskan eller gasen i kontrollvolymen, som t.ex. sker i en pump, då är w_{ut} negativ. Sektion 1 är förlagd uppströms och sektion 2 nedströms.

4.9 Bernoullis ekvation

Integration av Eulers rörelseekvation 4.7.2 sid. 97 ger

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{konst.} \quad 4.9.1$$

Integrationskonstanten (Bernoullis konstant) varierar i allmänhet från en strömlinje till en annan, men förblir konstant längs en strömlinje i stationär, friktionsfri, inkompressibel strömning.

Varje term i Bernoullis ekvation kan tolkas som en form av energi. Från mekaniken vet vi att $m v^2/2$ anger rörelseenergin (kinetiska energin) och $m g z$ lägesenergin (potentiella energin) hos en partikel med massan m .

I ekv. $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{konst.}$ betyder alltså $\frac{v^2}{2}$ rörelseenergin och $g z$ lägesenergin per massenhet.

Den mellersta termen p/ρ är strömningsenergin per massenhet eller det nettoarbete som av ett vätskeelement utförs vid strömning på sin omgivning.

Dimensionen på alla i ekv. ovan ingående termer är densamma.

Vi har att $v^2 = \frac{F}{\rho} \frac{1}{L}$

$$v^2 = L^2 \cdot T^{-2}$$

p är (tryck)kraft per ytenhet. Då fås, om vi sätter $F = m a$ enligt Newtons andra lag

$$p = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad \text{Eftersom}$$

$$\rho = M \cdot L^{-3} \quad \text{erhållles}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}{M \cdot L^{-3}} = L^2 \cdot T^{-2}$$

$$g z = L \cdot T^{-2} \cdot L = L^2 \cdot T^{-2}$$

Summan av rörelseenergin, tryckenergin och lägesenergin är alltså konstant längs en strömlinje.

Ekv. 4.9.1 kan också skrivas

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{konstant} \quad 4.9.2$$

De tre termerna i ekvationens vänstra led blir till dimensionen längder

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L$$

$$\frac{p}{\rho g} = \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}}{M \cdot L^{-3} \cdot L \cdot T^{-2}} = L$$

$$L = L$$

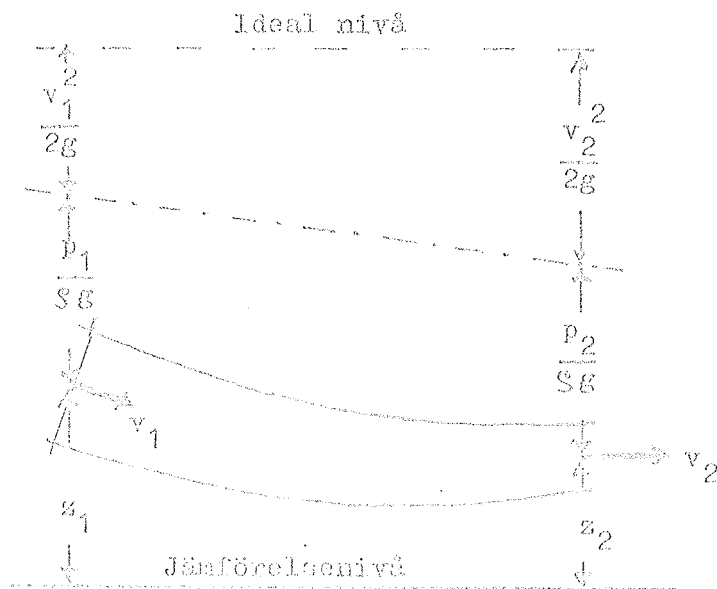


Fig. 4.12. Geometrisk illustration av termerna i Bernoullis ekvation uttryckte som längder.

Av fig. 4.12 framgår, att om en ideal vätska befinner sig i stationär strömning är för alla punkter utefter en strömlinje summan av hastighetshöjden $\frac{v^2}{2g}$, tryckhöjden $\frac{p}{\rho g}$ och den geometriska höjden z konstant.

Man kan också uttrycka Bernoullis ekvation i tryckenheter och får då

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = \text{konstant} \tag{4.9.3}$$

Termerna får här dimensionen för tryck. Alltså

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{M \cdot L^{-3} \cdot L^2}{T^2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$p = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$\rho \cdot g \cdot z = M \cdot L^{-3} \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

Exempel 4.2. Visa att energin per massenhet i en behållare fylld med vätska överallt är konstant.

Lösning:

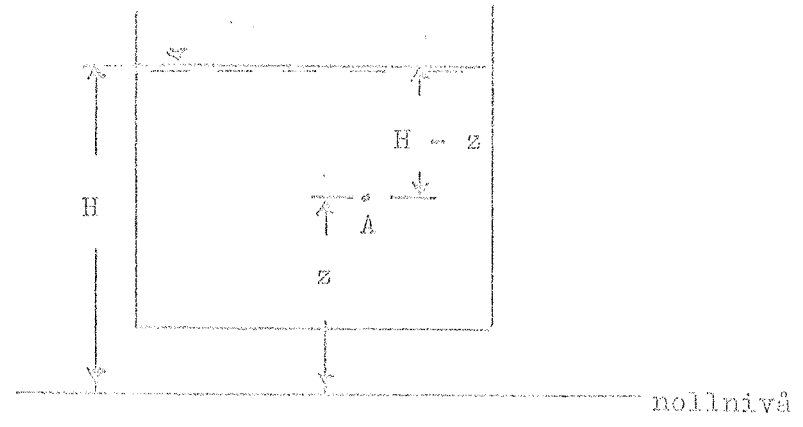


Fig. 4.13. Vätskebehållare.

I en godtycklig punkt A i behållaren ovan är energin per massenhet given genom Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{konst.}$$

När är $v = 0$; $p = \rho g(H - z)$

vareför erhålles

$$0 + \frac{g(H - z)}{\rho} + g z =$$

$$g H - g z + g z = g H$$

Eftersom z går bort ur ekvationen är energien per massenhet $g H$ för alla punkter i vätskan.

Exempel 4.3. Vatten strömmar i en öppen kanal med ett djup av 1,2 m och med en hastighet av 2,4 m/sek. Strömningen passerar genom en ränna in i en annan öppen kanal där vattendjupet är 0,60 m och hastigheten 12,3 m/sek. Om vi antar friktionsfri strömning bestäm nivåskillnaden mellan kanalernas bottenar.

Lösning: Om skillnaden i höjd mellan bottenarna sättes till y , kan Bernoullis ekvation skrivas

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

där v_1 = vattenhastigheten för övre vattenytan = 2,4 m/sek

v_2 = " " " nedre " " = 12,3 "

$p_1 = p_2 = \text{atm.färstrycket} = p_0$

Med den nedre kanalens botten som nollnivå fås att $z_1 = y + 1,2$;

$z_2 = 0,6$. Alltså

$$\frac{2,4^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{p_0}{\rho g} + y + 1,2 = \frac{12,3^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{p_0}{\rho g} + 0,6$$

$$0,2936 + y + 1,2 = 7,7110 + 0,6$$

$$y = 8,3110 - 1,4936 = 6,8174$$

Svar: 6,82 m

Genom att tillämpa ekv. 4.9.1 på två punkter på en strömlinje fås

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad 4.9.4$$

eller

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = 0$$

Ekvationen ovan visar, att det är skillnaden i hastighetsenergi, strömningsenergi och lägesenergi, som är av betydelse.

Under speciella förhållanden kan man bortse från de antaganden, som ligger till grund för Bernoullis ekvation (se sid.101). Dessa är

1: När alla strömlinjer härrör från ett avsnitt i rummet, där energiinnehållet överallt är detsamma, förändras ej integrationskonstanten från en strömlinje till en annan och punkterna 1 och 2 vid tillämpningen av Bernoullis teorem kan väljas godtyckligt, dvs. ej nödvändigt på samma strömlinje.

2: Vid strömningen hos en gas, t.ex. i ett ventilationssystem, där förändringen i trycket endast är några procent av absoluta trycket, kan gasen anses inkompressibel. Ekvation 4.9.1 kan användas efter införandet av en medeldensitet $\bar{\rho}$.

3: Vid icke stationär strömning, t.ex. vid de gradvis ändrade förhållanden, som uppkommer vid tömningen av en reservoar, kan Bernoullis ekvation användas utan större fel.

4: Bernoullis ekvation är användbar vid studiet av verkliga vätskor eller gasers strömning. Först bortser man från de viskösa effekterna. Den resulterande ekvationen kan sedan modifieras genom en koefficient, vilken korrigerar den teoretiskt funna relationen, så att den överensstämmer med det aktuella fysikaliska fallet. Koefficienten bestäms genom experiment. I allmänhet behandlas "förluster" genom användning av energi-ekvationen (ekv. 4.8.6 sid. 101).

Toricellis lag

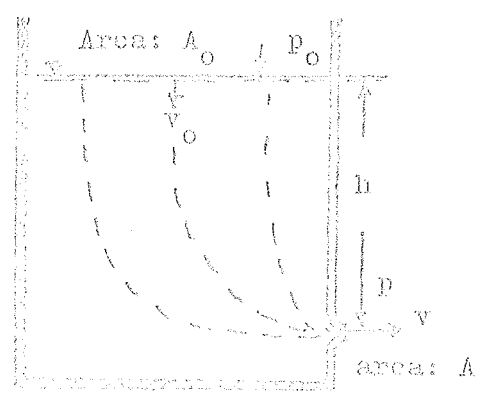


Fig. 4.14. Strömning genom liten öppning från en behållare.

I behållaren i fig. 4.14 med tvärsnittsarean A_0 befinner sig en ideal vätska. På djupet h under den fria vätskeytan finns en i förhållande till A_0 liten öppning med arean A . Vätskeytan hålls genom tillrinning på konstant nivå. Bernoullis ekv. ger då

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + 0$$

Vi löser ut v och får

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p}{\rho g} + h$$

$$v^2 = v_0^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right)} \quad 4.9.5$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$v \cdot A = v_0 \cdot A_0 \quad \text{eller} \quad v_0 = v \cdot \frac{A}{A_0}$$

Insättning i ekv. 4.9.5

$$v = \sqrt{v^2 \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right)}; \quad v^2 = v^2 \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right);$$

$$v^2 \left[1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2 \right] = 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right)}{1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2}} \quad 4.9.6$$

Är A mycket liten i förhållande till A_0 kan $\left(\frac{A}{A_0}\right)^2$ försummas. Ekv. 4.9.6 får då formen

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\rho g}\right)} \quad 4.9.7$$

Ofta är $p_0 = p = \text{atmosfärstrycket}$, vilket ger

$$v = \sqrt{2gh} \quad 4.9.8$$

Ekv. ovan är Toricellis lag, som anger att utströmningshastigheten är lika med sluthastigheten hos en kropp, som får falla fritt från den fria vätskeytan till utloppsöppningen.

Ekv. för fritt fall kan skrivas $v^2 = v_0^2 + 2gh$. För $v = 0$ fås $v^2 = 2gh$ och $v = \sqrt{2gh}$.

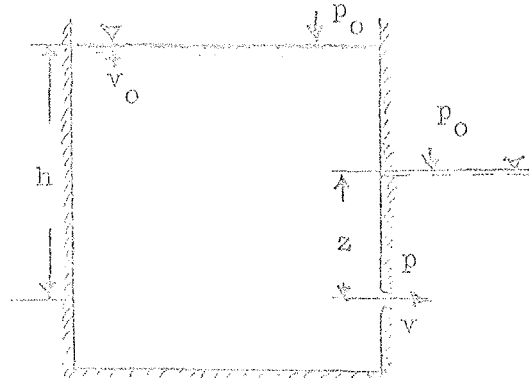


Fig. 4.15. Strömning genom liten öppning under en vätskeyta.

Försiggår strömningen under en vätskeyta enligt fig. 4.15 fås relationerna

$$p = p_0 + \rho g z$$

$$p_0 - p = - \rho g z$$

$$\frac{p_0 - p}{\rho g} = - z$$

Ekv. 4.9.7 får då formen

$$v = \sqrt{2g(h - z)} \quad 4.9.9$$

4.10 Trycken i en strömmande vätska

Äger ingen strömning rum, dvs. är utströmningsoppningen A i fig. 4.16 slutet, kommer vätskeytan i de olika rören att inställa sig i jämnhöjd med vätskeytan i kärlet. Hela systemet fungerar då som ett kommunicerande kärl.

Strömmar vätskan ut genom röret (vi antar förlustfri strömning) kommer vätskeytorna att inställa sig på lägre nivå (se figuren nedan).

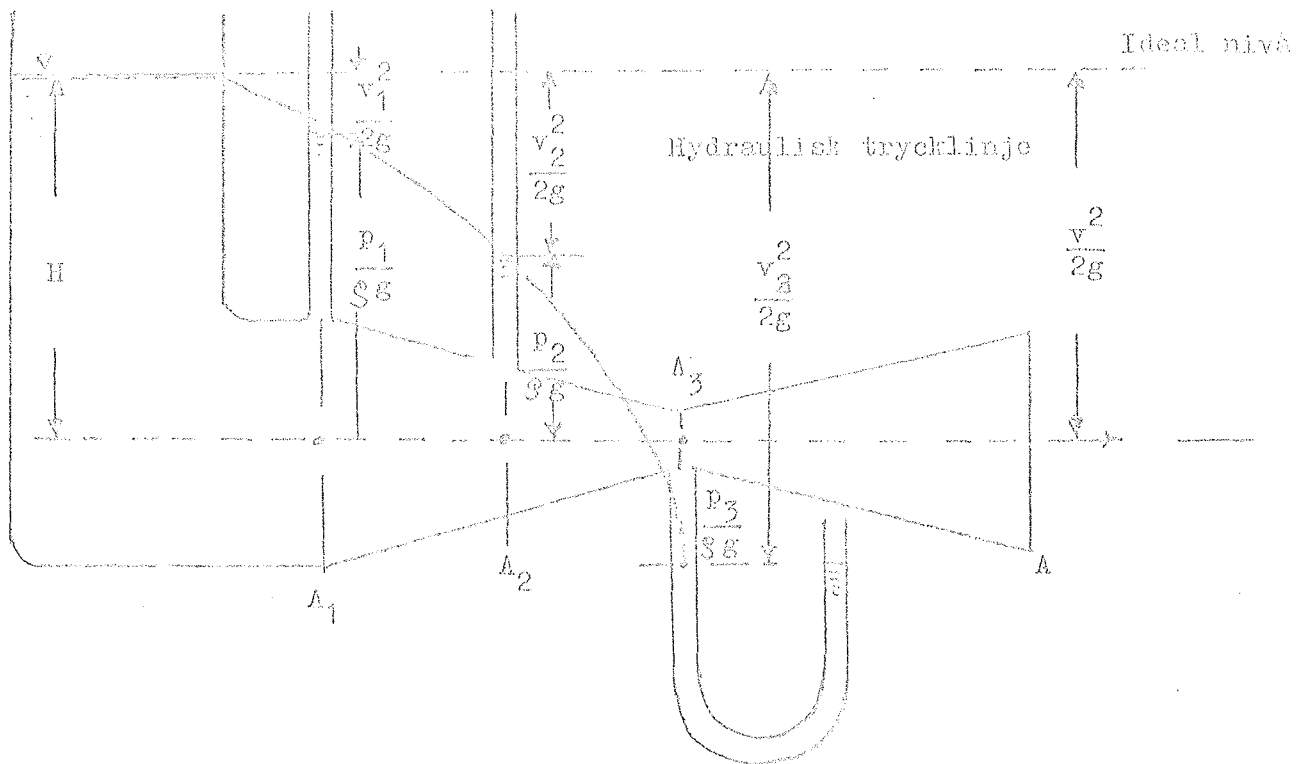


Fig. 4.16. Schematisk bild, visande trycken i en strömmande vätska.

Vi får då enligt Bernoullis ekv.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} = H \quad 4.10.1$$

eller

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 = \frac{\rho v_3^2}{2} + p_3 = \frac{\rho v^2}{2} = \rho g H \quad 4.10.2$$

I ekv. 4.10.2 betyder $\frac{\rho v_1^2}{2}$; $\frac{\rho v_2^2}{2}$; $\frac{\rho v_3^2}{2}$ och $\frac{\rho v^2}{2}$ de s.k. hastighetstrycken eller dynamiska trycken; p_1 , p_2 och p_3 de s.k. statiska trycken. På motsvarande sätt är i ekv. 4.10.1 termerna $\frac{v_1^2}{2g}$, $\frac{v_2^2}{2g}$ och $\frac{v_3^2}{2g}$ de s.k. hastighetshöjderna och termerna $\frac{p_1}{\rho g}$, $\frac{p_2}{\rho g}$ och $\frac{p_3}{\rho g}$ de s.k. statiska tryckhöjderna.

Av ekv. 4.10.2 framgår, att summan av det statiska trycket och det dynamiska trycket i varje punkt är konstant och lika med det totala trycket.

Härav följer omedelbart, att ju större hastigheterna i en punkt är, desto mindre är det statiska trycket. Det kan t.o.m. bli negativt (undertryck).

om hastigheten är tillräckligt stor.

Enl. kont.villkoret är i figuren

$$v_3 \cdot A_3 = v \cdot A \quad \text{eller} \quad v_3 = v \frac{A}{A_3}$$

Insättning i ekv. 4.10.2 ger

$$\frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{A}{A_3} \right)^2 + p_3 = \frac{\rho v^2}{2}$$

dvs.

$$p_3 = \frac{\rho v^2}{2} \left[1 - \left(\frac{A}{A_3} \right)^2 \right] = - \frac{\rho v^2}{2} \left[\left(\frac{A}{A_3} \right)^2 - 1 \right] \quad 4.10.3$$

Om, som i figuren, A/A_3 är > 1 blir p_3 negativt, dvs. trycket i sektion 3 är lägre än atmosfärstrycket. Det uppstår en sugverkan. Härpå grundar sig också konstruktionen av vattenstrålpumpen eller ejektorn. Principen framgår av fig. 4.17.

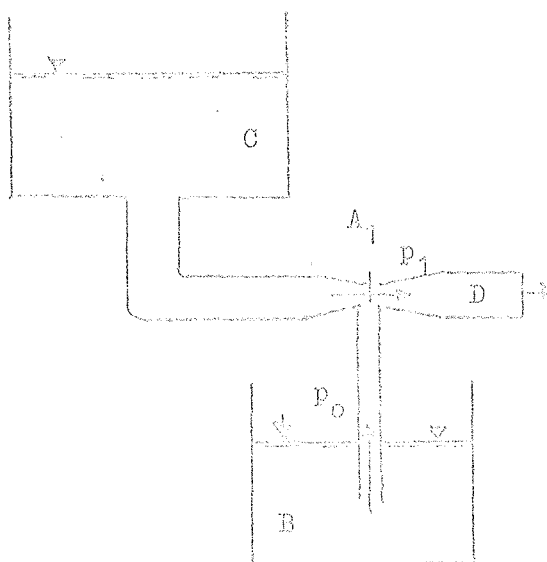


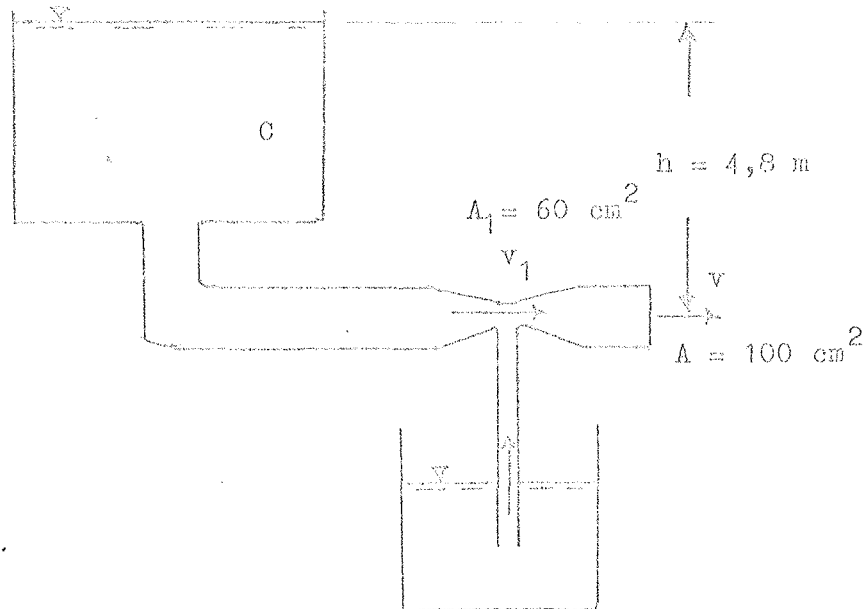
Fig. 4.17. Skiss visande principen för vattenstrålpumpen (ejektorn).

Vid förlängningen A_1 anslutes ett vertikalt sugrör, vars nedre ända är nersänkt i en vattenbehållare B. På grund av att det yttre lufttrycket p_0 är större än p_1 drögs vattnet upp i sugröret och ledes bort tillsammans med tryckvattnet från C genom röret D.

Exempel 4.4. I kärlet C i nedanstående figur antas vattennivån vara konstant och $h = 4,8$ m, $A = 100$ cm² och $A_1 = 60$ cm². $\rho_{H_2O} = 1000$ kg/m³.

a) Hur stor är utströmmande vattenvolymen?

b) Hur stor är statiska trycket vid förträngningen A_1 ?



Lösning: a) Enl. Toricellis lag $v = \sqrt{2gb}$ är utströmningshast.

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,8} = 9,70 \text{ m/sek}$$

Kont.villkoret ger: $q = v \cdot A$ eller $q = 9,70 \cdot 0,01 = 0,097$ m³/sek =
= 97 l/sek.

b) Kont.villkoret ger: $v_1 \cdot A_1 = v \cdot A$

$$v_1 = v \cdot \frac{A}{A_1}; \quad v_1 = 9,7 \cdot \frac{0,01}{0,006} = 16,2 \text{ m/sek}$$

Enl. Bernoullis ekv. har vi att

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + p_1 + 0 = \frac{\rho \cdot v^2}{2} + 0 + 0 \quad \text{eller} \quad \frac{1000 \cdot 16,2^2}{2} + p_1 = \frac{1000 \cdot 9,7^2}{2}$$

$$p_1 = 500(97,1 - 262,4) = -500 \cdot 165,3$$

$$p_1 = -82650 \text{ N/m}^2$$

4.11 Tillämpningen av Bernoullis ekvation och energiekvationerna på stationär strömning hos vätskor och gaser

För en inkompressibel vätska eller gas kan ekv. 4.8.6 sid. 101

$$\frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 + w_{\text{vrid}} + \text{förluster}_{1-2}$$

förenklas till

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f \quad 4.11.1$$

där varje term nu anger energi i J (N m) per kg. "Arbetstermen" har, som synes ej medtagits, då den ofta kan försummas och förluster₁₋₂ har betecknats med h_f .

Ekvationen 4.11.1 ovan benämnes ofta Bernoullis ekvation med förlustterm.

Med hjälp av ekv. 4.11.1 kan vi konstruera dels trycklinjen och dels energilinjen hos en strömmande vätska (fig. 4.18 och 4.19).

Som framgår av fig. 4.18 sammanfaller trycklinjen med den fria vätskeytan i en öppen ledning.

Energilinjen är belägen $v^2/2g$ över trycklinjen i en sluten ledning, respektive över den fria vätskeytan i en öppen ledning.

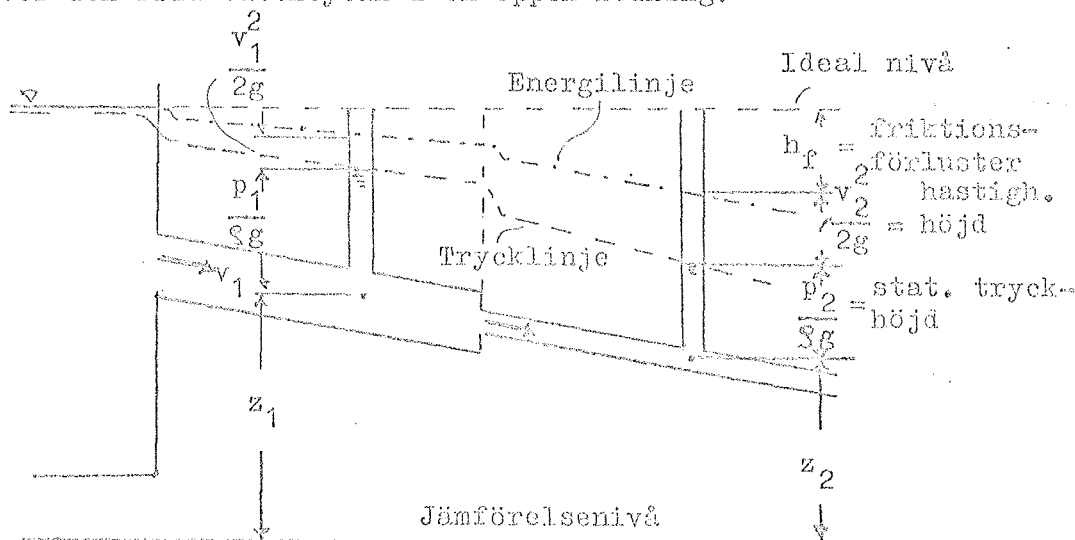


Fig. 4.18. Tryck- och energilinjen för en vätska i rörelse i en sluten ledning.

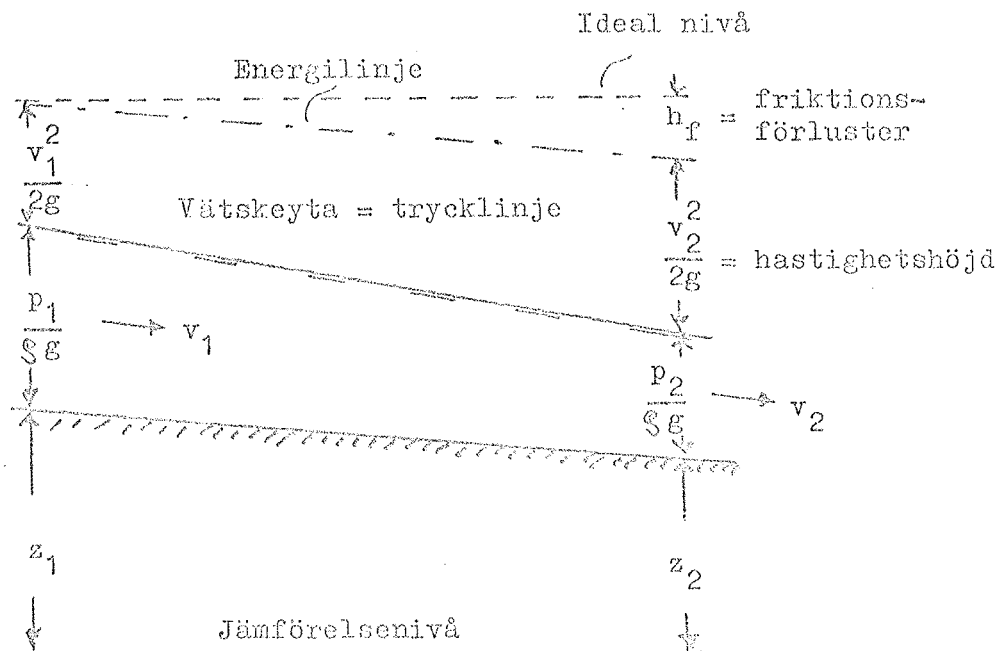


Fig. 4.19. Tryck- och energilinjen för en vätska i rörelse i en öppen ledning.

I det fall en slutna ledning gör en krök uppåt kan $p/\rho g$ bli negativt. Det uppkommer då en hävertledning.

Energilinjen blir för en ideal vätska horisontell, för en verklig vätska kommer den alltid att falla i rörelsens riktning.

Trycklinjen eller en fri vätskeyta kan däremot falla eller stiga beroende på hastighetens förändringar. Detta framgår av ekv. 4.11.1.

Korrektionsfaktorn för rörelseenergin α

Vid behandling av strömning i öppna eller slutna ledningar används ofta den endimensionella analysformen. Hela strömningen antas vara ett enda stort strömrör med medelhastigheten \bar{v} vid varje tvärsnitt.

Rörelseenergin per massenhet $\bar{v}^2/2$ blir emellertid medelvärdet av $v^2/2$ taget över hela tvärsnittet. Det är nödvändigt att beräkna en korrektionsfaktor α för $\bar{v}^2/2$, på så sätt att $\alpha \bar{v}^2/2$ blir medelvärdet av den rörelseenergi per massenhet, som passerar en tvärsnitt.

Man kan också uttrycka det så, att korrektionsfaktorn α skall ha den storleken att rörelseenergin blir densamma vare sig man räknar med den verkliga, ojämna hastighetsfördelningen eller med medelhastigheten \bar{v} .

Rörelseenergien för en liten vätskepartikel kan tecknas $dm \cdot v^2/2$ där dm är partikelns massa och v dess hastighet.

Uttrycket för den totala rörelseenergien blir efter integrering

$$\frac{1}{2} \int_A v^2 dm \text{ där } A = \text{tvärsnittsytan.}$$

$$\text{Men } dm = \rho dV = \rho dq = \rho v dA$$

Uttrycket för rörelseenergien får då formen

$$\frac{\rho}{2} \int_A v^3 dA \quad 4.11.2$$

Rörelseenergien beräknad med hjälp av \bar{v} ger uttrycket

$$\frac{m \cdot \bar{v}^2}{2}$$

$$\text{Men } m = \rho \cdot V = \rho \cdot q = \rho \cdot \bar{v} \cdot A \text{ varför vi kan skriva}$$

$$\frac{\rho \cdot \bar{v}^3 \cdot A}{2} \quad 4.11.3$$

Vi har då att

$$\alpha \cdot \frac{\rho \cdot \bar{v}^3 \cdot A}{2} = \frac{\rho}{2} \int_A v^3 dA$$

eller

$$\alpha = \frac{1}{\bar{v}^3 \cdot A} \int_A v^3 dA \quad 4.11.4$$

Vid turbulent strömning är α i regel 1,01 - 1,10.

Är ledningsväggen glatt blir α större för små värden på Reynolds tal Re än för stora värden på detsamma. (Reynolds tal Re kommer att närmare behandlas i avsnittet 5.5.)

Vid skrovlig ledningsvägg kommer α att bli större vid stor relativ skrovlighet än vid liten relativ skrovlighet. (Den relativa skrovlighets-

ten kommer också att behandlas längre fram i avsnittet 6.8.)

Vid laminär strömning (parabolisk hastighetsfördelning) blir för en bred öppen ränna α teoretiskt lika med 1,55 och för en rörledning med cirkulärt tvärsnitt lika med 2.

I skarpa krökar där centrifugalkraften starkt påverkar hastighets- och tryckfördelningen kan medelhastigheten ej läggas till grund för beräkning av hastighetshöjden. Hastighetsvariationen inom tvärsnittet blir mycket stor, dvs. α är stor och dessutom mycket svår att bestämma.

Exempel 4.5. En pump används för att förse en slang plus munstycke med vatten från en reservoar enligt fig. 4.20. Pumpen har en verkningsgrad $\eta = 0,85$ och ett effektbehov av 50 hk vid en levererad vattenmängd av 50 l/sek. Under dessa förhållanden blir trycket vid (2) - 345 mb och energilinjens samt trycklinjens form som visas i figuren. (a) Hur stor är energiförlusten mellan den fria vattenytan vid (1) och pumpintaget vid (2)? (b) Hur stort är trycket vid pumpens trycksida (3)? (c) Hur stor är energiförlusten mellan pumpens trycksida (3) och munstyckets utlopp(4)?

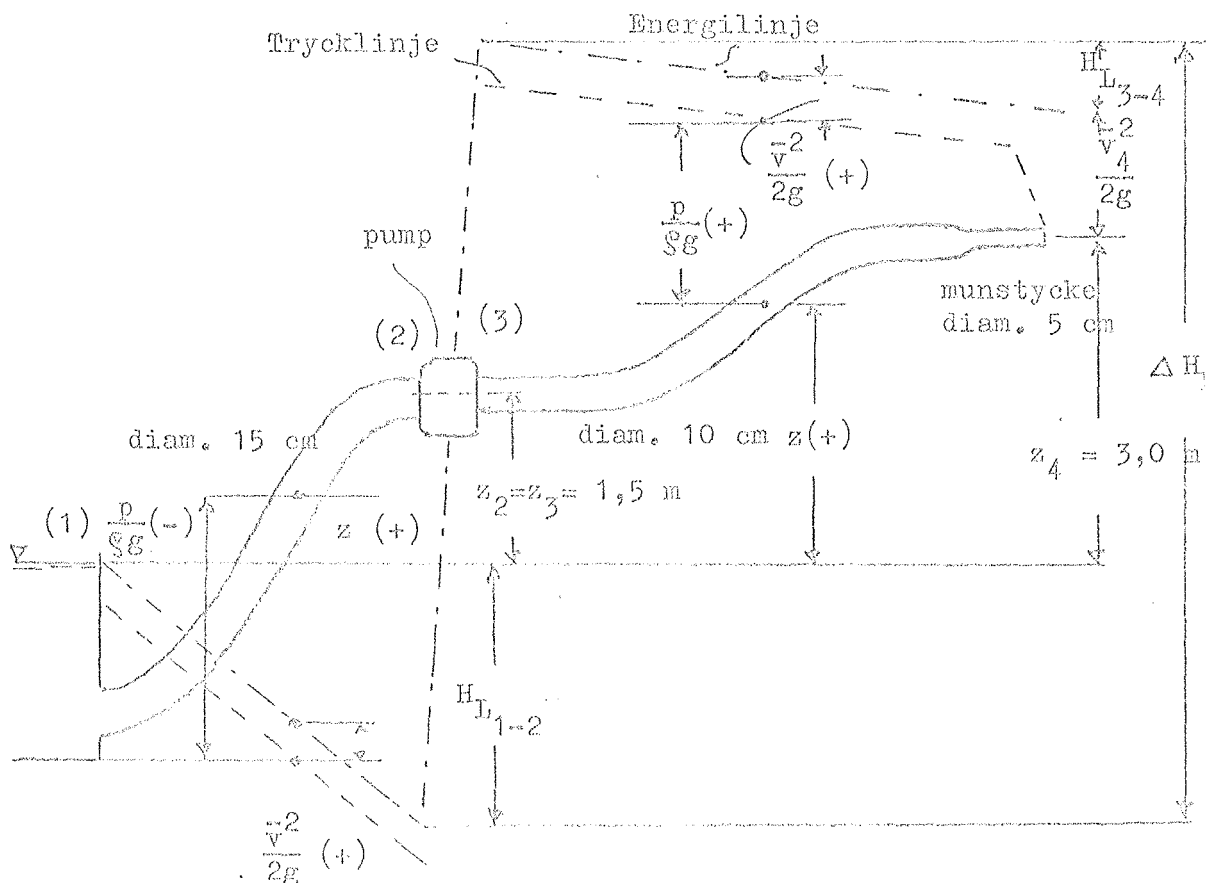


Fig. 4.20. Vatten pumpas genom en ledning med munstycke.

Lösning: Vi får enligt kontinuitetsekvationen ekv. 4.5.9 sid.89 för respektive sektioner ($q = \bar{v} \cdot A$)

$$\bar{v}_2 = \frac{0,05}{\pi \cdot 0,075^2} = 2,83 \text{ m/sek}$$

$$\bar{v}_3 = \frac{0,05}{\pi \cdot 0,05^2} = 6,37 \text{ m/sek}$$

$$\bar{v}_4 = \frac{50}{\pi \cdot 0,025^2} = 25,46 \text{ m/sek}$$

Används ekv. 4.7.6 sid. 98 ($H_1 = H_2 + \Delta H_w + H_{f_{1-2}}$) med $\alpha = 1,0$ fås

för (a) mellan (1) och (2) eftersom $v_1 = 0$

$$H_1 = H_2 + 0 + H_{f_{1-2}} = 0$$

eller

$$\frac{\bar{v}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + H_{f_{1-2}} = H_1 = \frac{2,83^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{-34500}{1000 \cdot 9,81} + 1,5 + H_{f_{1-2}} = 0$$

$$H_{f_{1-2}} = -0,408 + 3,517 - 1,5 = 1,61 \text{ m}$$

för (b) mellan (2) och (3). Från (2) till (3) överför pumpen vattenkraft, som förorsakar en nettoökning i energi. Då blir $H_2 - \Delta H_w = H_3$. ΔH_w kan beräknas ur formeln

$$\Delta H_w = \frac{1000 \cdot P \cdot \eta}{\rho g \cdot q \cdot 1,36} = \frac{1000 \cdot -50 \cdot 0,85}{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,05 \cdot 1,36} = -63,71 \text{ m}$$

där $P = -50$ hk (det negativa tecknet anger energioverföringen till vatt-net)

η = verkningsgraden

q = vattenmängd m^3/sek

Dessutom är $H_2 = -H_{f_{1-2}}$

Då blir, eftersom $H_3 = H_2 - \Delta H_w = -H_{f_{1-2}} - \Delta H_w$

$$\frac{\bar{v}_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + H_{f_{2-3}} = H_3 = \frac{6,37^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{p_3}{1000 \cdot 9,81} + 1,5 = -1,61 + 63,7$$

eller $2,068 + \frac{p_3}{9810} = 60,60; \quad \frac{p_3}{9810} = 58,532$

$$p_3 = 574200 \text{ N/m}^2 = 5,86 \text{ kp/cm}^2$$

(c) Mellan (3) och (4); $H_3 = H_4 + H_{f_{3-4}}$

$$\frac{6,37^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{574200}{1000 \cdot 9,81} + 1,5 = \frac{25,46^2}{2 \cdot 9,81} + 0 + 3,0 + H_{f_{3-4}}$$

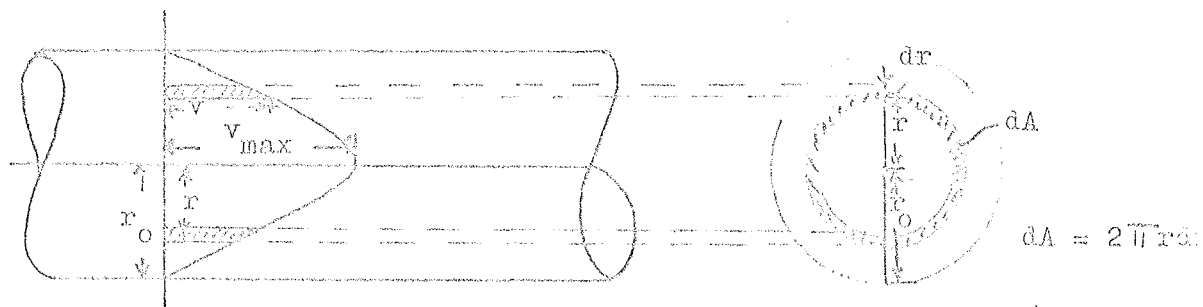
$$2,068 + 58,53 + 1,5 = 33,04 + 3,0 + H_{f_{3-4}}$$

$$H_{f_{3-4}} = 62,10 - 36,04 = 26,06$$

Exempel 4.6. En vätska strömmar genom ett cirkulärt rör. Beräkna kinetisk energifaktorn α för en hastighetsprofil som satisfierar ekvationen

$$v = v_{\max} \left(\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2} \right)$$

Lösning:



Vi beräknar medelhastigheten v

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \frac{q}{A} = \frac{\int v \, dA}{\pi r_0^2} = \frac{\int_0^{r_0} v_{\max} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2} \cdot 2\pi r \, dr}{\pi r_0^2} = \frac{2 v_{\max}}{r_0^4} \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) \, dr \\
 &= \frac{2 v_{\max}}{r_0^2} \int_0^{r_0} r \, dr - \frac{2 v_{\max}}{r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 \, dr = \frac{2 v_{\max}}{r_0^2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_0} - \frac{2 v_{\max}}{r_0^4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} = \\
 &= v_{\max} - \frac{v_{\max}}{2} = \frac{v_{\max}}{2}
 \end{aligned}$$

Detta värde kan också fås genom att utnyttja det förhållandet att volymen under en genererad paraboloid är halva volymen av en omskriven cylinder

$$V = \frac{\text{vol./sek}}{\text{basyta}} = \frac{\frac{1}{2} (\pi r_0^2) v_{\max}}{\pi r_0^2} = \frac{v_{\max}}{2}$$

Ekvationen för α har vi förut till

$$\alpha = \frac{1}{V^3 \cdot A} \int_A v^3 \, dA$$

Då fås

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{V^3 \cdot \pi \cdot r_0^2} \int_0^{r_0} \left[v_{\max} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2} \right]^3 2\pi r \, dr = \\
 &= \frac{v_{\max}^3 \cdot 2\pi}{V^3 \cdot \pi \cdot r_0^8} \int_0^{r_0} (r_0^6 \cdot r - 3 r_0^4 r^3 + 3 r_0^2 r^5 - r^7) \, dr = \\
 &= \frac{2 \cdot v_{\max}^3}{r_0^8 \cdot V^3} \left[\frac{r_0^6 \cdot r^2}{2} - 3 r_0^4 \frac{r^4}{4} + 3 r_0^2 \frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8} \right]_0^{r_0} = \\
 &= \frac{2 \cdot v_{\max}^3}{r_0^8 \cdot V^3} \left[\frac{12 r_0^8}{24} - \frac{18 r_0^8}{24} + \frac{12 r_0^8}{24} - \frac{3 r_0^8}{8} \right] = \frac{v_{\max}^3}{4 \cdot v_m^3} ; \quad V^3 = \frac{v_{\max}^3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\text{varför } \frac{v_{\text{max}}^3}{4 \frac{v_{\text{max}}^3}{8}} = 2,00 \quad \alpha = 2,00$$

Exempel 4.7. Hastighetsfördelningen vid turbulent strömning i en rörledning är approximativt given av Prandtls lag

$$\frac{v}{v_{\text{max}}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}$$

där y är avståndet till rörväggen och r_0 rörets radie. Sök korrektionsfaktorn för rörelseenergin α .

Lösning: Medelhastigheten \bar{v} kan uttryckas genom relationen

$$\pi r_0^2 \bar{v} = 2\pi \int_0^{r_0} r v dr$$

där $r = r_0 - y$. Genom substituering av r och v fås

$$\pi r_0^2 \bar{v} = 2\pi v_{\text{max}} \int_0^{r_0} (r_0 - y) \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}} dy = \pi r_0^2 v_{\text{max}} \frac{98}{120}$$

eller

$$\bar{v} = \frac{98}{120} v_{\text{max}} ; \quad v = \frac{120}{98} \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Genom insättning i ekv. 4.11.4 ($\alpha = \frac{1}{\bar{v}^3} \int_{\Lambda} v^3 d\Lambda$) fås

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{120}{98}\right)^3 \cdot \left(\frac{98}{120}\right)^3 \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \left(\frac{120}{98}\right)^3 \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{3}{7}} \cdot 2\pi r dr = \\ &= 2 \left(\frac{120}{98}\right)^3 \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0 - y) \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{3}{7}} dy ; \quad \alpha = 1,06 \end{aligned}$$

Begreppet fall

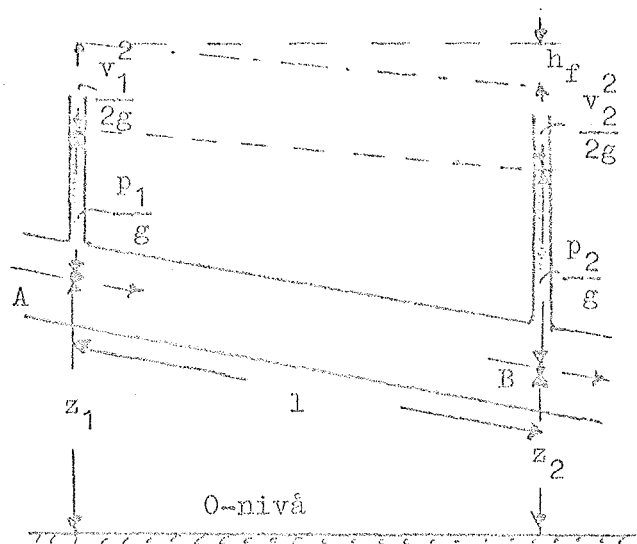


Fig. 4.21. Likformig strömning i sluten ledning.

I anslutning till fig. 4.21 tillämpar vi Bernoullis ekv. på den likformiga strömningen i rörsträckan AB. Då gäller

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f$$

Då strömningen är likformig blir $v_1 = v_2$ och $\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f$

eller

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \quad 4.11.5$$

Divideras ekvationen ovan med rörlängden l fås

$$I = \frac{h_f}{l} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g \cdot l} + \frac{z_1 - z_2}{l} \quad 4.11.6$$

Kvoten $\frac{h_f}{l}$ betecknad med I , kallas strömningens fall eller enbart fallet (även hydraulisk gradient).

I är sammansatt av tryckfallet $\frac{p_1 - p_2}{\rho g \cdot l}$ och det geometriska fallet eller ledningens lutning $\frac{z_1 - z_2}{l}$.

Ofta förekommer endast den ena komponenten, t.ex.

vid strömning i ett horisontellt rör enbart tryckfall

vid likformig strömning i en öppen ränna enbart geometriskt fall

4.12 Tillämpningen av den lineära rörelsemängdsekvationen

Newtons andra lag, rörelseekvationen, användes vid härledningen av den lineära rörelsemängdsekvationen 4.2.12 på sid. 79 eller

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_s + \vec{F}_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \vec{v} \rho \, dV + \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad 4.12.1$$

Denna vektorrelation kan tillämpas på en godtycklig komponent, t.ex. x-riktningen, varvid erhålles

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_x \rho \, dV + \int_{KS} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad 4.12.2$$

Vid val av den godtyckliga kontrollvolymen är det allmänt fördelaktigt att placera ytan vinkelrätt mot hastighetsriktningen, var än den förra skär strömingen.

Dessutom. Om hastigheten antas konstant över tvärsnittet, kan ytintegralen ersättas med produkten av ρ , \vec{v} och A .

I fig. 4.22 vid stationär strömning och med kontrollvolymen enligt figuren, fås kraften F_x , vilken verkar på kontrollvolymen sålunda.

Ekv. 4.12.2 kan skrivas

$$F_x = \int_{(1)} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_{(2)} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}. \text{ Uttryckt i vektorernas absoluta}$$

$$\begin{aligned} \text{belopp: } F_x &= \int_{v_{x1}} \rho_1 v_1 \, dA_1 \cos 180^\circ + \int_{v_{x2}} \rho_2 v_2 \, dA_2 \cos 0^\circ = \\ &= \int_{v_{x2}} \rho_2 v_2 \, dA_2 - \int_{v_{x1}} \rho_1 v_1 \, dA_1. \text{ Substitution av ytintegralerna ger} \end{aligned}$$

$$F_x = \rho_2 \vec{v}_2 A_2 \vec{v}_{x2} - \rho_1 \vec{v}_1 A_1 \vec{v}_{x1} \text{ eller}$$

$$F_x = \rho (\vec{v}_{x2} - \vec{v}_{x1}) \quad 4.12.3$$

eftersom massan per sekund, som strömmar in i och ut ur kontrollvolymen är

$$\rho q = \rho_1 q_1 = \rho_2 q_2 = \rho_1 \vec{v}_1 A_1 = \rho_2 \vec{v}_2 A_2$$

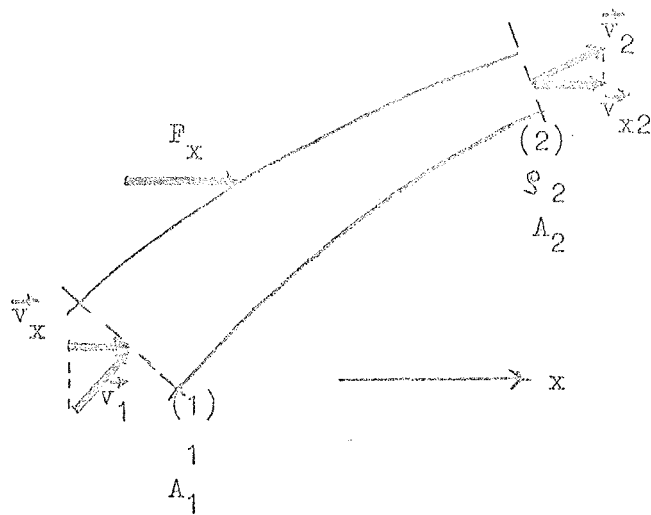


Fig. 4.22. Kontrollvolym med likformig in- och utströmning vinkelrätt mot kontrolllytorna.

Ekvation 4.12.1 är generell. Den är tillämplig på system hos ideala vätskor och gaser men också på system innefattande friktion och energiförbrukning. Den är tillämplig vare sig det förekommer värmeöverföring eller ej och även om sammantryckbarhet föreligger. De kombinerade effekterna av friktion, energiförlust och värmeöverföring uppträder implicit i de yttre krafternas storheter, med motsvarande effekter på de lokala strömningshastigheterna och därmed också på vätske- eller gaspartiklarnas rörelsemängder.

Effekten av densitetsvariationer inom systemet kommer på samma sätt att uppträda implicit i hastighets- och krafttermerna.

Lägg märke till att rörelsemängdsekvationen uttrycks som summan av krafter verkande på vätskan eller gasen (se fig. 4.22).

Wätskans eller gasens egen kraftverkan på gränsväggarna är givetvis lika stora men motsatt riktade.

Ekvation 4.2.13 (sid. 79) för stationär strömning och försumbara masskrafter $F_p + F_{fr} \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} dA$ är särskilt användbar, därför att vid des-

tillämpning behöver vi bara ta hänsyn till de yttre förhållandena.

Tillämpning av ekv. 4.2.12 förekommer framförallt vid beräkningar, som rör framdrivningen av objekt genom en vätska eller en gas (t.ex. fartyg i vatten, raketer i luft, etc.).

Kontrollvolymen för en generell anordning

Allmänna ekvationer

Komponentkrafterna längs x, y och z-axlarna i ekv. 4.12.1 blir

$$\begin{aligned}
 F_{p_x} + F_{s_x} + F_{m_x} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_x \rho \, dV + \int_{KS} v_x \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA} \\
 F_{p_y} + F_{s_y} + F_{m_y} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_y \rho \, dV + \int_{KS} v_y \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA} \\
 F_{p_z} + F_{s_z} + F_{m_z} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_z \rho \, dV + \int_{KS} v_z \rho \, \vec{v} \cdot \vec{dA}
 \end{aligned}
 \tag{4.12.4}$$

där v_x , v_y och v_z är hastighetskomponenterna av v i x, y och z-riktningarna.

Ekvationerna ovan kan tillrättaläggas för direkt tillämpning, vilket illustreras av fig. 4.23, visande strömning genom en generell anordning.

Gränserna för kontrollvolymen tänkes sammanfalla med anordningens inre fasta gränser och är vinkelräta mot strömlinjerna vid punkterna (1) och (2).

I detta fall är nettoflödet av rörelsemängden skillnaden mellan flödet, som strömmar ut vid (2) och det, vilket strömmar in vid (1).

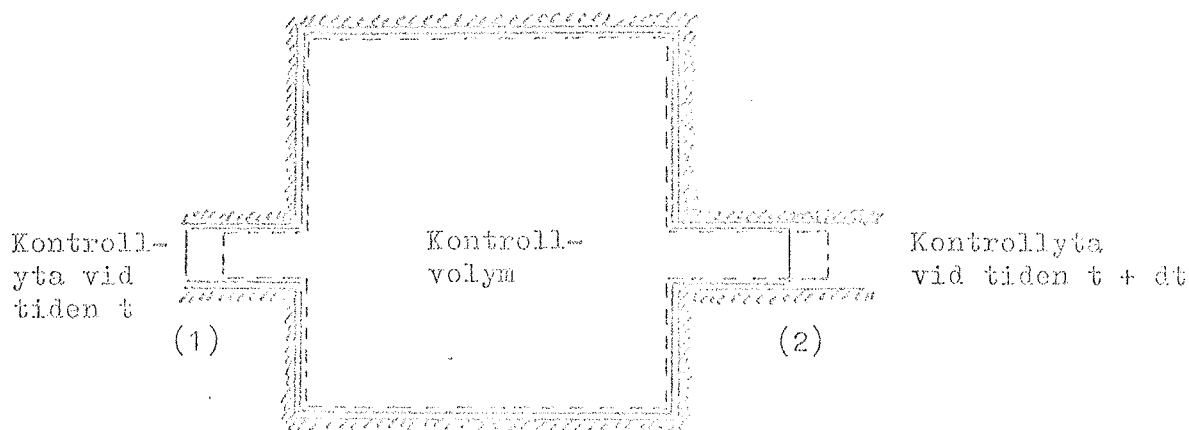


Fig. 4.23. Kontrollvolym för en generell anordning.

Då fås för ekvationerna 4.12.4

$$F_{p_x} + F_{s_x} + F_{m_x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_x \rho \, dV + \int_{(2)} v_x \rho v_x \, dA - \int_{(1)} v_x \rho v_x \, dA$$

$$F_{p_y} + F_{s_y} + F_{m_y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_y \rho \, dV + \int_{(2)} v_y \rho v_y \, dA - \int_{(1)} v_y \rho v_y \, dA \quad 4.12.5$$

$$F_{p_z} + F_{s_z} + F_{m_z} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} v_z \rho \, dV + \int_{(2)} v_z \rho v_z \, dA - \int_{(1)} v_z \rho v_z \, dA$$

Ekvationer för stationär, endimensionell strömning

Även om ekvationerna ovan härletts utan att någon hänsyn tagits till variationerna i egenskaper och strömningsförlopp inom kontrollvolymen är deras användning dock beroende av variationer i hastighet och densitet över tvärsektionerna (1) och (2).

Som tidigare påpekats i samband med diskussionen om energiekvationerna förekommer i praktiken många situationer där dessa variationer är små. I dessa fall är det lämpligt att approximera de verkliga förhållandena genom att anta att hastigheten och densiteten är konstanta vinkelrätt mot strömningsriktningen.

Således antas strömningen vara endimensionell med de enda förekommande variationerna av betydelse uppträdande i ledningens längdriktning.

Med dessa antaganden och om medelhastigheten betecknas med \bar{v} kan vi skriva ekvationerna 4.12.5 för stationär strömning

$$F_{p_x} + F_{s_x} + F_{m_x} = (\bar{v}_x \rho \bar{v}_x A)_2 - (\bar{v}_x \rho \bar{v}_x A)_1$$

$$F_{p_y} + F_{s_y} + F_{m_y} = (\bar{v}_y \rho \bar{v}_y A)_2 - (\bar{v}_y \rho \bar{v}_y A)_1 \quad 4.12.6$$

$$F_{p_z} + F_{s_z} + F_{m_z} = (\bar{v}_z \rho \bar{v}_z A)_2 - (\bar{v}_z \rho \bar{v}_z A)_1$$

Vid tillämpningen av ekv. 4.12.6 används medelvärden av ρ och v vid ifrågavarande strömningssektion. Detta ger en god approximation för

så länge strömningen är parallell i observationsavsnittet.

Hastigheten däremot varierar oftast över tvärsnittet (fig. 4.24) och det verkliga medelvärdet för rörelsemängdsflödet blir

$$\int \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \rho \vec{v} \rho \bar{v} A \quad 4.12.7$$

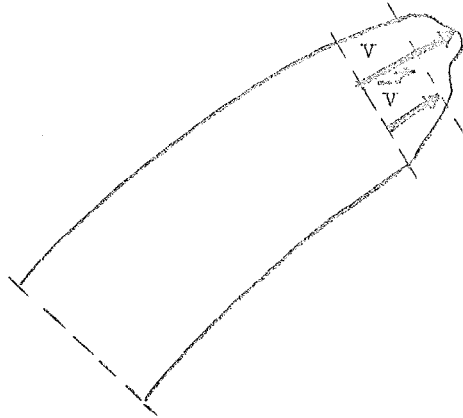


Fig. 4.24. Olikformig strömning genom en kontrolllyta.

Ekv. 4.12.7 kan skrivas med vektorernas absoluta belopp. Då fås

$$\int_A \rho v^2 dA \cos 0^\circ = \rho \int \bar{v}^2 A \quad 4.12.8$$

I ekv. 4.12.7 och 4.12.8 är alltså

\bar{v} = storleken på medelhastigheten över tvärsektionen

\vec{v} = medelhastighetsvektorn

Ekvationerna 4.12.6 kan nu skrivas

$$F_{p_x} + F_{s_x} + F_{m_x} = (\rho \bar{v}_x \int \bar{v}_x A)_2 - (\rho \bar{v}_x \int \bar{v}_x A)_1$$

$$F_{p_y} + F_{s_y} + F_{m_y} = (\rho \bar{v}_y \int \bar{v}_y A)_2 - (\rho \bar{v}_y \int \bar{v}_y A)_1 \quad 4.12.9$$

$$F_{p_z} + F_{s_z} + F_{m_z} = (\rho \bar{v}_z \int \bar{v}_z A)_2 - (\rho \bar{v}_z \int \bar{v}_z A)_1$$

Korrektionsfaktorn β är dimensionslös. Vi antar ξ konstant och löser ut β ur ekv. 4.12.8. Då fås

$$\beta = \frac{1}{\bar{v}^2 \cdot A} \int_A v^2 dA \quad 4.12.10$$

Praktiska värden på β för cirkulära ledningar är

laminär strömning (parabolisk hastighetsfördelning) $\beta = 1,33$

turbulent strömning (släta rör) $\beta = 1,03 \text{ -- } 1,04$

β är lika med 1 i likformig strömning och kan ej ha värden mindre än 1.

Rörelsemängdsflödeskoefficienten β , så väl som rörelseenergiflödeskoefficienten α (sid. 112), är procentuella korrigeringar på två termer, som är subtraherbara.

Det är tydligt, att detta kan bli av betydelse vid små skillnader mellan stora tal även om β är konstant eller endast varierar litet från sektion till sektion.

Eftersom dessa rörelsemängdsekvationer innefattar vektorstorheter är både meningen med och storleken av varje term mycket viktiga att känna till.

I ekv. 4.12.6, t.ex., är ξ en skalär storhet medan \bar{v}_{x2} och \bar{v}_{x1} är vektorkomponenter, som är positiva vid verkan i positiva x-riktningen men negativa vid verkan i negativa x-riktningen.

Med denna teckenkonvention ($\bar{v}_{x2} - \bar{v}_{x1}$) är positiv, kvantiteten F_x en resultant, som verkar i positiva x-riktningen; om ($\bar{v}_{x2} - \bar{v}_{x1}$) är negativ, verkar F_x i negativa x-riktningen.

På samma sätt behöver de olika termerna varav F_x består ej alls ha samma mening, varför man måste vara på sin vakt då det gäller deras individuella tecken.

Ekvationerna 4.2.1, 4.2.9 och 4.12.1 för kontinuitet, energi och linjär rörelsemängd respektive, är tillämpbara på både icke stationära och stationära fall.

Emellertid, är det ej alltid genomförbart, och ofta ej heller nödvändigt, att utveckla och beräkna integralerna, speciellt då volymsintegralerna.

Ej sällan är det möjligt att införa approximationer och erhålla tillförlitliga resultat med förenklade lösningar.

Nedan följer ett exempel på icke stationär strömning, där tidsförändringen i rörelseenergien försummas i relation till förändringen i den potentiella energien. Det är också ett exempel, där mängden vätska, och därför också vätskevolymen, som är omsluten av den konstanta kontrollvolymen, varierar.

Exempel 4.7. En stor cylindrisk behållare monterad på rullar är fylld med vatten till ett djup av 5,0 m över en avtappningsöppning försedd med snabbventil nära behållarens botten (fig. 4.25).

Vid tiden $t = 0$ öppnas snabbventilen. Med behållaren i orubbat läge, bestäm de ögonblickliga värdena på följande kvantiteter vid $t = 50$ sek.

- vattendjupet ovanför avtappningsöppningens centrumlinje h
- utrunna vattenmängden per sek q
- kraften F nödvändig att hålla behållaren i orubbat läge.

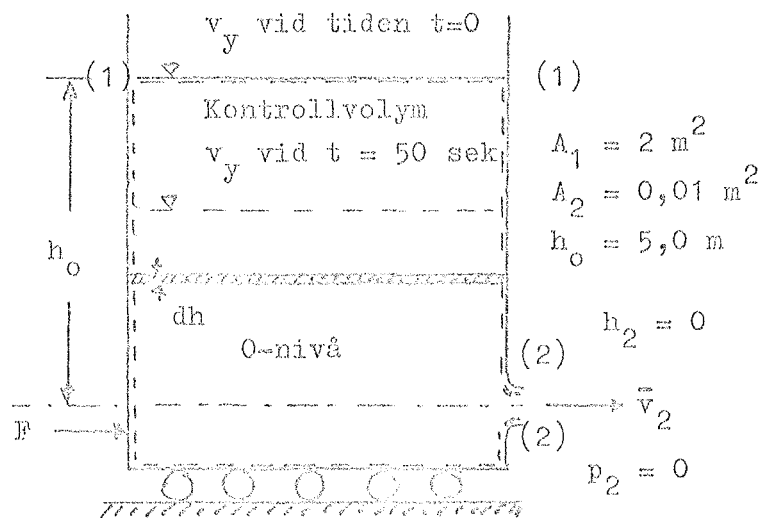


Fig. 4.25. Vattenbehållare som tömmer.

Lösning: Vi betraktar den bestämda kontrollvolymen, vilken sammanfaller med den ursprungliga vattenytan enligt figuren.

Från kontinuitetsekvationen 4.2.1 har vi att

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, dV + \int_{KS} \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

eller i föreliggande fall

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, dV + \int \rho \, \vec{v}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int \rho \, \vec{v}_2 \cdot d\vec{A}_2 = 0$$

Vidare utveckling ger

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, dV + \int \rho \, v_1 \, dA_1 \cos 180^\circ + \int \rho \, v_2 \, dA_2 \cos 0^\circ = 0$$

eller

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, dV = \int \rho \, v_1 \, dA_1 - \int \rho \, v_2 \, dA_2$$

Vi har vidare att enligt figuren är $dV = A_1 \, dh$ och $\int \rho \, v_1 \, dA_1 = 0$, då det inte förekommer någon inströmning genom sektion (1).

Då fås

$$\rho \, A_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h dh = - \int \rho \, v_2 \, A_2$$

eller

$$A_1 \frac{dh}{dt} = - v_2 \, A_2 \quad (1)$$

Energiekvationen 4.2.9 lyder ($z = h$)

$$\frac{dQ_H}{dt} - \frac{dW_{ut}}{dt} = \int_{KS} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u + g h \right) \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \, e \, dV$$

där vi kan skriva $e = u + g h + \frac{v^2}{2}$

Här föreligger ingen "uteffekt" och vi antar att värmeöverföring på grund av temperaturförändringar beroende på friktion kan försummas.

Då fås

$$0 = \int_{KS} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + u + g h \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho e \, dV \quad (2)$$

I den sista termen av den tidsberoende volymintegralen, nämligen

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \frac{v^2}{2} \, dV$$

är endast hastigheterna i behållaren alldeles i närheten av avloppsöppningen av någon betydelse. Volymintegralen kommer att bli nästan konstant med avseende på tiden förutsatt att den fria vattenytans höjd över behållarens botten ej blir alltför liten. Termen kan alltså försummas.

Vi utvecklar ekv. (2) och får ($\rho = \text{konst.}$)

$$0 = \rho \int \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \vec{v}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \rho \int \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \vec{v}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} (u + g h) \, dV$$

Men $\rho \int \vec{v}_1 \cdot d\vec{A}_1 = 0$ (ingen inströmning enligt ovan), $\int v_2 \, dA_2 = \bar{v}_2 \cdot A_2$ och $dV = A_1 \, dh$ varför

$$0 = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{\bar{v}_2^2}{2} + u + g h_2 \right) \rho \bar{v}_2 A_2 + A_1 \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (u + g h) \, dh$$

eller efter förkortning med ρ

$$0 = \frac{p_2 \bar{v}_2 A_2}{\rho} + \frac{\bar{v}_2^2}{2} \bar{v}_2 A_2 + u \bar{v}_2 A_2 + g h_2 \bar{v}_2 A_2 + u A_1 \frac{dh}{dt} + A_1 g h \frac{dh}{dt}$$

Men p_2 och h_2 är lika med noll (se fig.) varför

$$0 = \frac{\bar{v}_2^2}{2} \bar{v}_2 A_2 + u \bar{v}_2 A_2 + u A_1 \frac{dh}{dt} + A_1 g h \frac{dh}{dt}$$

Ekv. (1) anger att termerna innehållande den inre energien tar ut varandra i ekv. ovan, vilket de måste göra om u är oberoende av tid och volym. De återstående termerna i energiekvationen blir alltså

$$0 = \frac{\bar{v}_2^2}{2} \bar{v}_2 A_2 + A_1 g h \frac{dh}{dt}$$

Substitution av $A_1 \frac{dh}{dt}$ med $-\bar{v}_2 A_2$ i sista termen ger

$$0 = \frac{\bar{v}_2^2}{2} \bar{v}_2 A_2 - g h \bar{v}_2 A_2$$

eller efter omflyttning och förkortning

$$\frac{\bar{v}_2^2}{2} = g h \quad \text{eller} \quad \bar{v}_2 = \sqrt{2 g h}$$

Substitution i ekv. (1) ger då

$$A_2 \sqrt{2 g h} = - A_1 \frac{dh}{dt} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{\sqrt{h}} = - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 g} dt$$

Integrering

$$\int_{h_0}^h \frac{1}{\sqrt{h}} dh = - \int_0^t \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 g} dt$$

$$\int_{h_0}^h \frac{1}{\sqrt{h}} dh = - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 g} \int_0^t dt; \quad 2(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 g} t$$

$$2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 g} t; \quad h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{A_2}{A_1} \frac{\sqrt{2 g}}{2} t \right)^2$$

Med $A_1 = 2 \text{ m}^2$, $A_2 = 0,01 \text{ m}^2$ och $h_0 = 5 \text{ m}$ erhålles

$$h = \left(\sqrt{5} - \frac{0,01 \sqrt{19,62}}{4} t \right)^2$$

$$h = (\sqrt{5} - 0,0111 t)^2$$

Då fås för

(a) $t = 50 \text{ sek}$, $h = 2,74 \text{ m}$

(b) $\bar{v}_2 = \sqrt{2 g h} = 7,44 \text{ m/sek}$

(c) Momentekvationen 4.12.1 $\sum \vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_s + \vec{F}_m =$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \vec{v} \rho dV + \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad \text{användes för att finna kraf-}$$

ten F_p . Ekv. 4.12.1 får då formen, eftersom F_s och F_m antagits vara försumbara

$$\vec{F}_p = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \vec{v} \rho \, dV + \int_{KS} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Vi har redan påpekat, att endast hastigheter inom behållaren i närheten av utloppsöppningen kan bli av betydelse. Vi kan alltså försumma rörelsemängdsförändringen per tidsenhet inom behållaren, förutsatt att den senares genomskärningsyta är stor i förhållande till utloppsöppningens; vilket den ju i detta fallet är. Då fås

$$F_{p_x} = \vec{F}_p = \int v_1 \rho v_1 \, dA_1 \cos 180^\circ + \int v_2 \rho v_2 \, dA_2 \cos 0^\circ$$

Men $\int v_1 \rho v_1 \, dA_1 = 0$ enl. föregående (ingen inströmning sker till kontrollvolymen) varför vi kan skriva

$$F_{p_x} = \bar{v}_2 \rho \bar{v}_2 A_2$$

eller för $\bar{v}_2 = 7,44$ m/sek, $\rho = 1000$ kg/m³ och $A_2 = 0,01$ m²

$$F_{p_x} = 7,44 \cdot 1000 \cdot 7,44 \cdot 0,01 = 553,5 \text{ N}$$

Energiförluster beroende på plötsliga sektionökningar i rörledningar

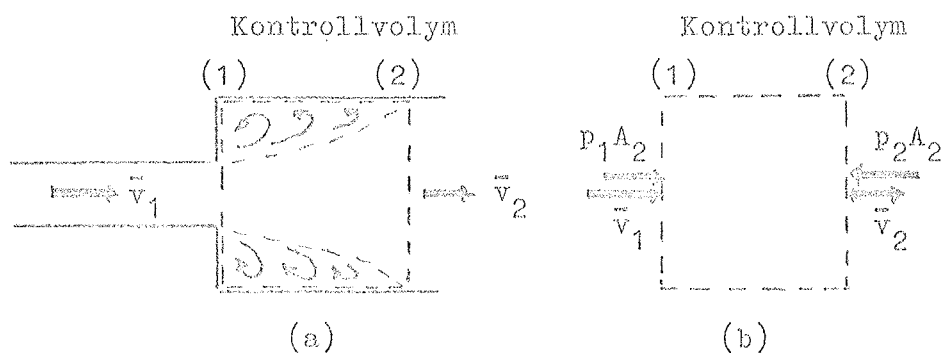


Fig. 4.26. Plötslig sektionökning i en rörledning

Energiförluster beroende på plötsliga sektionökningar i en rörledning kan beräknas både med energiekvationen och med rörelsemängdsekvationen.

För stationär, osammastryckt turbulent strömning genom kontrollvolymen mellan sektionerna (1) och (2) i fig. 4.26 är de små skjivspännings-

krafterna, verkande på väggarna mellan de två sektionerna, försumbara. Vi har ej heller någon tyngdkraftskomponent i horisontell led, varför både F_s och F_m i ekv. 4.12.1 är lika med noll.

Ekv. 4.12. 1 kan då skrivas

$$\sum F_x = F_{p_x} = \int_{KS} v_x \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad 4.12.11$$

eftersom volymsintegralen $\frac{\partial}{\partial t} \int_{KS} v_x \rho \, dV$ är lika med noll vid stationär strömning.

Antar vi sedan, att hastigheten är approximativt enhetlig över tvärsktionerna, vilket ofta är fallet vid turbulent strömning, kan ytintegralen i ekv. 4.2.11 ersättas med produkten av ρ , \vec{v} och A (se fig. 4.26 b). Då fås

$$F_{p_x} = p_1 A_2 - p_2 A_2 = \bar{v}_2 \rho \bar{v}_2 A_2 - \bar{v}_1 \rho \bar{v}_1 A_1$$

eller

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho q (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad 4.12.12$$

eftersom $q = \bar{v}_1 \cdot A_1 = \bar{v}_2 \cdot A_2$.

Energiekvationen 4.11.1 sid. 105 tillämpad på sektionerna (1) och (2) med förlusttermen h_f blir för $\alpha = 1$

$$\frac{\bar{v}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{g} + 0 = \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{g} + 0 + h_f$$

Vi omgrupperar och får

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2}{2g} + h_f \quad 4.12.13$$

Ekv. 4.12.12 kan också uttryckas på samma sätt efter omgruppering och division med g . Vi får

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{q}{A_2 g} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad 4.12.14$$

Ekvation 4.12.12 och 4.12.13 ger då

$$\frac{g}{A_2} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \frac{\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2}{2g} + h_f$$

Eftersom $\frac{q}{A_2} = \bar{v}_2$ och $\bar{v}_1 A_1 = \bar{v}_2 A_2$ fås

$$h_f = \frac{2 \bar{v}_2^2 - 2 \bar{v}_2 \bar{v}_1 - \bar{v}_2^2 + \bar{v}_1^2}{2g} = \frac{\bar{v}_2^2 + \bar{v}_1^2 - 2 \bar{v}_2 \bar{v}_1}{2g} = \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}{2g}$$

Ytterligare substitution ger, då $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 \frac{A_1}{A_2}$

$$\frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\bar{v}_1 - \bar{v}_1 \frac{A_1}{A_2} \right)^2 = \frac{1}{2g} \left[\bar{v}_1^2 + \bar{v}_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 2 \bar{v}_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \right]$$

Vi bryter ut \bar{v}_1^2 och får

$$\frac{\bar{v}_1^2}{2g} \left[1 + \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \right] = \frac{\bar{v}_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

Vi kan sedan skriva

$$h_f = \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}{2g} = \frac{\bar{v}_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad 4.12.15$$

Ekvationen ovan visar, att energiförlusterna vid turbulent strömning är proportionella mot kvadraten på hastigheten.

Vattensprång

Under vissa förhållanden ändras plötsligt en snabbflytande vattenström i en öppen kanal till en långsamt flytande ström med större tvärsektionsarea. En omedelbar höjning av vattennivån kan också konstateras.

Detta fenomen benämnes vattensprång och är ett exempel på stationär olikformig strömning. I själva verket utvidgas den snabbt strömmande vattenströlen (fig. 4.27) och rörelseenergi omvandlas till lägesenergi samt energiförluster. En "töskvals" utvecklas på den lutande ytan av strölen under utvidgning, vilket medför att luft dras in i vattnet.

Vattensprångets yta är mycket ojämn och turbulent, varvid energiförlusterna blir större ju större vattensprångets höjd är. Vid små höjder ändras vattensprånget till en stående våg. Vattensprånget kommer att diskuteras ytterligare i avsnitt 11.3.

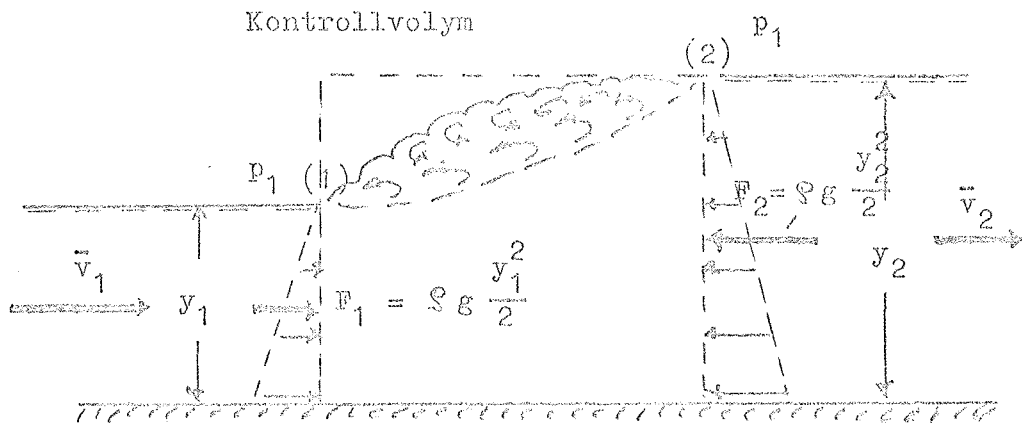


Fig. 4.27. Vattensprång i en rektangulär horisontell kanal.

Relationerna mellan variablerna i en horisontell, rektangulär kanal fås ur kontinuitets-, energi- och rörelsemängdsekvationerna. Räknar vi per breddenhet av kanalen får vi för kontinuitetsekvationen $q = \bar{v}_1 \cdot A_1 = \bar{v}_2 \cdot A_2$ enligt fig. 4.27.

$$\bar{v}_1 \cdot y_1 = \bar{v}_2 \cdot y_2 \quad 4.12.16$$

Rörelsemängdsekvationen 4.12.3 på sid.120 $F_x = \int q(\bar{v}_{x2} - \bar{v}_{x1})$ kan skrivas

$$F_x = \frac{\int \rho g y_1^2}{2} - \frac{\int \rho g y_2^2}{2} = \int q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

eller

$$\frac{\int \rho g y_1^2}{2} - \frac{\int \rho g y_2^2}{2} = \int \bar{v}_1 \cdot y_1 (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad 4.12.17$$

Energiekvationen för punkter på vätskeytan blir

$$\frac{\bar{v}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + y_1 = \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + y_2 + h_{fs}$$

eller, då p_1 (atmosfärstrycket) är lika vid båda sektionerna

$$\frac{\bar{v}_1^2}{2g} + y_1 = \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + y_2 + h_{fs}$$

4.12.18

där h_{fs} representerar energiförlusterna beroende på vattensprånget.

Vi eliminerar \bar{v}_2 i ekv. 4.12.16 och 4.12.17. Då fås

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 \frac{y_1}{y_2} \quad \text{och} \quad y_1^2 - y_2^2 = \frac{2 \bar{v}_1^2 y_1 (y_1 - y_2)}{g y_2}$$

eller

$$y_2 (y_1 + y_2) = \frac{2 \bar{v}_1^2 y_1}{g}$$

som ger

$$y_2 + y_1 y_2 = \frac{2 \bar{v}_1^2 y_1}{g}$$

dvs.

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{2 \bar{v}_1^2 y_1}{g}} \quad 4.12.19$$

där endast plustecknet kan accepteras framför radikalen (y_2 måste vara positivt). Djupen y_1 och y_2 benämnes konjugerade djup.

Genom att lösa ut h_{fs} i ekv. 4.12.18 och eliminera \bar{v}_1 och \bar{v}_2 erhålles

$$h_{fs} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2} \quad 4.12.20$$

Vattensprånget, som är en mycket effektiv anordning, när det gäller att "förstöra" så mycket som möjligt av en strömnings rörelseenergi, används ofta i slutet av rännor och på botten av dammavlopp. Den är också en utomordentlig "blandare" på grund av den kraftiga omröring, som äger rum i "valsens".

Exempel 4.8. $9 \text{ m}^3/\text{sek}$ vatten per m bredd strömmar nedför ett dammavlopp mot en horisontell botten. Hastigheten är $15 \text{ m}/\text{sek}$. Bestäm djupet på det bakvatten, som fordras för att ett vattensprång skall uppstå. Beräkna också energiförlusterna i vattensprånget i kW per m av dammbreddens.

Lösning: Vi har att $y_1 = \frac{9}{15} = 0,6$ m

Vi sätter in i ekv. 4.12.19 och får

$$y_2 = -0,6 + \sqrt{(0,6)^2 + \frac{2 \cdot 15^2 \cdot 0,6}{9,81}} = 4,7$$

Ur ekv. 4.12.20 får vi energiförlusterna till

$$h_{fs} = \frac{(4,7 - 0,6)^3}{4 \cdot 0,6 \cdot 4,7} = \frac{4,1^3}{2,4 \cdot 4,7} = \frac{68,92}{11,28} = 6,1 \text{ m}$$

Vi kan skriva

$$P = \frac{q \cdot S \cdot g \cdot H}{1000} \text{ kW}$$

Alltså; energiförlusten blir

$$\frac{9 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 6,1}{1000} = 539 \text{ kW/m}$$

5. Dimensionsanalys och dynamisk likformighet

5.1 Dimensionell homogenitet och dimensionslösa kvoter

Lösandet av praktiska problem inom hydromekniken fordrar vanligtvis både teoretiska utredningar och resultat från experiment. Genom att sammanföra betydelsefulla faktorer till dimensionslösa grupper är det möjligt att reducera antalet förekommande variabler och göra det komplicerade resultatet tillämpbart på andra liknande situationer.

Om vi skriver rörelseekvationen $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ för en vätske- eller gaspartikel inbegriper $\sum F$ alla typer av krafter, som är aktiva, t.ex. tyngdkraften, tryck, viskösa-elasticiska och ytspänningskrafter. Resultatet blir lika med tröghetskraften $m \vec{a}$.

Som i alla fysiska ekvationer måste varje term ha samma dimension, i detta fallet kraft. Division av varje term i ekvationen med någon av de andra termerna kommer att göra ekvationen dimensionslös. T.ex. division med tröghetskraftstermen resulterar i en summa av dimensionslösa parametrar, som blir lika med ett. Relativa storleken av en godtycklig parameter (jämförd med ett) är då ett mått på dess betydelse.

Ett exempel på användningen av dimensionsanalys och dess fördelar får vi om vi studerar vattensprånget, som ju behandlats tidigare.

Rörelsemängdsekvationen blev i detta fall

$$\frac{\rho g y_1^2}{2} - \frac{\rho g y_2^2}{2} = \rho \bar{v}_1 y_1 (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \quad 5.1.1$$

Eftersom $\bar{v}_1 y_1 = \bar{v}_2 y_2$, enligt kontinuitetsvillkoret, kan ekv. 5.1.1 omskrivas till

$$\frac{\rho g y_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right] = \rho \bar{v}_1^2 y_1 \left(1 - \frac{y_2}{y_1} \right) \frac{y_1}{y_2}$$

Tydligen representerar högra ledet tröghetskrafterna och det vänstra ledet tryckkrafterna, vilka existerar på grund av tyngdkraften. Dessa två krafter är lika stora.

Termen $\rho g y_1^2 / 2$ har alltså dimensionen av en kraft och den multipliceras med en dimensionslös storhet, som är specificerad genom vatten-

språngets geometri.

Om nu ekvationen ovan divideras med den geometriska termen $(1 - y_2/y_1)$ och en faktor representerande tyngdkrafterna i detta fallet $g y_1$, fås

$$\frac{\bar{v}_1^2}{g y_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2}{y_1} \left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right) \quad 5.1.2$$

Vänstra ledet är kvoten mellan tröghets- och tyngdkrafterna, vilket tydligare framgår om både täljare och nämnare multipliceras med $g y_1$ varvid kvoten får formen $g \bar{v}_1^2 y_1 / g y_1^2$.

Kvoten $\bar{v}_1^2 / g y_1$ är ekvivalent med en dimensionslös parameter kallad Froudes tal. Denna kommer att diskuteras ytterligare senare i detta kapitel.

Det är också intressant att konstatera att denna kvot mellan krafter är känd så snart kvoten mellan y_2 och y_1 är given; alltså oavsett storleken på y_2 och y_1 .

Vid härledningen av rörelsemängdsekvationen, som ledde till ekv. 5.1.2 ingick endast tröghets- och tyngdkrafter i förutsättningarna.

Men andra krafter kan ha varit närvarande, t.ex. ytspänning och viskositet. Om t.ex. viskositeten hade inbegripits skulle rörelsemängdsekvationen fått formen

$$\frac{g y_1^2}{2} - \frac{g y_2^2}{2} - F_{\text{visk.}} = g \bar{v}_1 y_1 (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

Formeln motsvarande ekv. 5.1.2 skulle då ha blivit

$$\frac{\bar{v}_1^2}{g y_1} + \frac{F_{\text{visk.}} y_2}{g y_1^2 (y_1 - y_2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2}{y_1} \left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right) \quad 5.1.3$$

Ekvation 5.1.3 är mera korrekt än ekv. 5.1.2. Emellertid visar experiment att den andra termen i vänstra ledet vanligen endast är en liten del av den första termen, varför den förre oftast kan försummas.

I den sista ekvationen kan man anse kvoten y_2/y_1 vara en beroende variabel, som är bestämd för vart och ett av de olika värdena på kraftkvoterna $\bar{v}_1^2/g y_1$ och $F_{visk}/\rho g y_1^2$, vilka är de oberoende variablerna.

Från den föregående diskussionen framgår det, att variabeln $F_{visk}/\rho g y_1^2$ endast spelar en mindre roll.

Det oaktat, om det observerades, att kvoterna mellan krafterna $\bar{v}_1^2/g y_1$ och $F_{visk}/\rho g y_1^2$ hade samma värden i två olika försök, kunde man förvänta sig, på basis av ekv. 5.1.3, att värdena på y_2/y_1 skulle vara desamma i båda fallen. Likaså, om kvoten av $\bar{v}_1^2/g y_1$ var densamma i de två experimenten, men kvoten $F_{visk}/\rho g y_1^2$, som endast har ett mindre inflytande i detta fall, ej bleve lika, kunde man dra den slutsatsen att värdena på kvoterna y_2/y_1 för de båda situationerna skulle bli nästan desamma.

Detta är nyckeln till det följande. Om man i ett modellexperiment kan åstadkomma samma geometriska skalor och kraftskalor, som uppträder i en prototyp, då gäller den dimensionslösa lösningen för modellen också för prototypen.

Ofta är det dock ej möjligt att ha alla kvoter lika i modellen och prototypen. Man försöker då att planera experimenten på sådant sätt, att de dominerande kraftkvoterna är så nära lika varandra som möjligt. De resultat, som fås vid sådana modellförsök är ofta tillräckligt noggranna.

Att uppställa en kraftekvation för en komplex situation kan ibland vara ogenomförbart, och det är då, som en annan process benämnd dimensionsanalys kommer till användning, om man känner de samband som styr problemet.

I en given situation kan flera av krafterna vara av liten betydelse, återstående kanske två eller tre krafter av samma storleksordning. Med tre krafter av samma storleksordning fås två dimensionslösa parametrar; en serie av experimentella data i en geometrisk liknande modell ger sambanden mellan parametrar, som gäller för andra liknande strömningssituationer.

5.2 Dimensioner och enheter

Mekanikens dimensioner är kraft, massa, längd och tid vilkas samband

med varandra uttrycks genom Newtons andra rörelselag

$$\vec{F} = M \vec{a}$$

5.2.1

Tabell 5.1. Några storheters dimensioner i olika system.

Storhet	Beteckning	Dimensioner	
		System F; L; T	System M; L; T
Area	A	L^2	L^2
Volym	V	L^3	L^3
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$	$L \cdot T^{-1}$
Acceleration (a och g)	a, g	$L \cdot T^{-2}$	$L \cdot T^{-2}$
Vinkelhast, rad/sek	ω	T^{-1}	T^{-1}
Kraft	F	F	$M \cdot L \cdot T^{-2}$
Massa (vikt)	M	$F \cdot L^{-1} \cdot T^2$	M
Spec. tyngd	ρ g	$F \cdot L^{-3}$	$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$
Täthet	Σ	$F \cdot L^{-4} \cdot T^2$	$M \cdot L^{-3}$
Tryck	p	$F \cdot L^{-2}$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
Dyn. visk.	μ	$F \cdot L^{-2} \cdot T$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
Kin. visk.	ν	$L^2 \cdot T^{-1}$	$L^2 \cdot T^{-1}$
Elasticitetsmodul	E	$F \cdot L^{-2}$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
Effekt	P	$F \cdot L \cdot T^{-1}$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$
Flöde	q	$L^3 \cdot T^{-1}$	$L^3 \cdot T^{-1}$
Arbete, energi	W	$F \cdot L$	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
Skjuvspänning	τ	$F \cdot L^{-2}$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
Ytspänning	σ	$F \cdot L^{-1}$	$M \cdot T^{-2}$

System F; L; T: Grunddimensioner kraft, längd och tid

" M; L; T: " massa, längd och tid

Två olika system är i bruk, det här i landet använda M-, L- T-systemet och det anglosachsiska F-, L-, T-systemet. Newtons andra lag skrivs i M-, L-, T-systemet

$$F = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

5.2.2

vilket anger, att endast tre av dimensionerna är oberoende. Tabell 5.1 visar några parametrar, som används vid studiet av vätskors eller gasers

strömning, tillsammans med deras symboler och dimensioner i båda systemen.

5.3 Dimensionsanalys

Från mekaniken vet vi, att om vi för en fritt fallande kropp känner fallsträckan s och falltiden t kan vi skriva

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad 5.3.1$$

Med hjälp av dimensionsanalys kan vi härleda sambandet.

Vi antar att den sträcka en kropp fritt faller på tiden t beror på kroppens massa (vikt) m , tyngdacc. g och tiden t .

Vi kan då skriva

$$s = f(m, g, t)$$

eller

$$s = k \cdot m^x \cdot g^y \cdot t^z \quad 5.3.2$$

där k är en dimensionslös koefficient experimentellt bestämd.

Ekvation 5.3.2 måste vara dimensionellt homogen. Exponenterna för respektive storheter måste vara desamma på båda sidor i ekv. 5.3.2.

Vi använder grunddimensionerna massa (M), längd (L) och tid (T) och uppställer en tabell över variabler och dimensionsformler.

Variabler och dimensionsformler

<u>Variabel</u>	Beteckning	<u>Dimensionsformel</u>
Fallsträcka	s	L
Massa	m	M
Tyngdacc.	g	$L \cdot T^{-2}$
Tid	t	T

Vi kan då skriva ekv. 5.3.2

$$M^0 \cdot L^1 \cdot T^0 = (M^x) (L^y \cdot T^{-2y}) (T^z) \quad 5.3.3$$

Vi löser exponenterna

$$M: x = 0 \quad x = 0$$

$$L: y = 1 \quad y = 1$$

$$T: -2y + z = 0 \quad z = 2$$

Vi kan då skriva ekv. 5.3.2

$$s = k \cdot m^0 \cdot g \cdot t^2$$

eller

$$\underline{s = k \cdot g \cdot t^2}$$

Anm.: Vi ser att fallsträckan är oberoende av kroppens massa m .

$$\text{För } k = \frac{1}{2} \text{ fås } \underline{s = \frac{1}{2} g t^2}$$

Buckingham's π -teorem

Föregående exempel visar att man genom en dimensionsanalys kan få värdefulla upplysningar om formen på ett sökt fysikaliskt samband. När antalet variabler är stort uppstår emellertid svårigheter att få tillräckligt många ekvationer för bestämmandet av de sökta exponenterna.

Här kommer Buckingham's π -teorem till användning

Vi antar att ett skeende är beroende av n variabler, $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ och att det funktionella sambandet kan skrivas

$$f(q_1, q_2, q_3 \dots q_n) = 0 \quad 5.3.4$$

Vi antar också att dessa n variablers dimensionsformler innehåller m grundenheter (t.ex. enheten för massa, längd, tid etc.).

Under dessa förutsättningar säger Buckingham's π -teorem, att det funktionella sambandet också kan skrivas

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots \pi_{n-m}) = 0 \quad 5.3.5$$

där varje π betyder en oberoende dimensionslös grupp bildad av $m+1$ variabler.

Inom hydromekniken blir $m = 3$ då våra grundenheter är massa, längd och tid.

Vi väljer 3 q -termer som sedan i tur och ordning kombineras med de återstående $n-3$ q -termerna. Då fås $n-3$ grupper med 4 q -termer i varje grupp.

De för varje grupp gemensamma 3 termerna antas ha obekanta exponenter,

medan den 4:e, för gruppen speciella termen, ges exponenten 1.

För varje grupp bestäms sedan de obekanta exponenterna ur kravet på dimensionslöshet.

För den i :te gruppen skall alltså gälla

$$\overline{\pi}_i = q_a^{x_i} \cdot q_b^{y_i} \cdot q_c^{z_i} \cdot q_i^1$$

där $\overline{\pi}_i$ är ett dimensionslöst tal, q_a , q_b , q_c , de 3 för alla grupperna gemensamma q -termerna, x_i , y_i och z_i de sökta exponenterna och q_i den speciella q -termen med exponenten 1.

Vi får då $n-3$ $\overline{\pi}$ -termer. Symboliskt kan ekv. 5.3.5 då skrivas

$$\overline{\pi}_i = \overline{\Phi}(\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \overline{\pi}_3, \dots, \overline{\pi}_{n-4}) \quad 5.3.6$$

Proceduren vid användningen av Buckingham's $\overline{\pi}$ -teorem

1. Teckna det funktionella sambandet

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad 5.3.7$$

2. Uppställ variablerna q med beteckningar och dimensionsformler i en tabell.

3. Bestäm antalet dimensionslösa grupper ($\overline{\pi}$ -termer). Med grunddimensionerna massa M , längd L och tid T blir antalet $\overline{\pi}$ -termer $n-3$. Skriv sambandet

$$\overline{\Phi}(\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \overline{\pi}_3, \dots, \overline{\pi}_{n-3}) = 0 \quad 5.3.8$$

4. Välj 3 av den n storheterna, ingen dimensionslös och inga med samma dimensioner.

Alla grunddimensionerna måste finnas representerade i de samlade storheterna.

Låt dessa 3 storheter bilda genomgående primärgrupper som i $\overline{\pi}$ -term efter $\overline{\pi}$ -term i tur och ordning kombineras med resterande storheter.

Eftersom fysikaliska storheter av olika dimension ej kan adderas eller subtraheras uttrycks $\overline{\Pi}$ -termerna som produkter av de 3 valda storheterna var och en med okänd exponent samt en av de resterande storheterna med känd exponent.

$$\text{Ex. } \overline{\Pi}_1 = (q_1^{x_1})(q_2^{y_1})(q_3^{z_1}) q_4$$

$$\overline{\Pi}_2 = (q_1^{x_2})(q_2^{y_2})(q_3^{z_2}) q_5$$

5. Uppställ relationen för dimensionell homogenitet
6. Lös ut exponenterna ur respektive ekvationssystem
7. Teckna de erhållna $\overline{\Pi}$ -termerna
8. Skriv upp det erhållna sambandet (ekv. 5.3.5)

Värdefulla samband

- a. Är en storhet dimensionslös, är den en $\overline{\Pi}$ -term utan att proceduren måste genomgås.
- b. Om två av de fysikaliska storheterna har samma dimension blir förhållandet mellan dem en av $\overline{\Pi}$ -termerna. Till exempel L/L är dimensionslöst och en $\overline{\Pi}$ -term.
- c. Vilken som helst $\overline{\Pi}$ -term kan ersättas med vilken som helst exponent av termen, även med $\overline{\Pi}^{-1}$. Till exempel $\overline{\Pi}_3$ kan ersättas med $\overline{\Pi}_3^2$ eller $\overline{\Pi}_2$ med $1/\overline{\Pi}_2$.
- d. Vilken som helst $\overline{\Pi}$ -term kan multipliceras med en numerisk konstant. Till exempel $\overline{\Pi}_1$ kan ersättas med $3 \overline{\Pi}_1$.
- e. Vilken som helst $\overline{\Pi}$ -term kan uttryckas som en funktion av de andra $\overline{\Pi}$ -termerna. Till exempel om vi har två $\overline{\Pi}$ -termer kan vi skriva $\overline{\Pi}_1 = \overline{\Phi}(\overline{\Pi}_2)$.

Exempel 5.1

För att karakterisera ett hydrauliskt förlopp hos en vätska med tätheten ρ behövs det en längd l för att beskriva de geometriska egenskaperna, dels t.ex. hastigheten v för att beskriva en rörelse. Man kan dessutom tänka sig att dynamiska viskositeten μ , specifika tyngden ρg , ytspänningen σ och elasticiteten E också påverkar skeendet. Uppställ sambandet

Lösning:

Vi använder Buckingham's Π -teorem och det funktionella sambandet kan då skrivas

$$1. \quad f(\rho, l, v, \mu, \rho g, \sigma, E) = 0 \quad (1)$$

2. Variabler och dimensionsformler

<u>Variabel</u>	<u>Beteckning</u>	<u>Dimensionsformel</u>
Täthet	ρ	$M \cdot L^{-3}$
Längd	l	L
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$
Dyn. visk.	μ	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
Spec. tyngd	ρg	$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$
Ytspänning	σ	$M \cdot T^{-2}$
Elasticitet	E	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$

3. Antalet dimensionslösa grupper (Π -termer) blir $7-3 = 4$ och vi kan skriva

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0 \quad (2)$$

4. Vi väljer ρ, l och v som genomgående primärgrupper och kombinerar i tur och ordning med $\mu, \rho g, \sigma$ och E .

Eftersom fysikaliska storheter av olika dimension ej kan adderas eller subtraheras uttrycks Π -termerna som produkter.

$$\Pi_1 = (\rho^{x_1})(l^{y_1})(v^{z_1})\mu$$

$$\Pi_2 = (\rho^{x_2})(l^{y_2})(v^{z_2})\rho g$$

$$\Pi_3 = (\rho^{x_3})(l^{y_3})(v^{z_3})\sigma$$

$$\Pi_4 = (\rho^{x_4})(l^{y_4})(v^{z_4})E$$

5. Dimensionell homogenitet ger

$$\Pi_1 = M^0 L^0 T^0 = (M^{x_1} \cdot L^{-3x_1})(L^{y_1})(L^{z_1} \cdot T^{-z_1})(M^1 \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})$$

$$\Pi_2 = M^0 L^0 T^0 = (M^{x_2} \cdot L^{-3x_2})(L^{y_2})(L^{z_2} \cdot T^{-z_2})(M^1 \cdot L^{-2} \cdot T^{-2})$$

$$\Pi_3 = M^0 L^0 T^0 = (M^{x_3} \cdot L^{-3x_3})(L^{y_3})(L^{z_3} \cdot T^{-z_3})(M^1 \cdot T^{-2})$$

$$\Pi_4 = M^0 L^0 T^0 = (M^{x_4} \cdot L^{-3x_4})(L^{y_4})(L^{z_4} \cdot T^{-z_4})(M^1 \cdot L^{-1} \cdot T^{-2})$$

Vi löser exponenterna

$\overline{\Pi}_1$

M: $x_1 + 1 = 0$ $x_1 = -1$

L: $-3x_1 + y_1 + z_1 - 1 = 0$ $y_1 = -1$

T: $-z_1 - 1 = 0$ $z_1 = -1$

$\overline{\Pi}_2$

M: $x_2 + 1 = 0$ $x_2 = -1$

L: $-3x_2 + y_2 + z_2 - 2 = 0$ $y_2 = 1$

T: $-z_2 - 2 = 0$ $z_2 = -2$

$\overline{\Pi}_3$

M: $x_3 + 1 = 0$ $x_3 = -1$

L: $-3x_3 + y_3 + z_3 = 0$ $y_3 = -1$

T: $-z_3 - 2 = 0$ $z_3 = -2$

$\overline{\Pi}_4$

M: $x_4 + 1 = 0$ $x_4 = -1$

L: $-3x_4 + y_4 + z_4 - 1 = 0$ $y_4 = 0$

T: $-z_4 - 2 = 0$ $z_4 = -2$

7. $\overline{\Pi}$ -termerna är

$$\overline{\Pi}_1 = \mathcal{S}^{-1} \cdot 1^{-1} \cdot v^{-1} \cdot \mu = \frac{\mu}{\mathcal{S} \cdot 1 \cdot v}$$

$$\overline{\Pi}_2 = \mathcal{S}^{-1} \cdot 1^1 \cdot v^{-2} \cdot \mathcal{S} g = \frac{\mathcal{S} \cdot g \cdot 1}{\mathcal{S} \cdot v^2} = \frac{g \cdot 1}{v^2}$$

$$\overline{\Pi}_3 = \mathcal{S}^{-1} \cdot 1^{-1} \cdot v^{-2} \cdot \mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{S} \cdot 1 \cdot v^2}$$

$$\overline{\Pi}_4 = \mathcal{S}^{-1} \cdot 1^0 \cdot v^{-2} \cdot E = \frac{E}{\mathcal{S} \cdot v^2}$$

8. Sambandet kan nu skrivas enl. ekv. (2)

$$\mathcal{D} \left(\frac{\mu}{\mathcal{S} \cdot 1 \cdot v}, \frac{g \cdot 1}{v^2}, \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{S} \cdot 1 \cdot v^2}, \frac{E}{\mathcal{S} \cdot v^2} \right) = 0$$

Antar vi att förutom ρ , l och v enbart μ dvs. friktionen påverkar förloppet karakteriseras skeendet av det dimensionslösa uttrycket

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho \cdot l \cdot v} \quad \text{Eftersom kinematiska viskositeten } \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

kan uttrycket skrivas $\frac{\nu}{l \cdot v}$ som är inverterade värdet av Reynolds tal

$$Re = \frac{l \cdot v}{\nu}$$

Antar vi att förutom ρ , l och v endast g dvs. tyngdkraften är verksam karakteriseras förloppet av det dimensionslösa uttrycket

$$\pi_2 = \frac{g \cdot l}{v^2}. \quad \text{Uttrycket är inverterade värdet av } \text{Froudes tal}$$

$$F = \frac{v^2}{g \cdot l}$$

Antas att förutom ρ , l och v ytspänningen är dominerande karakteriseras skeendet av det dimensionslösa uttrycket $\pi_3 = \frac{\sigma}{\rho \cdot l \cdot v^2}$. Uttrycket är inverterade värdet av Webers tal

$$W = \frac{\rho \cdot l \cdot v^2}{\sigma} = \frac{l \cdot v^2}{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Antas till slut att förutom ρ , l och v endast elasticiteten är verksam karakteriseras förloppet av det dimensionslösa uttrycket $\pi_4 = \frac{E}{\rho \cdot v^2}$. Uttrycket är inverterade värdet av Machs tal

$$M = \frac{\rho \cdot v^2}{E} = \frac{v^2}{\frac{E}{\rho}}$$

De fyra talen i problem (8), Re , F , W och M används för att karakterisera hydromekaniska förlopp vilka huvudsakligen bestäms av tröghetskrafter (ρ) och i tur och ordning av friktionskrafter (μ), tyngdkrafter (g), ytspänningen (σ) och elastiska krafter (E).

Skriver man i stället

$$F = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}}; \quad W = \frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot l}}} \quad \text{och} \quad M = \frac{v}{\sqrt{\frac{E}{\rho \cdot l}}}$$

representerar uttrycken förhållandena mellan en aktuell hastighet och i tur och ordning hastigheten hos en gravitationsväg, en kapillärväg

och en elastisk våg.

Re, F, W och M kallas för Reynolds, Froudes, Webers och Machs tal.

Exempel 5.2. Med hjälp av Buckingham's Π -teorem kan vi utveckla ett uttryck för tryckförlusten i en horisontell ledning vid en inkompressibel vätskas stationära, turbulenta strömning.

Lösning: För vilken som helst vätska representeras tryckförlusten av ett fall i tryckgradienten och är ett mått på strömningsmotståndet i röret.

Motståndet, här representerat av tryckfallet Δp är en funktion av rörets diameter d , vätskans dyn. viskositet μ , dess täthet ρ , längden av röret l , vätskans hastighet v och skrovligheten i röret k .

Skrovligheten k uttryckes vanligen som ett förhållande mellan storleken på ytojämnheter, t.ex. partikeldiametern och rörets diameter. Förhållandet L/L ger ett dimensionslöst tal.

Det funktionella sambandet kan då skrivas

$$1. f(\Delta p, d, \mu, \rho, l, v, k) = 0 \quad (1)$$

2. Variabler och dimensionsformler

<u>Variabel</u>	<u>Beteckning</u>	<u>Dimensionsformel</u>
Tryckfall	Δp	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$
Rördiameter	d	L
Dyn. viskositet	μ	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
Täthet	ρ	$M \cdot L^{-3}$
Rörets längd	l	L
Hastighet	v	$L \cdot T^{-1}$
Skrovlighet	k	L/L

3. Antalet dimensionslösa grupper (Π -termer) blir $7 - 3 = 4$. Vi kan skriva

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0 \quad (2)$$

4. Vi väljer d , v och ρ som genomgående primärgrupp och kombinerar i tur och ordning med Δp , μ , l och k .

Eftersom fysikaliska storheter av olika dimension ej kan adderas eller

subtraheras uttrycks $\overline{\Pi}$ -termerna som produkter.

$$\overline{\Pi}_1 = (d^{x_1})(v^{y_1})(s^{z_1}) \Delta p$$

$$\overline{\Pi}_2 = (d^{x_2})(v^{y_2})(s^{z_2}) \mu$$

$$\overline{\Pi}_3 = (d^{x_3})(v^{y_3})(s^{z_3}) l$$

$$\overline{\Pi}_4 = (d^{x_4})(v^{y_4})(s^{z_4}) k$$

5. Dimensionell homogenitet ger

$$\overline{\Pi}_1 = M^0 L^0 T^0 = (L^{x_1})(L^{y_1} T^{-y_1})(M^{z_1} L^{-3z_1})(M^1 L^{-1} T^{-2})$$

$$\overline{\Pi}_2 = M^0 L^0 T^0 = (L^{x_2})(L^{y_2} T^{-y_2})(M^{z_2} L^{-3z_2})(M^1 L^{-1} T^{-1})$$

$$\overline{\Pi}_3 = M^0 L^0 T^0 = (L^{x_3})(L^{y_3} T^{-y_3})(M^{z_3} L^{-3z_3})(L^1)$$

$$\overline{\Pi}_4 = M^0 L^0 T^0 = (L^{x_4})(L^{y_4} T^{-y_4})(M^{z_4} L^{-3z_4})(L^0)$$

6. Vi löser exponenterna

$\overline{\Pi}_1$

$$M: \quad z_1 + 1 = 0 \quad x_1 = 0$$

$$L: \quad x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0 \quad y_1 = -2$$

$$T: \quad -y_1 - 2 = 0 \quad z_1 = -1$$

$\overline{\Pi}_2$

$$M: \quad z_2 + 1 = 0 \quad x_2 = -1$$

$$L: \quad x_2 + y_2 - 3z_2 - 1 = 0 \quad y_2 = -1$$

$$T: \quad -y_2 - 1 = 0 \quad z_2 = -1$$

$\overline{\Pi}_3$

$$M: \quad z_3 = 0 \quad x_3 = -1$$

$$L: \quad x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0 \quad y_3 = 0$$

$$T: \quad -y_3 = 0 \quad z_3 = 0$$

$\overline{\Pi}_4$

$$M: \quad z_4 = 0 \quad x_4 = 0$$

$$L: \quad x_4 + y_4 - 3z_4 = 0 \quad y_4 = 0$$

$$T: \quad -y_4 = 0 \quad z_4 = 0$$

7. $\overline{\Pi}$ -termerna blir

$$\overline{\Pi}_1 = d^0 \cdot v^{-2} \cdot \mathcal{G}^{-1} \cdot \Delta p = \frac{\Delta p}{v^2 \cdot \mathcal{G}}$$

$$\overline{\Pi}_2 = d^{-1} \cdot v^{-1} \cdot \mathcal{G}^{-1} \cdot u = \frac{u}{d \cdot v \cdot \mathcal{G}} = \text{Re}$$

$$\overline{\Pi}_3 = d^{-1} \cdot v^0 \cdot \mathcal{G}^0 \cdot 1 = \frac{1}{d}$$

$$\overline{\Pi}_4 = d^0 \cdot v^0 \cdot \mathcal{G}^0 \cdot k = k$$

8. Sambandet kan nu skrivas enl. ekv. (2)

$$\overline{\Phi} \left(\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \mathcal{G}}, \frac{u}{d \cdot v \cdot \mathcal{G}}, \frac{1}{d}, k \right) = 0 \quad (3)$$

Vi löser ut Δp och får

$$\Delta p = v^2 \cdot \mathcal{G} \cdot \overline{\Phi}_1 \left(\text{Re} \cdot \frac{1}{d} \cdot k \right) \quad (4)$$

Experiment och analys antyder att tryckfallet är en funktion av $\frac{1}{d}$ i första potens. Samma är förhållandet med k varför

$$\Delta p = v^2 \cdot \mathcal{G} \cdot \frac{1}{d} \cdot k \cdot \overline{\Phi}_2 (\text{Re}) \quad (5)$$

Den första parametern i ekv. (3), vanligen skriven $\Delta p / (\mathcal{G} v^2 / 2)$, benämnes tryckkoefficienten, en femte dimensionslös parameter tillsammans med Reynolds-, Froudes-, Machs- och Webers tal.

Tryckkoefficienten anger förhållandet mellan statiskt tryck och dynamiskt tryck. Multiplicerad med arean visar den förhållandet mellan tryckkrafter och tröghetskrafter, eftersom $(\mathcal{G} v^2 / 2) A$ är den kraft, som behövs för att reducera hastigheten till noll.

5.4 Likformighet - modellstudier

I många fall kan man inte få tillfredsställande lösningar av hydrauliska problem med stöd av erfarenheten tillsammans med teoretiska beräkningar.

Detta gäller särskilt vid projektering av dammbyggnader, kraftverk m.m.

De individuella olikheterna omöjliggör schematiska standardlösningar och de komplicerade randvillkoren utesluter en matematisk behandling. Här måste man tillgripa metoden med modellförsök, varvid det för erhållandet av användbara data fordras att det föreligger dynamisk likformighet mellan modell och prototyp.

Newtons likformighetssats

För att få dynamiskt likformiga strömningsbilder fordras för det första geometriskt likformiga yttre förhållanden.

Förhållandet mellan korresponderande längder i original och modell l resp. l_m skall vara konstant

$$\frac{l}{l_m} = \lambda \quad 5.4.1$$

Vidare fordras, att vattenpartiklarna skall tillryggalägga olika korresponderande längder på tider, som står i ett konstant förhållande till varandra

$$\frac{t}{t_m} = \tau \quad 5.4.2$$

Om dl och dl_m är sträckelement och dt resp. dt_m är motsvarande tids-element, kan vi skriva ekv. 5.4.1 och 5.4.2

$$\frac{dl}{dl_m} = \lambda \quad 5.4.3$$

$$\frac{dt}{dt_m} = \tau \quad 5.4.4$$

Vi dividerar ekv. 5.4.3 med ekv. 5.4.4 och får

$$\frac{dl}{dl_m} \cdot \frac{dt_m}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} \quad \text{eller} \quad \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dt_m}{dl_m} = \frac{\lambda}{\tau}$$

Men $\frac{dl}{dt} = v$ och $\frac{dt_m}{dl_m} = \frac{1}{v_m}$. Insättning ger

$$\frac{v}{v_m} = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \quad 5.4.5$$

Accelerationen a resp. a_m för korresponderande vattenpartiklar fås genom derivering av ekv.

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \cdot \frac{dl_m}{dt_m} \quad \text{dvs.}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dl_m}{dt_m} \right)$$

Ur ekv. 5.4.4 har vi att

$$dt = \tilde{\gamma} dt_m \quad \text{och vi får}$$

$$a = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}^2} \frac{d}{dt_m} \left(\frac{dl_m}{dt_m} \right) = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}^2} \cdot \frac{d^2 l_m}{dt_m^2} \quad \text{eller}$$

$$a = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}^2} \cdot a_m ; \quad \frac{a}{a_m} = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}^2} \quad 5.4.6$$

Förhållandet mellan korresponderande massor m resp. m_m måste vara konstant

$$\frac{m}{m_m} = \mu \quad 5.4.7$$

För att dynamisk likformighet skall råda fordras att Newtons andra lag skall gälla.

Kombineras ekv. 5.4.6 och 5.4.7 fås de korresponderande krafterna F resp. F_m till

$$\frac{F}{F_m} = \frac{m \cdot a}{m_m \cdot a_m} = \mu \cdot \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}^2} \quad 5.4.8$$

Denna ekv. uttrycker Newton's likformighetssats: Två rörelseförlopp - original och modell - är dynamiskt likformiga, då krafter som verkar på korresponderande massor under korresponderande tider, är proportionella mot faktorn $\mu \cdot \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}^2}$.

De korresponderande massorna kan skrivas

$$m = \rho \cdot l^3 \quad \text{och} \quad m_m = \rho_m \cdot l_m^3$$

Följaktligen blir (se ekv. 5.4.7 och 5.4.1)

$$\mu = \frac{m}{m_m} = \frac{\rho}{\rho_m} \cdot \frac{l^3}{l_m^3} = \frac{\rho}{\rho_m} \cdot \lambda^3$$

Insättes detta värde i ekv. 5.4.8 fås

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\rho}{\rho_m} \cdot \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad 5.4.9$$

Har man samma vätska i original och modell är $\rho = \rho_m$ om g är lika.

5.5 Reynolds tal och modellregel

Då strömning sker i slutna ledningar är de huvudsakligen verkande krafterna tröghetskrafter och friktionskrafter.

För dynamisk likformighet fordras att förhållandet mellan dessa krafter skall vara konstant i korresponderande punkter i original och modell.

Detta uttryckes i ekv.

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\rho}{\rho_m} \cdot \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad 5.5.1$$

om vi låter F och F_m representera friktionskrafterna.

Friktionskraftens storlek kan vi enligt det föregående teckna

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dl} \quad 5.5.2$$

Vi kan skriva

$$\text{för original: } F = C_2 \cdot \mu \cdot l^2 \cdot \frac{dv}{dl} \quad 5.5.3$$

$$\text{för modell: } F_m = C_2 \cdot \mu_m \cdot l_m^2 \cdot \frac{dv_m}{dl_m} \quad 5.5.4$$

Efter insättning i ekv. 5.5.1 fås

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\mu \cdot l^2 \cdot \frac{dv}{dl}}{\mu_m \cdot l_m^2 \cdot \frac{dv_m}{dl_m}} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_m} \cdot \frac{\lambda^4}{\mathcal{L}^2}$$

5.5.5

I ekv. 5.5.5 är $\lambda = \frac{l}{l_m}$ och $\frac{\lambda}{\mathcal{L}} = \frac{v}{v_m}$

Vi har också att

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{och} \quad a_m = \frac{dv_m}{dt_m} \quad \text{som ger}$$

$$\frac{a}{a_m} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt_m}{dv_m} \quad \text{eller} \quad \frac{dv}{dv_m} = \frac{a}{a_m} \cdot \frac{dt}{dt_m}$$

Enl. det föregående är $\frac{a}{a_m} = \frac{\lambda}{\mathcal{L}^2}$ och $dt = \mathcal{L} dt_m$ varför

$$\frac{dv}{dv_m} = \frac{\lambda}{\mathcal{L}^2} \cdot \frac{\mathcal{L} \cdot dt_m}{dt_m} = \frac{\lambda}{\mathcal{L}}$$

Men $\frac{\lambda}{\mathcal{L}}$ är lika med $\frac{v}{v_m}$ och vi får $\frac{dv}{dv_m} = \frac{v}{v_m}$; Vi har också enligt det föregående $\frac{dl}{dl_m} = \lambda = \frac{l}{l_m}$ varför ekv. 5.5.5 ger efter insättning

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\mu}{\mu_m} \cdot \frac{l^2}{l_m^2} \cdot \frac{dv \cdot dl_m}{dv_m \cdot dl} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_m} \cdot \frac{l^2}{l_m^2} \cdot \frac{v^2}{v_m^2} \quad \text{eller}$$

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\mu}{\mu_m} \cdot \frac{v}{v_m} \cdot \frac{l_m}{l} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_m} \cdot \frac{v^2}{v_m^2}$$

Insättes $\mu = \mathcal{S} \cdot \mathcal{V}$ fås

$$\frac{\mathcal{S} \cdot \mathcal{V} \cdot l_m}{\mathcal{S}_m \cdot \mathcal{V}_m \cdot l} = \frac{\mathcal{S} \cdot v}{\mathcal{S}_m \cdot v_m} \quad \text{som kan skrivas}$$

$$v \cdot l \cdot \mathcal{V}_m = v_m \cdot l_m \cdot \mathcal{V} \quad \text{eller}$$

$$\frac{v \cdot l}{\mathcal{V}} = \frac{v_m \cdot l_m}{\mathcal{V}_m}$$

5.5.6

$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$ kallas Reynolds tal. Detta skall vara lika i original och modell för att dynamisk likformighet skall råda då endast tröghets- och friktionskrafter verkar. Talet är dimensionslöst.

Enligt det föregående har vi att

$$\frac{l}{l_m} = \lambda \quad \text{och} \quad \frac{v}{v_m} = \frac{\lambda}{\tau}$$

Efter insättning av dessa ekv. och $\nu = \nu_m$ i ekv.

$$\frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{v_m \cdot l_m}{\nu_m}$$

fås

$$\frac{v}{v_m} = \frac{l_m}{l} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{\tau}$$

eller

$$\tau = \lambda^2$$

5.5.7

Vid geometriskt likformiga rörelseförlopp med längdskalan $l:l_m = \lambda$ och där friktionskrafter och tröghetskrafter är huvudsakligen verksamma gäller alltså följande skalor i original och modell.

<u>Beteckning</u>	<u>Dimension</u>	<u>Skala</u>
Längd	L	λ
Tid	T	λ^2
Hastighet	$L \cdot T^{-1}$	$1/\lambda$
Vattenföring	$L^3 \cdot T^{-1}$	λ

Reynolds fann på experimentell väg, att i rör sker övergången från turbulent till laminär strömning (nedre kritiska hastigheten) vid

$$Re_{\text{krit}} = \frac{v_{\text{krit}} \cdot d}{\nu} \approx 2300 \quad 5.5.8$$

där d = rördiametern.

För annat tvärsnitt och öppna kanaler gäller (se fig. 5.1)

$$Re_{\text{krit}} = \frac{v_{\text{krit}} \cdot 4 R_h}{\nu} \quad 5.5.9$$

där R_h = hydrauliska medeldjupet och

$$R_h = \frac{A}{p} \quad \text{där } A = \text{tvärsnittsytan}$$

$$p = \text{våta omkretsen}$$

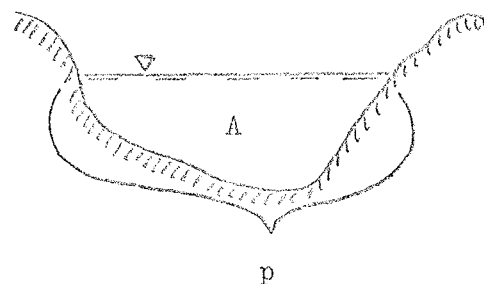


Fig. 5.1. Tvärsnitt av öppen kanal.

Uttrycket för R_h i ekv. 5.5.9 blir vid fullgång i ett rör med diametern d

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi \cdot d} = \frac{d}{4}$$

eller

$$d = 4 R_h$$

Övergången från laminär till turbulent strömning (övre kritiska hastigheten) är mera obestämd. Normalt sker denna övergång vid Re mellan 2300 och 3000 men vid försiktighet kan högre värden uppnås.

Vidtas ytterst noggranna försiktighetsåtgärder för att undvika störningar kan man uppnå värden på Re , som närmar sig 50 000 (Ekman 1910).

Nedre- och övre kritiska hastigheterna kommer ytterligare att diskuteras under rubriken Reynolds kritiska tal, avsnitt 6.4.

5.6 Froudes tal och modellregel

Har man fri vattenyta i original och modell verkar endast tröghetskrafter och tyngdkrafter under förutsättning, att rörelsen är sådan att friktionskrafter och ytspänningar kan försummas.

Vid dynamisk likformighet i strömningsförloppet fordras, att förhållandet mellan i korresponderande punkter i original och modell verkande tröghetskraft och tyngdkraft skall vara konstant.

Vi låter F och F_m representera tyngdkrafterna. Villkoret för dynamisk likformighet uppfylls vid insättning i ekv.

$$\frac{F}{F_m} = \frac{\xi}{\xi_m} \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad (\text{Newtons likform. sats}) \quad 5.6.1$$

Tyngdkrafternas storlek kan skrivas

$$\text{För original: } F = m \cdot a = C_3 \cdot \xi \cdot g \cdot l^3 \quad 5.6.2$$

$$\text{För modell: } F_m = m \cdot a = C_3 \cdot \xi_m \cdot g_m \cdot l_m^3 \quad 5.6.3$$

Efter insättning i ekv. 5.6.2

$$\frac{F}{F_m} = \frac{g \cdot l^3}{g_m \cdot l_m^3} = \frac{\lambda^4}{\tau^2} \quad 5.6.4$$

Nu är enl. det föregående $\lambda = \frac{l}{l_m}$ och $\frac{\lambda}{\tau} = \frac{v}{v_m}$ varför fås

$$\frac{g \cdot l^3}{g_m \cdot l_m^3} = \frac{\lambda^2 \cdot \lambda^2}{\tau^2} = \frac{v^2 \cdot l^2}{v_m^2 \cdot l_m^2}$$

Förkortning ger

$$\frac{g \cdot l}{g_m \cdot l_m} = \frac{v^2}{v_m^2} \quad 5.6.5$$

Relationen kan också uttryckas

$$F = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}} = \frac{v_m}{\sqrt{g_m \cdot l_m}} \quad 5.6.6$$

vilket är det vanligaste sättet att skriva Froudes tal.

Då huvudsakligen tyngd- och tröghetskrafter bestämmer en strömning skall talet vara lika i original och modell. Talet är dimensionslöst.

Efter insättning av $\frac{l}{l_m} = \lambda$; $\frac{v}{v_m} = \frac{\lambda}{\tau}$ och $g = g_m$ i ekv. 5.6.6 fås

$$\frac{v}{v_m} = \sqrt{\lambda} \quad \text{och} \quad \tau = \sqrt{\lambda}$$

Följande skalor gäller då ($\frac{1}{L_m} = \lambda$)

<u>Beteckning</u>	<u>Dimension</u>	<u>Skala</u>
Längd, bredd, djup	L	λ
Tvärsekt., areor	L^2	λ^2
Volym	L^3	λ^3
Tid	T	$\lambda^{\frac{1}{2}}$
Hastighet	L/T	$\lambda^{\frac{1}{2}}$
Acceleration	L/T^2	λ^0
Vattenföring	L^3/T	$\lambda^{\frac{5}{2}}$

Exempel 5.3. Olja med kinematiska viskositeten $\nu = 0,4645 \text{ cm}^2/\text{sek}$ skall användas i en prototyp där friktions- och tyngdkrafter dominerar. Om modellskalan är 1:5, vilken viskositet skall modellvätskan ha för att Froudes och Reynolds tal skall bli desamma i modell och prototyp? (Exempelsaml. nr 50 sid. 147.)

Lösning: Vi har att om tyngd- och tröghetskrafter dominerar så är för tyngdkraften

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m \cdot g_m}{M_p \cdot g_p} = \frac{\rho_m \cdot V_m \cdot g_m}{\rho_p \cdot V_p \cdot g_p} = \frac{\rho_m \cdot L_m^3 \cdot g_m}{\rho_p \cdot L_p^3 \cdot g_p} \quad (1)$$

för masskrafterna (tröghetskrafterna)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{M_m \cdot a_m}{M_p \cdot a_p} = \frac{\rho_m \cdot L_m^3 \cdot L_m \cdot T_p^2}{\rho_p \cdot L_p^3 \cdot T_m^2 \cdot L_p} = \frac{\rho_m \cdot L_m^4 \cdot T_p^2}{\rho_p \cdot L_p^4 \cdot T_m^2} \quad (2)$$

Ekv. (1) och (2) ger

$$\frac{\rho_m \cdot L_m^3 \cdot g_m}{\rho_p \cdot L_p^3 \cdot g_p} = \frac{\rho_m \cdot L_m^4 \cdot T_p^2}{\rho_p \cdot L_p^4 \cdot T_m^2} ; \quad \frac{T_p^2}{T_m^2} = \frac{L_p}{L_m} \cdot \frac{g_m}{g_p} \quad (3)$$

Då fås

$$\frac{T_p}{T_m} = \left(\frac{L_p \cdot g_m}{L_m \cdot g_p} \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad \text{Vi kan skriva } v_m = \frac{L_m}{T_m} \quad \text{och } v_p = \frac{L_p}{T_p}$$

Vi får då att

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{L_m}{T_m} \cdot \frac{T_p}{L_p} = \frac{L_m}{L_p} \cdot \frac{T_p}{T_m} = \frac{L_m \cdot L_p^{\frac{1}{2}} \cdot \xi_m^{\frac{1}{2}}}{L_p \cdot L_m^{\frac{1}{2}} \cdot \xi_p^{\frac{1}{2}}} = \frac{L_m^{\frac{1}{2}} \cdot \xi_m^{\frac{1}{2}}}{L_p^{\frac{1}{2}} \cdot \xi_p^{\frac{1}{2}}}$$

Då $\frac{\xi_m}{\xi_p}$ kan sättas = 1 fås

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{L_m^{\frac{1}{2}}}{L_p^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

Dominerar mass- och friktionskrafter får vi för masskrafterna enligt ekv. (2)

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\xi_m \cdot L_m^4 \cdot T_p^2}{\xi_p \cdot L_p^4 \cdot T_m^2} \quad \text{och för friktionskrafterna}$$

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\tau_m \cdot A_m}{\tau_p \cdot A_p} = \frac{\mu_m \cdot A_m \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)_m}{\mu_p \cdot A_p \cdot \left(\frac{dv}{dy}\right)_p} = \frac{\mu_m \cdot L_m^2 \cdot \frac{L_m}{T_m \cdot L_m}}{\mu_p \cdot L_p^2 \cdot \frac{L_p}{T_p \cdot L_p}} = \frac{\mu_m \cdot L_m^2 \cdot T_p}{\mu_p \cdot L_p^2 \cdot T_m} \quad (5)$$

Ekv. (2) och (5) ger

$$\frac{\xi_m \cdot L_m^4 \cdot T_p^2}{\xi_p \cdot L_p^4 \cdot T_m^2} = \frac{\mu_m \cdot L_m^2 \cdot T_p}{\mu_p \cdot L_p^2 \cdot T_m}; \quad \text{Vi har att } \nu = \frac{\mu}{\xi} \text{ eller}$$

$$\mu_m = \xi_m \cdot \nu_m \quad \text{och}$$

$$\mu_p = \xi_p \cdot \nu_p \quad \text{som ger}$$

$$\frac{\xi_m \cdot L_m^2 \cdot T_p}{\xi_p \cdot L_p^2 \cdot T_m} = \frac{\xi_m \cdot \nu_m}{\xi_p \cdot \nu_p} \quad \text{vilket kan skrivas} \quad \frac{L_m \cdot T_p}{L_p \cdot T_m} = \frac{\nu_m \cdot L_p}{\nu_p \cdot L_m} \quad (6)$$

$$\text{Men } \frac{L_m \cdot T_p}{L_p \cdot T_m} = \frac{v_m}{v_p}$$

Varför

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{L_m^{\frac{1}{2}}}{L_p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\nu_m \cdot L_p}{\nu_p \cdot L_m} \quad \text{eller} \quad \frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{L_m^{\frac{3}{2}}}{L_p^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,084 ; \text{ Då } v_p = 0,4645 \text{ cm}^2/\text{sek fås}$$

$$\frac{v_m}{0,4645} = 0,0894 \quad \text{och} \quad v_m = 0,0415 \text{ cm}^2/\text{sek eller } 0,0415 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sek}$$

Exempel 5.4. Man vill undersöka strömningsförhållandena i ett planerat damnutskov med hjälp av en modell i skalan 1:25. Högsta högvattenföringen är $50 \text{ m}^3/\text{sek}$ i prototypen. Hur stor skall motsvarande vattenföring väljas i modellen?

Lösning: Strömning sker med fri vattenyta och bestäms i huvudsak av tröghets- och tyngdkrafter. Vattenföringen i modellen bör väljas med hjälp av Froudes modellregel.

Är längdskalan 1: λ blir vattenföringsskalan 1: $\lambda^{\frac{5}{2}}$. Då är

$$\frac{q_m}{q} = \frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}} ; \quad q_m = \frac{50}{25^{\frac{5}{2}}} = 0,016 \text{ m}^3/\text{sek} = 16 \text{ l/sek.}$$

6. Viskösa effekter: strömningsmotstånd

6.1 Energiförluster vid inkompressibel, stationär, laminär strömning

Det förekommer ej någon ökning i rörelseenergien vid stationär strömning i t.ex. ett rör. Tryckfallet vid horisontell strömning, som representerar det arbete, vilket utförts på vätskan eller gasen per volymenhet, omvandlas till "förluster" genom medverkan av viskositeten.

Vi härleder ett uttryck för energiförlusterna vid endimensionell strömning.

Rörelseekvationen tillämpad på ett vätske- eller gaselement (fig. 6.1) ger sambandet mellan skjuvspänningen och tryckfallet.

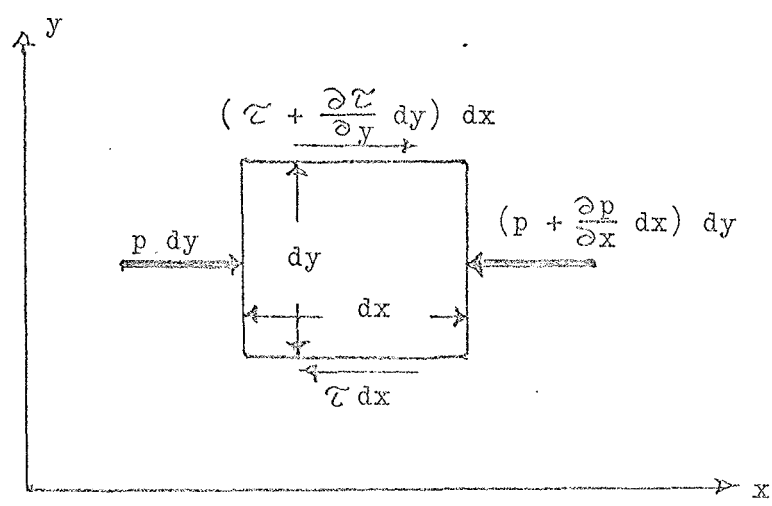


Fig. 6.1. Krafter verkande på ett vätske- eller gaselement vid endimensionell strömning.

Eftersom det inte föreligger någon acceleration är $\sum F_x = 0$ och vi får

$$p \, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dx - \tau \, dx = 0$$

eller efter hyfsning

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy} \tag{6.1.1}$$

Ekv. 6.1.1 anger, att tryckförändringen i x-riktningen måste vara lika stor som förändringen i skjuvspänningen i y-riktningen. Tydligen är dp/dx oberoende av y och dτ/dy oberoende av x.

Det arbete per tidsenhet, som tillförs ett vätske- eller gaselement vid

en dimensionell strömning består av det arbete, som utförs på elementet av tryckkrafter och skjuvspänningar, minus det arbete elementet utför på den omgivande vätskan (fig. 6.2) eller

$$p(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}) dy - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}) dy + \tau v_x dx + \frac{\partial}{\partial y} (\tau v_x) dy dx - \tau v_x dx$$

Höfnsning ger

$$\frac{\partial(\tau v_x)}{\partial y} - v_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Sista termen i ekvationen ovan blir i limes en infinitesimal av högre ordning och kan alltså försummas. Vi får till slut

$$\frac{\text{Tillförd nettoenergi}}{\text{volymenhet}} = \frac{d}{dy} (\tau v_x) - v_x \frac{dp}{dx} \quad 6.1.2$$

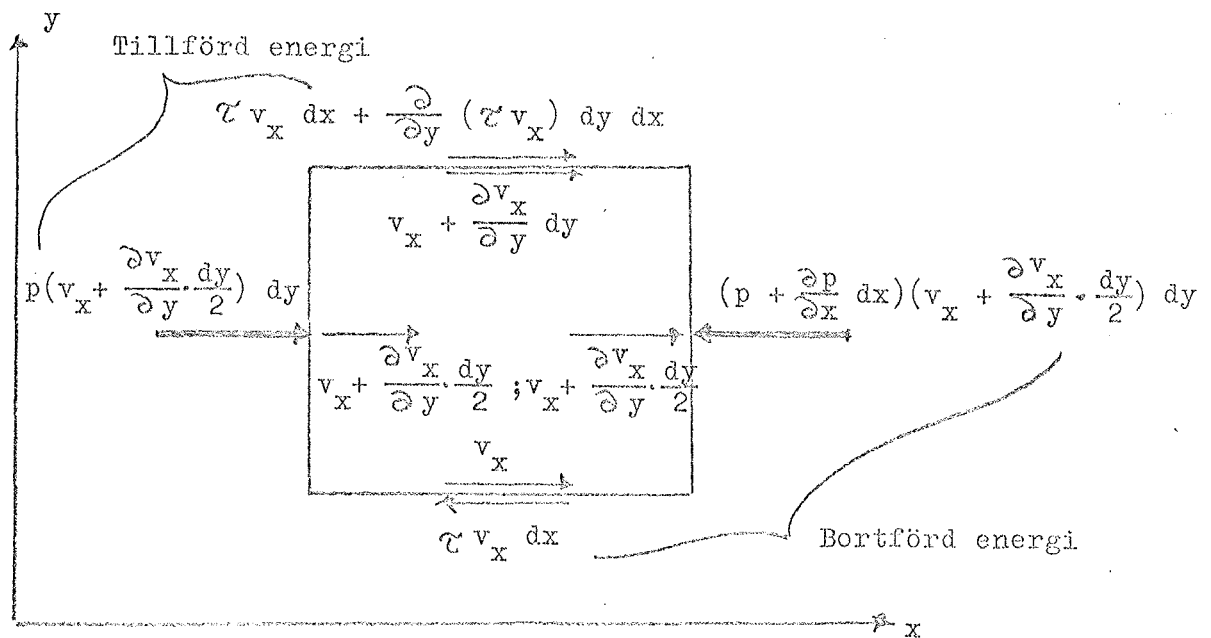


Fig. 6.2. Arbete utfört på ett vätske- eller gaselement i endimensionell strömning.

Utveckling av ekv. 6.1.2 och substituering med hjälp av ekv. 6.1.1 ger

$$\frac{\text{Tillförd nettoenergi}}{\text{volymenhet}} = \tau \frac{dv_x}{dy} + v_x \frac{d\tau}{dy} - v_x \frac{dp}{dx} = \tau \frac{dv_x}{dy} \quad 6.1.3$$

Newtons viskositetslag kan skrivas

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

varför

$$\frac{\text{Tillförd nettoenergi}}{\text{volymenhet}} = \tau \frac{dv}{dy} = \mu \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 = \frac{\tau^2}{\mu} \quad 6.1.4$$

Denna energi förbrukas genom friktionen, dvs. omvandlas till "förluster"

Uttrycket för energitillförseln per volymenhet (ekv. 6.1.4) är tillämpbart på laminär strömning i rör. Energiförlusterna är störst, när dv/dy är störst.

Fig. 6.3 visar schematiskt fördelningarna av skjuvspänning, hastighet och "förluster" i ett rör.

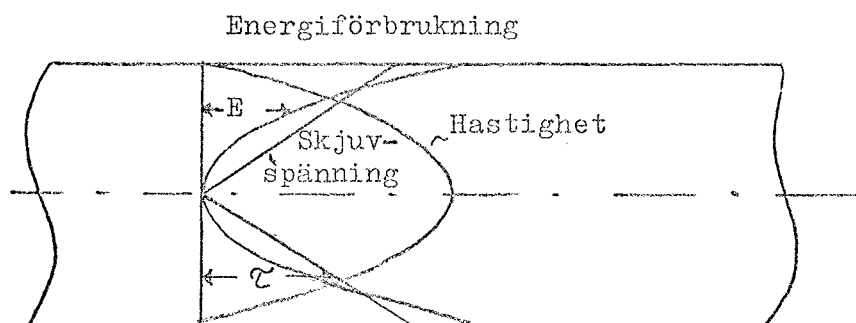


Fig. 6.3. Hastighets-, skjuvspännings- och energiförlustfördelningen i ett runt rör.

6.2 Laminär strömning i cirkulära rör

Vi betraktar inuti ett rör där en vätska strömmar laminärt ett cylindriskt vätskeelement med längden l och radien y samt med axeln sammanfallande med röraxeln (fig. 6.4).

Om p_1 och p_2 betecknar medeltrycken på den övre respektive undre tvärsnittsytan samt mg vätskeelementets tyngd blir accelerationskraften i rörelsens riktning enligt Newtons andra lag

$$F = m \cdot a = \pi \cdot y^2 \cdot p_1 + mg \cos \alpha - \pi \cdot y^2 \cdot p_2$$

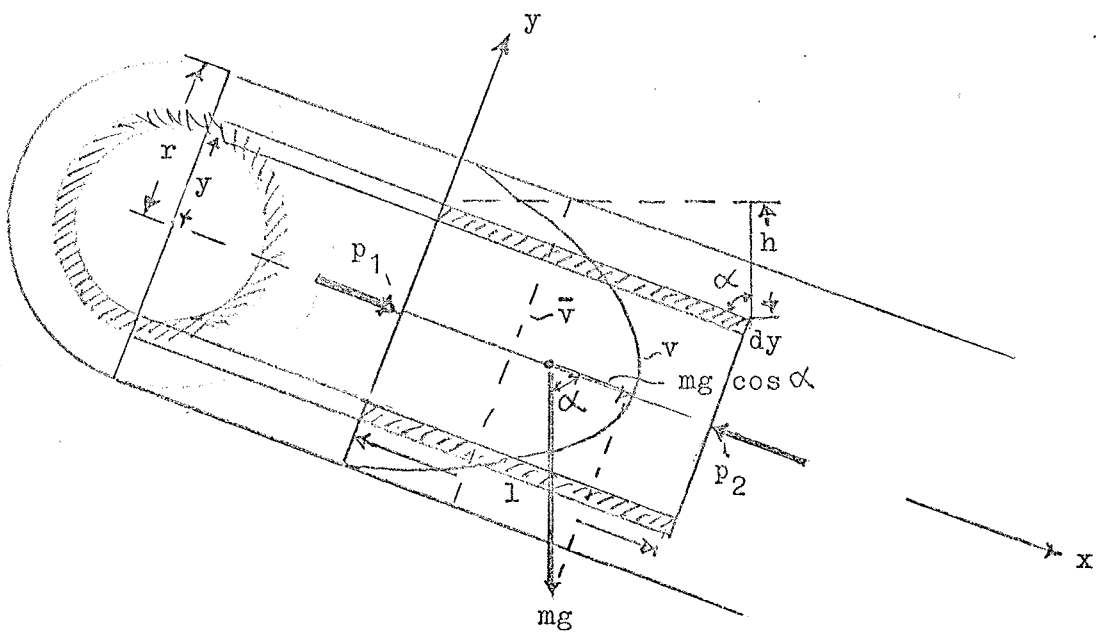


Fig. 6.4. Laminär strömning i cirkulärt rör.

Men $m = \rho \cdot \pi \cdot y^2 \cdot l$ och $\cos \alpha = \frac{h}{l}$ varför

$$F = \pi \cdot y^2 \cdot (p_1 - p_2) + \rho \cdot \pi \cdot y^2 \cdot l \cdot g \cdot \frac{h}{l} \tag{6.2.1}$$

Ekv. 6.2.1 kan skrivas

$$F = \pi \cdot y^2 \cdot \rho \cdot g \cdot l \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot l} + \frac{h}{l} \right) \tag{6.2.2}$$

Det har tidigare visats (sid. 119), att inom parentesen i ekv. 6.2.2 anger $(p_1 - p_2) / \rho \cdot g \cdot l$ det s.k. tryckfallet och $\frac{h}{l}$ det geometriska fallet. Tillsammans bildar dessa komponenter det totala fallet I. Vi kan då skriva ekv. 6.2.2 till

$$F = \pi \cdot y^2 \cdot \rho \cdot g \cdot l \cdot I \tag{6.2.3}$$

Tryckfallet per längdenhet längs röraxeln $(p_1 - p_2) / \rho \cdot g \cdot l$ må betraktas, som konstant dvs. oberoende av längden l. Då också $h/l = \cos \alpha =$ konstant följer, att totala fallet I är konstant utefter längden l.

På den cylindriska delens mantelyta verkar till följd av vätskefriktionen en tangentialkraft F, vars storlek kan fås ur Newtons viskositetslag

$$F_1 = -\mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dy} \quad \text{där } A = 2\pi \cdot y \cdot l \quad \text{alltså}$$

$$F_1 = -\mu \cdot 2\pi \cdot y \cdot l \cdot \frac{dv}{dy} \quad 6.2.4$$

Minustecknet anger, att hastigheten avtar mot rörväggen.

Vid stationär strömning föreligger ingen acceleration, dvs. $F + F_1 = 0$ eller

$$\pi \cdot y^2 \cdot \rho \cdot g \cdot l \cdot I + \mu \cdot 2\pi \cdot y \cdot l \cdot \frac{dv}{dy} = 0$$

Förkortning ger

$$\rho \cdot g \cdot l \cdot y + 2\mu \frac{dv}{dy} = 0$$

eller

$$dv = -\frac{\rho \cdot g \cdot l}{2\mu} y \, dy$$

Vi integrerar

$$v = -\frac{\rho \cdot g \cdot l}{2\mu} \int_0^y y \, dy = -\frac{\rho \cdot g \cdot l}{2\mu} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^y$$

och får

$$v = -\frac{\rho \cdot g \cdot l}{4\mu} y^2 + C$$

För $y = r$ blir $v = 0$ och $C = \frac{\rho \cdot g \cdot l}{4\mu} r^2$

Vi får då ekv.

$$v = \frac{\rho \cdot g \cdot l}{4\mu} (r^2 - y^2) \quad 6.2.5$$

Kontinuitetsvillkoret ger

$$q = \vec{v} \cdot A \quad \text{och} \quad dq = v \cdot dA$$

Enligt figuren är $dA = 2\pi \cdot y \, dy$

Detta ger

$$dq = \frac{\rho g I}{4\mu} (r^2 - y^2) \cdot 2\pi \cdot y \, dy$$

Vi integrerar och får

$$q = \frac{\pi \rho g I}{2\mu} \int_0^r (r^2 y - y^3) \, dy = \frac{\pi \rho g I}{2\mu} r^2 \int_0^r y \, dy - \frac{\pi \rho g I}{2\mu} \int_0^r y^3 \, dy$$

$$q = \frac{\pi \rho g I r^2}{2\mu} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^r - \frac{\pi \rho g I}{2\mu} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^r$$

$$q = \frac{\pi \rho g I \cdot r^2 \cdot r^2}{4\mu} - \frac{\pi \rho g I r^4}{8\mu} = \frac{\pi \rho g I r^4}{8\mu}$$

$$q = \frac{\pi \rho g I r^4}{8\mu}$$

6.2.6

Ekvationen 6.2.6 är känd som Hagen-Poiseulles ekvation.

Förekommer endast tryckfall gäller

$$I = \frac{p_1 - p_2}{\rho g l} \quad \text{eller} \quad \rho g I = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\Delta p}{l}$$

Ekv. 6.2.6 kan då skrivas

$$q = \frac{\pi \Delta p r^4}{8\mu l}$$

6.2.7

Är \bar{v} = medelhastigheten så blir

$$q = A \cdot \bar{v} = \pi \cdot r^2 \cdot \bar{v} = \frac{\pi \rho g I r^4}{8\mu}$$

eller

$$\bar{v} = \frac{\pi \rho g I r^4}{r^2 \cdot 8\mu} = \frac{\rho g I r^2}{8\mu}$$

Detta är liktydigt med relationen

$$I = \frac{8\mu}{\rho g r^2} \cdot \bar{v} = \text{konst.} \cdot \bar{v}$$

6.2.8

Ekv. 6.2.8 är ett för laminär strömning karakteristiskt uttryck.

Energiförlusterna varierar, som synes, direkt mot viskositeten, längden och avbördningen och omvänt mot fjärde potensen av radien.

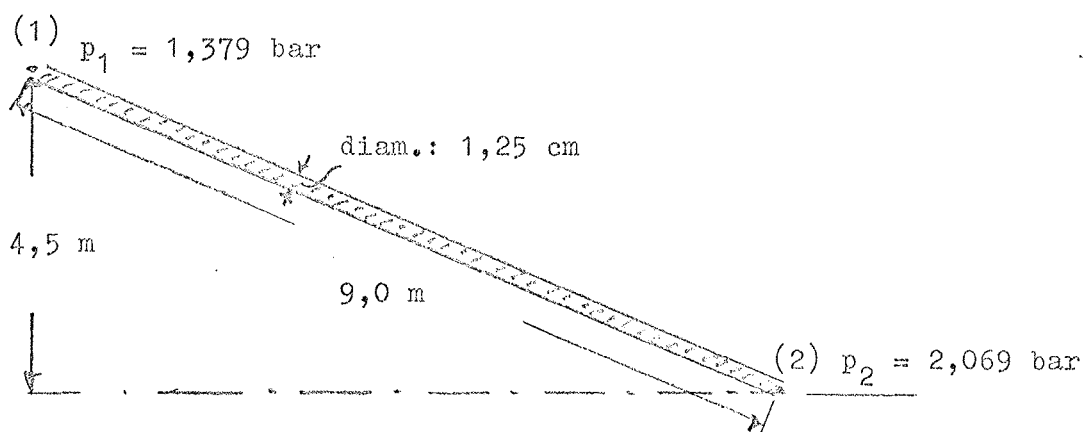
Lägg märke till, att någon hänsyn ej tagits till rörets skrovlighet.

Ekvationerna 6.2.1 till 6.2.8 gäller dock ej nära mynningen av ett rör. Vid en strömning från en behållare genom en väl avrundad öppning blir hastigheten först nästan lika över hela tvärsnittet. Verkan av friktioner mot väggen (eftersom hastigheten måste vara noll vid väggen) blir en hastighetsminskning där. Som en följd av kontinuiteten måste då hastigheten öka i de centrala delarna av röret. Den längd L' som erfordras för att den karakteristiska paraboliska hastighetsfördelningen skall uppkomma är en funktion av Reynolds tal Re . Enligt Langhaar gäller följande relation

$$\frac{L'}{D} = 0,058 Re \quad 6.2.9$$

där D är rörets diameter och Re Reynolds tal.

Exempel 6.1. Bestäm riktningen av strömningen genom röret i nedanstående figur, i vilket $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,40$ poise. Sök den genomströmmande mängden i l/min.



Lösning: Strömningen sker från (2) till (1) eftersom energien är större vid (2) (hastighetsenergien måste vara densamma i båda fallen). Vi tillämpar Bernoullis ekv. och kan skriva:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + 4,5 + h_f = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + 0$$

eller

$$\frac{137900}{1000 \cdot 9,81} + 4,5 + h_f = \frac{206900}{1000 \cdot 9,81} ; h_f = 21,09 - 14,06 - 4,5 = 2,53$$

$$I = \frac{h_f}{l} = \frac{2,53}{9,0} = 0,281$$

Ekv. 6.2.6 ger

$$q = \frac{3,1416 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,281 \cdot 0,0125^4}{8 \cdot 0,04 \cdot 9} = \frac{0,02113}{288} = 0,0000734 \text{ m}^3/\text{sek} =$$

$$= 0,0734 \cdot 60 = 4,4 \text{ l/min}$$

6.3 Laminär strömning i öppen ledning. Medelhastigheten och vätskeföringen vid laminär strömning över ett brett plan

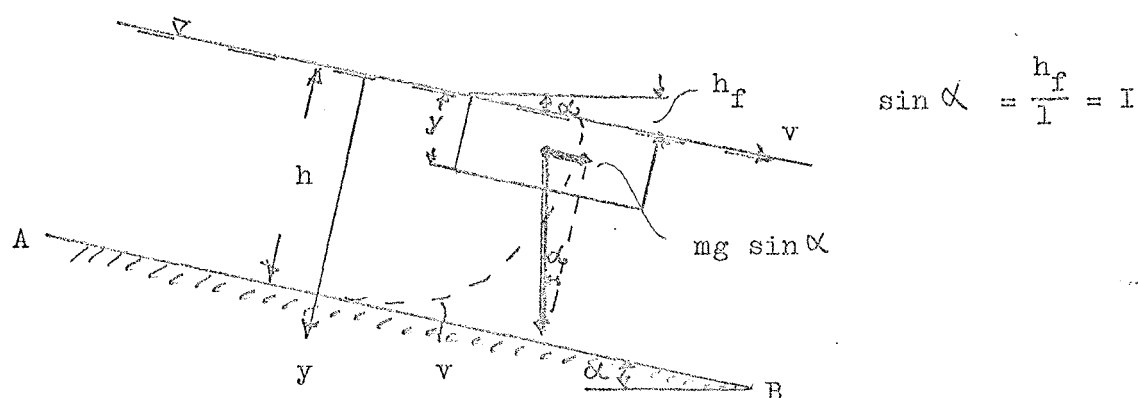


Fig. 6.5. Laminär strömning över ett brett plan.

I fig. 6.5 är AB ett brett plan med lutningen I . Vätskedjupet är h . Vi studerar ett vätskeelement på djupet y . Elementets längd är l och dess bredd är lika med planets bredd b .

Vid strömningen har vi endast att räkna med geometriskt fall. Den på elementet verkande accelererande kraften blir tyngdkraftens komponent i rörelseriktningen

$$F_1 = mg \sin \alpha$$

Mot rörelseriktningen verkar friktionskraften

$$F_2 = -\mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dy}$$

Då strömningen är stationär förekommer ingen acceleration. Alltså

$$F_1 + F_2 = mg \sin \alpha + \mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dy} = 0 \quad 6.3.1$$

Men $m = \rho V = \rho \cdot b \cdot l \cdot y$; $A = b \cdot l$ och $\sin \alpha = I$ varför

$$\rho \cdot b \cdot l \cdot y \cdot g \cdot I + \mu \cdot b \cdot l \cdot \frac{dv}{dy} = 0$$

eller

$$v = - \frac{\rho g I}{\mu} \int_0^h y \, dy = - \frac{\rho g I}{\mu} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = - \frac{\rho g I}{2\mu} y^2 + C$$

För $y = h$ blir $v = 0$ och $C = \frac{\rho g I}{2\mu} \cdot h^2$

Alltså

$$v = \frac{\rho g I}{2\mu} (h^2 - y^2) \quad 6.3.2$$

För $\mu = \rho \nu$ fås

$$v = \frac{g I}{2\nu} (h^2 - y^2) \quad 6.3.3$$

Vi beräknar vätskeföringen. $dA = b \, dx$ och $dq = v \, dA = v \cdot b \cdot dy =$

$$= \frac{\rho g I}{2\mu} b \int_0^h (h^2 - y^2) \, dy$$

Vi integrerar

$$q = \frac{\rho g I}{2\mu} b h^2 \int_0^h dy - \frac{\rho g I}{2\mu} b \int_0^h y^2 \, dy =$$

$$= \frac{\rho g I b h^2}{2\mu} \left[y \right]_0^h - \frac{\rho g I b}{2\mu} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h =$$

$$= \frac{\rho g I b}{2\mu} \left(h^3 - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{\rho g I b h^3}{3\mu} = \frac{g I b h^3}{3\nu} \quad 6.3.4$$

Medelhast. \bar{v} fås ur rel.: $\bar{v} \cdot b \cdot h = \frac{8 g I b h^3}{3 \mu}$

$$\bar{v} = \frac{8 g I h^2}{3 \mu} = \frac{g I h^2}{3 \nu}$$

6.3.5

Vid laminär strömning i öppen ränna eller över ett brett plan är medelhastigheten proportionell mot fallet.

Exempel 6.2. Beräkna medelhastigheten vid vattnets laminära strömning utför ett plan vars lutning är 1:100 om ν sättes = $0,01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ och vattendjupet är 0,001 m.

Lösning: Relationen 6.3.5

$$\bar{v} = \frac{g I h^2}{3 \nu} \text{ ger}$$

$$\bar{v} = \frac{9,81 \cdot 0,01 \cdot 0,000001 \cdot 10000}{3 \cdot 0,01} = \frac{9,81 \cdot 0,01}{3} = 0,0327 \text{ m/s.}$$

6.4 Reynolds kritiska tal

Som redan berörts i avsnitt 5.5 blir, så länge medelhastigheten i en strömning är lägre än ett visst värde, den s.k. nedre kritiska hastigheten, denna strömning laminär och tillfälliga störningar utjämnas snabbt.

Vid den nedre kritiska hastigheten övergår turbulent strömning till laminär strömning.

Ökas hastigheten över nämnda värde blir strömningstillståndet alltmera känsligt för tillfälliga störningar.

Undvikas dylika kan hastigheten ökas till ett visst värde den s.k. övre kritiska hastigheten vid vilken laminär strömning övergår till turbulent och över vilken strömningstillståndet alltid är turbulent.

Vilket tillstånd, som blir rådande beror på mediets hastighet och rörledningens dimensioner och bestäms beträffande övergången mellan laminär och turbulent strömning av Reynolds kritiska tal. Relationen är redan given i ekv. 5.5.8 eller

$$Re_{\text{krit}} = \frac{v_{\text{krit}} l}{\nu}$$

6.4.1

där v_{krit} = vätskehast. m/sek

l = en längd, vid rör oftast rördiam. d

= vätskans kinem. visk. ($\nu = \frac{\mu}{\rho}$).

Det är mycket svårt att bestämma värdet på övre kritiska hastigheten. Detta beror på turbulensens orsaker och att den kan vara mera eller mindre väl utvecklad.

Om man utan närmare angivelse ger Re_{krit} menar man i allmänhet nedre kritiska hastigheten.

De vid den turbulenta rörelsen uppträdande energiförlusterna är, som redan påpekats, av en helt annan storleksordning än de, som förekommer vid den laminära rörelsen.

Samtidigt som rörelsetillståndet övergår från laminärt till turbulent ändras förhållandet mellan energilinjen lutning I , och medelhastigheten \bar{v} .

Vid laminär strömning är energilinjen lutning direkt proportionell mot \bar{v} ; vid fullt utbildad turbulens är den proportionell mot \bar{v}^2 .

De höga värdena på Re vid turbulent strömning ($Re = 10^4 \sim 10^6$) visar att tröghetskrafterna har en betydande storlek.

Detta sammanhänger med de i virvlarna uppkomna accelerationerna, som medför ständiga variationer i hastighetens storlek och riktning.

Matematiskt har turbulensen behandlats av Kármán (1930) och Prandtl (1933).

Vid strömningar i ledningar, vattendrag etc. överskrides i allmänhet Re_{krit} . Hastigheten är således oftast så hög att strömningen är turbulent.

Markvattnets (grundvattnets) rörelse är däremot laminär.

Re_{krit} har för cirk. metallrör värdet ~ 2300 för tegel- och betongrör ~ 1200 .

Ju slätare ett rör är desto högre Re_{krit} .

Skriver vi Reynolds Re för öppna ledningar under formen

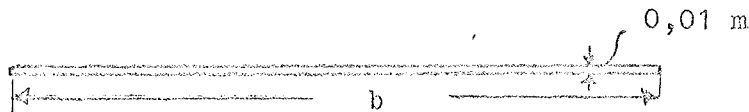
$$Re = \frac{\bar{v} \cdot 4 R_h}{\nu}$$

så fås för Re_{krit} : ~ 600 .

Exempel 6.3. Vatten med temperaturen $+ 10^\circ C$ strömmar över en betongbana. Vid vilken hastighet inträffar turbulens, om vattendjupet är 1 cm. Vid $+ 10^\circ C$ är $\nu = 0,0131 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sek}$. $Re_{krit} = 580$.

Lösning: Uttryck på R_h fås ur relationen

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\text{våta arean}}{\text{våta omkr.}}$$



Ovanstående figur ger

$$R_h = \frac{0,01 \cdot b}{b + 2 \cdot 0,01} = \frac{0,01}{1 + \frac{0,02}{b}}$$

Uttrycket $0,02/b$ blir för ett stort värde på b försumbart, och vi får att R_h approx. är lika med vattendjupet.

Vi har då relationen

$$Re_{krit} = \frac{\bar{v}_{krit} \cdot 4 R_h}{\nu} \quad \text{eller} \quad 580 = \frac{\bar{v}_{krit} \cdot 4 \cdot 0,01}{0,0131 \cdot 10^{-4}}$$

$$\bar{v}_{krit} = \frac{580 \cdot 0,0131}{0,04 \cdot 10000} = \frac{7,598}{400} = 0,019 \text{ m/sek} = 1,1 \text{ m/min.}$$

Exempel 6.4. Regnvatten av temperaturen $+ 10^\circ C$ strömmar utför ett plåttak. Om vattendjupet uppskattas till 5 mm, hur stor kan då hastigheten vara utan att rörelsen blir turbulent? Hur stort blir Q per m av takbredden under 1 min? Vid $+10^\circ C$ är $\nu = 0,0131 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sek}$. $Re_{krit} = 580$

Lösning: $\frac{\bar{v}_{\text{krit}} \cdot 4 R_h}{\nu} = Re_{\text{krit}} \quad \text{eller}$

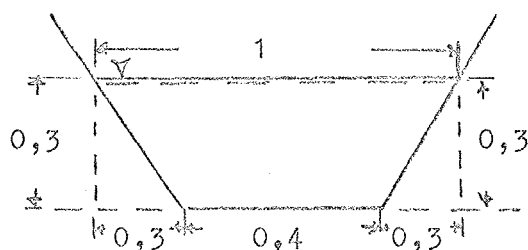
$$\frac{\bar{v}_{\text{krit}} \cdot 4 \cdot 0,005}{0,0131 \cdot 10^{-4}} = \frac{\bar{v}_{\text{krit}} \cdot 0,02 \cdot 10000}{0,0131}$$

$$\bar{v}_{\text{krit}} = \frac{580 \cdot 0,0131}{200} = 0,038 \text{ m/sek}$$

För Q gäller: $Q = \bar{v} \cdot A \cdot t = 0,038 \cdot 0,005 \cdot 1 \cdot 60 = 0,0114 \text{ m}^3/\text{min}$

Exempel 6.5. Beräkna Reynolds tal Re för ett dike med släntlutningen 1:1 om vattendjupet är 30 cm, bottenbredden 40 cm och vattenhastigheten 0,5 m/sek. ν sättes till $0,01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sek}$.

Lösning: Se fig.



$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{0,3(1 + 0,4)}{2(2 \cdot 0,3 \sqrt{2} + 0,4)} = 0,17 \text{ m}$$

$$Re = \frac{\bar{v} \cdot 4 R_h}{\nu} = \frac{4 \cdot 0,17 \cdot 0,5}{0,01 \cdot 10^{-4}} = 3,4 \cdot 10^5$$

Turbulensen är mycket kraftigt utvecklad.

6.5 Stokes lag

Lagarna för en viskös, inkompressibel vätskas strömning runt en sfär har givits av Stokes för värden på Reynolds tal vd/ν mindre än 1.

Stokes fann den kraft, med vilken sfären påverkades av vätskan omkring den, vara

$$F = 6 \pi r \mu v \quad 6.5.1$$

där r = sfärens radie

v = sfärens hastighet relativt vätskan

För en sfär, som faller genom en vätska i vila, gäller att lyftkraften

plus kraften F ovan måste vara lika med sfärens tyngd eller

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v g + 6 \pi r \mu v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_s g$$

där ρ_v är vätskans densitet och ρ_s sfärens densitet.

Vi löser ut v och får

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2}{\mu} (\rho_s - \rho_v) \quad 6.5.2$$

Stokes lag är mycket användbar, bl.a. vid s.k. sedimentationsanalys, dvs. vid bestämning av texturen i olika jordar.

6.6 Turbulent strömning i cirkulära rör

Vid behandling av turbulent strömning i cirkulära rör kan man göra följande antaganden:

att friktionskraften F_{fr} är proportionell mot hela den våtta ytan, mot specifika tyngden ρg och mot hastighetshöjden $\frac{\bar{v}^2}{2g}$ där \bar{v} är medelhastigheten.

Betecknas den "våta omkretsen" hos ledningen med p så blir den våtta ytan $p \cdot l$ och friktionskraften (motståndskraften)

$$F_{fr} = \psi \cdot p \cdot l \cdot \rho g \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.6.1$$

där ψ är en dimensionslös konstant, benämnd motståndstal.

Som medelvärde på skjuvspänningen vid ledningens väggar får vi då

$$\tau_o = \frac{F_{fr}}{p \cdot l} = \psi \cdot \rho g \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.6.2$$

Den vätskepelare (fig. 6.6), som fyller röret utefter längden l har tyngden $\rho A l g$ där A = ledningens tvärsnitt.

För inkompressibel stationär, likformig strömning måste friktionskraften vara lika stor som summan av resultanten till tryckkrafterna och tyngdkraftens komponent i strömningsriktningen. Då fås

resultanten till tryckkrafterna lika med $(p_1 - p_2) A$

tyngdkraftens komponent lika med

$$mg \cos \alpha = mg \frac{z_1 - z_2}{l} = \int g A \cdot l \frac{z_1 - z_2}{l}$$

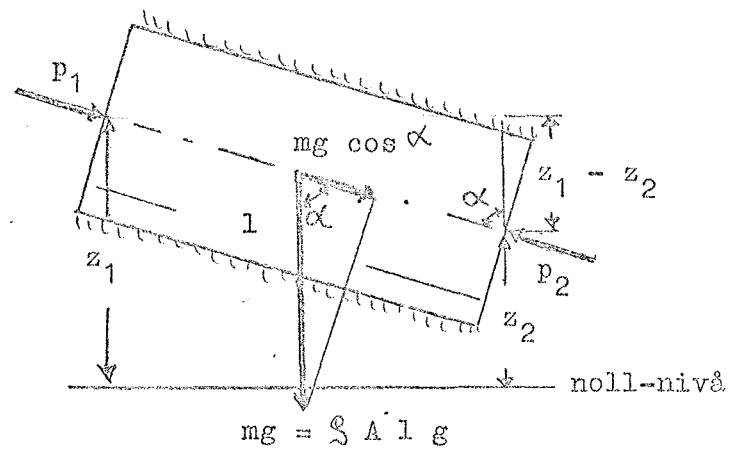


Fig. 6.6. Vätskepelare med längden l.

Kombination med ekv. 6.6.1 ger då

$$(p_1 - p_2) A + \int g \cdot A \cdot l \frac{z_1 - z_2}{l} = \psi \cdot p \cdot l \cdot \int g \frac{\bar{v}^2}{2g} \tag{6.6.3}$$

Vi dividerar ekv. 6.6.3 med $\int g l A$ och får

$$\frac{(p_1 - p_2) A}{\int g \cdot l \cdot A} + \frac{\int g \cdot A \cdot l (z_1 - z_2)}{\int g \cdot l \cdot A \cdot l} = \frac{\psi \cdot p \cdot l \cdot \int g \cdot \bar{v}^2}{\int g \cdot l \cdot A \cdot 2g}$$

Vidare

$$\frac{p_1 - p_2}{\int g \cdot l} + \frac{z_1 - z_2}{l} = \psi \cdot \frac{p}{A} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \tag{6.6.4}$$

Ur det föregående har framgått att

$$\frac{p_1 - p_2}{\int g \cdot l} + \frac{z_1 - z_2}{l} \text{ är lika med totala fallet } I. \text{ Alltså}$$

$$I = \psi \cdot \frac{p}{A} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \tag{6.6.5}$$

Kvoten $A/p = \text{rörtvärnsnittet/våta omkretsen} = R_h$ är, som redan ontalats i avsnitt 5.5 sid. 155 ledningens hydrauliska radie (medeldjup).

För cirkulärt rör blir

$$R_h = \frac{\pi r^2}{2 \pi r} = \frac{r}{2} \quad \text{och}$$

$$I = \psi \cdot \frac{1}{R_h} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.6.6$$

Ersättes den hydrauliska radien R_h i ekv. 6.6.6 med rördiametern d fås, eftersom $d = 2r = 4R_h$ och $R_h = d/4$

$$I = \psi \cdot \frac{1}{\frac{d}{4}} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} = 4 \psi \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

Inför vi beteckningen $4\psi = f$ i ekv. ovan fås ($f = \underline{\text{friktionskoefficienten}}$)

$$I = f \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.6.7$$

Är fallet I bekant, kan man ur ekv. 6.6.7 beräkna \bar{v} och därmed också $q = \bar{v} \cdot A$.

Ekv. 6.6.7 ger ett uttryck på förlusthöjden i Bernoullis ekv.

Vi har förut visat, att vid stationär strömning i ett rakt cylindriskt rör är $v_1 = v_2$ och att därför

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = h_f \quad 6.6.8$$

Kombination av ekv. 6.6.4 och 6.6.8 ger

$$h_f = I \cdot l \quad \text{eller}$$

$$h_f = f \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.6.9$$

Ekv. 6.6.9 benämnes Darcy-Weisbachs ekvation.

6.7 Turbulent strömning i öppna ledningar

Genom en härledning analog med den för turbulent strömning i cirkulära rör kan vi få ett uttryck för totala fallet I i öppna ledningar

$$I = \psi \cdot \frac{1}{R_h} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.7.1$$

(Ekv. 6.6.6 under turbulent strömning i cirkulära rör).

Vi löser \bar{v} i ekv. 6.7.1 och får

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2g}{\psi}} \cdot \sqrt{R_h \cdot I} \quad 6.7.2$$

Sättes $\sqrt{\frac{2g}{\psi}} = C$ fås de Chezys ekv. för öppna ledningar

$$\bar{v} = C \sqrt{R_h \cdot I} \quad 6.7.3$$

Storleken på C antas bero på ledningens skrovlighet och på fallet.

Enligt Bazin är motståndstalet

$$\psi = 0,0026 \left(1 + \sqrt{\frac{k}{R_h}}\right)^2 \quad 6.7.4$$

Införes detta värde i ekv. 6.7.2 fås

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2g}{0,0026}} \cdot \frac{\sqrt{R_h \cdot I}}{1 + \sqrt{\frac{k}{R_h}}}$$

eller om alla längder uttrycks i m

$$\bar{v} = \frac{87}{1 + \frac{\beta}{\sqrt{R_h}}} \cdot \sqrt{R_h \cdot I} \quad 6.7.5$$

där β har följande värden för olika material

	β
Slipad cement, hyvlat trä	0,06
Ohyvlat trä, tegel, huggen sten	0,16
Grovt murverk	0,47
Grävd kanal	1,30
Vattendrag med stenar o. dyl.	2,00

Inom hydrotekniken används ofta den med Bazins formel nära överensstämmande förenklade Kutterska formeln

$$\bar{v} = \frac{100}{1 + \frac{\beta'}{\sqrt{R_h}}} \cdot \sqrt{R_h \cdot I} \quad 6.7.6$$

där β' får något större värde än β i tabellen ovan (varierar mellan 0,1 och 2,50).

Faktorn $100/(1 + \frac{\beta'}{\sqrt{R_h}})$ är C i de Chezys formel och skrives också

$$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{\beta' + \sqrt{R_h}} \quad 6.7.7$$

Värden på β' i Kutters förenklade formel

<u>Material</u>	β'
Jämn vägg av trä eller betong	0,20
Jämn jordvägg utan vattenväxter	1,50
Jordvägg med stenar eller halva sektionen fylld med vattenväxter	1,70
Jordvägg med hela sektionen fylld med vattenväxter eller vägg av sprängt berg	2,50

För inkompressibel, stationär strömning vid konstant djup i en prismatisk öppen kanal används ofta Gauckler-Hagen-Stricklers formel (vanlige benämnd Mannings formel)

$$\bar{v} = C \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad 6.7.8$$

Värdet på C i Gauckler-Hagen-Stricklers formel

Slipad betong	90-80
Ny betong (ej slipad)	60
Angripen betong	50
Grävda kanaler och diken	42-30
Naturliga vattendrag	30-24
Naturliga vattendrag med stark växtlighet	24-12

Av det föregående har framgått att friktionskoefficienten C är en funktion av medelhastigheten, hydrauliska radien (medeldjupet), kinematiska viskositeten och väggens skrovlighet.

Viskositeten är implicit innesluten i uttrycket på C .

Formlerna för öppna ledningar tillåter inget hänsynstagande till viskositeten trots att denna kan variera avsevärt.

De flesta strömningar i öppna ledningar sker dock vid väl utvecklad turbulens där viskositeten har relativt litet inflytande på friktionsförlusterna. Dessa bestäms huvudsakligen av den rådande medelhastigheten och väggens skrovlighet.

Vid låga hastigheter och jämn väggbeskaffenhet blir formlernas användbarhet mera tvivelaktig, då viskositeten varierar.

6.8 Moodydiagrammet (f- Re diagrammet)

Ett av de mest använda diagrammen för bestämning av friktionen i bruksrör har konstruerats av Moody (fig. 6.7). Diagrammet uttrycker f som en funktion av relativ skrovlighet och Reynolds tal Re .

Först skall vi visa, att f bl.a. är en funktion av Reynolds tal Re .

Vi har på sid. 167 erhållit ekvationen 6.2.8 eller

$$I = \frac{8 \mu}{\rho g \cdot r^2} \cdot \bar{v}$$

Uttrycket ovan överför vi till formen

$$h_f = f \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

Vi får

$$\begin{aligned} I &= \frac{8 \mu}{\rho g \cdot r^2} \cdot \bar{v} = \frac{8 \rho \nu}{\rho g \cdot r^2} \bar{v} = \frac{8 \nu}{g \cdot r^2} \bar{v} = \frac{64 \nu}{4 \cdot r^2} \cdot \frac{\bar{v}}{2g} = \\ &= \frac{64 \nu}{\bar{v} \cdot 2 r} \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} = \frac{64}{\bar{v} \cdot d} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \end{aligned}$$

Till slut erhålles

$$h_f = l \cdot l = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad 6.8.1$$

och

$$f_{lam.} = \frac{64}{Re} \quad 6.8.2$$

Ekvationen 6.8.2 är tillämplig vid all slags skrovlighet, eftersom tryckfallet vid laminär strömning är oberoende av väggs krovligheten.

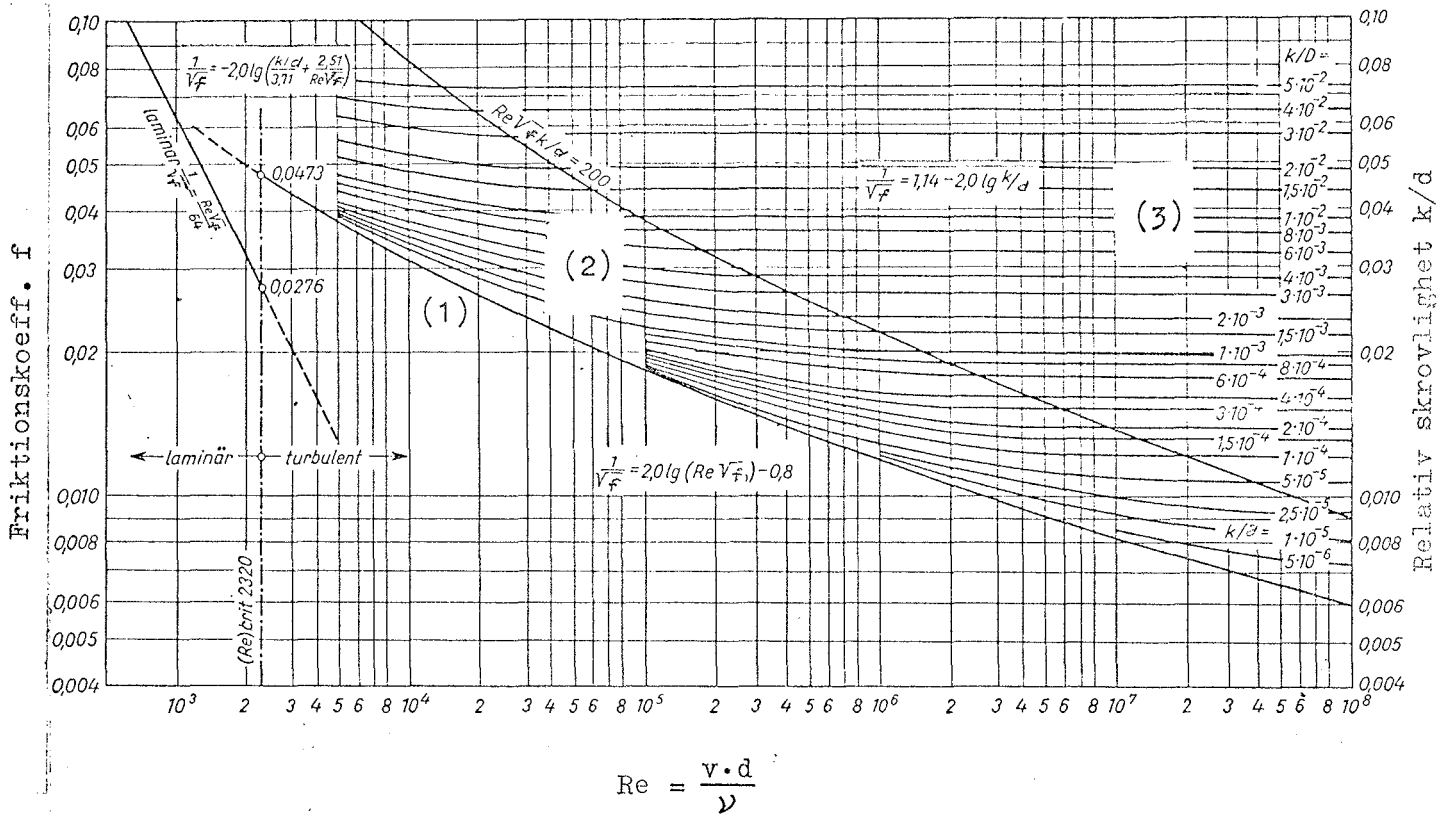


Fig. 6.7. Moodydiagrammet.

Den turbulenta strömningen kan indelas (se fig. 6.7) i tre typer, nämligen

- (1) Strömning vid glatta väggar där f är helt beroende av Reynolds tal Re
- (2) Strömning i ett övergångsområde
- (3) Starkt turbulent strömning vid skrovliga väggar där f är oberoende av Re men beroende av väggarnas relativa skrovlighet k/d . k är här ett absolut mått på den ekvivalenta sandskrovligheten, dvs. den diameter hos sandkorn, som skulle ge samma friktionsförlust.

Några värden på k

Släta plaströr (48 mm)	0 - 0,005 mm
Släta plaströr (86 mm)	0 - 0,01 "
Rör av glas, koppar, mässing	0 - 0,02 "
Dragna stålrör, nya	0,02 - 0,05 "
Galv. järnrör, asfaltstr. gjurjärnsrör, nya	0,15 "
Gjutjärnsrör, nya	0,25 "
Tegelrör (släta - skrovliga)	0,1 - 0,25 "
Betongrör	0,2 - 0,8 "
Järn- och stålrör, rostiga	0,5 - 2,0 "
Plaströr, korrugerade (45 resp. 92 mm)	1,1 "

Vid turbulent strömning i en ledning förekommer närmast väggen ett skikt, där strömningen är laminär. Tjockleken hos detta skikt avtar med växande Re .

Den naturliga skrovligheten hos en vägg är oregelbunden med både stora och små ojämnheter på varierande avstånd från varandra.

När nu Re ökar i ett rör med naturlig skrovlighet, bryter först den största ojämnheten igenom det laminära gränsskiktet, därefter den näst största etc.

Man får en successiv övergång från ett glatt laminärt gränsskikt till en skrovlig vägg med fullt utbildade virvelavlösningar.

I ett rör med ensartad sandbeläggning blir Re större, innan något av kornen bryter igenom. Genombrytningen sker samtidigt för nästan alla korn.

För de olika områdena gäller följande ekvationer över värdet på f .

Laminära området: $Re \leq 2300$

$$f = f(Re) \quad f = \frac{64}{Re}$$

Turbulenta området: $Re > 2300$

Glatta rör

$$f = f(Re) \text{ Bazins formel: } f = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}$$

Ofta skriven: $f = 0,316 Re^{-0,25}$ 6.8.4

för $Re = 3 \cdot 10^3 - 10^5$

(1)

Prandtls formel

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2,51} = 2 \log Re \sqrt{f} - 0,8$$
 6.8.5

för $Re = 3 \cdot 10^3 - 3,4 \cdot 10^6$

Skrovliga rör

a) övergångszonen, området med ofullständig turbulens

$f = f(Re, \frac{k}{d})$ Colebrooks formel

(2)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k/d}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right)$$
 6.8.6

b) området för full turbulens

$f = f(\frac{k}{d})$ Nikuradse-Prandtls formel

(3)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 + 2 \log \frac{d}{k}$$
 6.8.7

ofta skriven

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3,71 \cdot d}{k}$$
 6.8.8

Ekvationen för gränslinjen mellan övergångszonen och området med full turbulens brukar skrivas

$$Re \sqrt{f} \frac{k}{d} = 200$$
 6.8.9

6.9 De Chezy's och Gauckler-Hagen-Stricklers formler för rörledningar

För praktiska beräkningar vid rördimensionering blir det vanligen för komplicerat och tidsödande att använda allmänna friktionsformeln.

Ett flertal forskare har därför konstruerat mera lätthanterliga formler.

En av de första, som studerade friktionsförlusterna i rinnande vatten var de Chezy, som 1775 uppställde den redan på sid. 178 angivna ekvationen 6.7.3 eller

$$\bar{v} = C \sqrt{R_h I} \quad 6.9.1$$

där C = en koefficient, som av de Chezy antogs bero endast av ledningens skrovlighet

v = medelhastigheten m/s

I = energilinjens lutning, fallet (dimensionslöst tal, höjd:längd, h_f/l)

R_h = hydrauliska radien (medeldjupet) i m uttryckt genom formeln

$$R_h = \frac{A}{p}$$

där A = våta arean, m^2

p = våta omkretsen i m dvs. längden av den del av ledningstvärsnittet, som kommer i beröring med vätskan.

Allmänna friktionsformeln kan skrivas om till samma uttryck som de Chezy's formel.

Vi har att

$$h_f = I \cdot l = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

eller

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2g}{f} \cdot d \cdot I}$$

Då $R_h = \frac{A}{p}$ vid fullgång i rör = $\frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi \cdot d} = \frac{d}{4}$ eller $d = 4 R_h$ fås

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8g}{f} \cdot R_h \cdot I} \quad 6.9.2$$

Konstanten C i de Chezy's formel motsvaras alltså av uttrycket

$$C = \sqrt{8g} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \quad 6.9.3$$

I Moody-diagrammet finner man, att enbart vid en skrovlig vägg och fullt

utbildad turbulens är f för ett visst värde på k/d konstant för varierande Re .

de Chezy's formel gäller alltså enbart för mycket höga värden på Re eller $Re > 10^5$, 10^6 och 10^7 för $k/d > 0,01$, $0,001$ och $0,0001$ resp.

Konstanten C är ett uttryck för den relativa skrovligheten och kommer alltså att för en och samma skrovlighet i väggen få olika värden för olika dimensioner hos ledningen.

De Chezy's formel kan härledas på följande sätt.

För cirkulära rör har vi enligt ekv. 6.6.6 sid. 171 att

$$I = \psi \cdot \frac{1}{R_h} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

eller,

$$\bar{v}^2 = \frac{2g}{\psi} \cdot R_h \cdot I$$

dvs.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2g}{\psi}} \sqrt{R_h \cdot I}$$

Sättes $\sqrt{\frac{2g}{\psi}} = C$ fås

$$\bar{v} = C \sqrt{R_h \cdot I}$$

Förutom den tidigare relaterade Bazins formel för glatta rör har vi ett ofta använt uttryck för beräkning av fallförlusten i järnrörsledningar i Langs formel

$$= 0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{v \cdot d}} \quad 6.9.4$$

där v anges i m/sek och d i m.

Då Re ej ingår i uttrycket är formeln endast giltig för vatten av normal temperatur.

Vid överslagsberäkningar för ledningar med ej alltför stor skrovlighet

användes ofta i Langs formel Dupuits värde på f, dvs. f = 0,03.

En formel, som också är mycket använd vid beräkning av friktionsförluster i rörledningar, är den förut omnämnda Gauckler-Hagen-Stricklers formel

$$\bar{v} = C \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \tag{6.9.5}$$

Då $h_f = I \cdot l$ eller $I = \frac{h_f}{l}$ fås

$$\bar{v} = C \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{h_f}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Kvadrering ger $\bar{v}^2 = C^2 \cdot R_h^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{h_f}{l}$ eller

$$h_f = \frac{\bar{v}^2 \cdot l}{C^2 \cdot R_h^{\frac{4}{3}}} \tag{6.9.6}$$

Då $h_f = I \cdot l = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g} = f \cdot \frac{l}{4 R_h} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$

fås

$$h_f = \frac{\bar{v}^2 \cdot l}{C^2 \cdot R_h^{\frac{4}{3}}} = f \cdot \frac{l}{4 R_h} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

Förkortning ger $8g = C^2 \cdot R_h^{\frac{1}{3}} \cdot f$ och till slut

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f \cdot R_h^{\frac{1}{3}}}} \tag{6.9.7}$$

Utredningen ovan visar, att Gauckler-Hagen-Stricklers formel förutsätter, att för en viss given ledning är C konstant och oberoende av Re. Formeln gäller därför endast inom området för full turbulens.

Det senare medför att för skrovliga rör måste dimensionen i allmänhet vara större än 100-200 mm och för någorlunda glatta rör större än 200-300 mm vid vattenhastigheten 0,5-2,0 m/sek för att formeln strikt skall kunna tillämpas.

Värdet på C i Gauckler-Hagen-Stricklers formel gällande rörledningar

	C	C
	Grov yta	Slät yta
Gjutjärnsrör, nya, obehandlade	70	90
Gjutjärnsrör med rost	65	75
Gjutjärnsrör asfalterade	95	95
Glaserade lerrör	60	90

Yarnell-Woodward bestämde C för tegel- och betongrör och fanna värdet 93.

Potensformler för cirkulära ledningar härledda ur vattenföringen

I och med den alltmera tilltagande användningen av plaströr har ett flertal jämförelser gjorts mellan deras vattenförande förmåga och tegel- och betongrörens. Detta har resulterat i formler av typen

$$q = C \cdot d^a \cdot I^b$$

Svårigheten vid användningen av dessa är att de strikt endast gäller under de förutsättningar som jämförelsen gjorts och inom ett begränsat område av f-Re diagrammet.

6.10 Särskilda motstånd i slutna ledningar

Behandlingen av strömning i slutna ledningar har hittills ägnats åt de friktionsförluster, som uppkommer vid likformig strömning på längre sträckor i raka rörledningar.

I rörelement som rörkrökar, tvärsnittsförändringar, kranar, ventiler o. dyl. uppkommer i allmänhet en olikformig strömning och de förluster, som uppträder är i högre grad beroende av tröghetskrafter än av inre friktion.

De uppkomna förlusterna härrör i allmänhet från virvelbildning. Förluster genom virvlar har, som förut anförts, visat sig vara ungefär proportionella mot medelhastighetens kvadrat.

Förlusthöjden i ett rakt rör är enligt det föregående

$$h_f = f \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Införes beteckningen $f \cdot \frac{1}{d} = K$ kan vi skriva

$$h_f = K \cdot \frac{\bar{v}^{-2}}{2g} \quad 6.10.1$$

där $K =$ motståndskoefficienten (dimensionslös)

Vi kan således hänföra alla förluster till hastighetshöjden $\frac{\bar{v}^{-2}}{2g}$ och vi erhåller

$$h_f = \sum K \frac{\bar{v}^{-2}}{2g} \quad 6.10.2$$

Med \bar{v} menas medelhastigheten bortom ifrågavarande rörelement.

Den uppkomna tryckförlusten uttrycks ofta i ekvivalent rörlängd.

Beräkning av totala tryckhöjden för rörledning

Vi utgår från Bernoullis ekv. med förlustterm dvs.

$$\frac{\bar{v}_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_f$$

eller

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = \frac{\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2}{2g} + h_f$$

$(p_1 - p_2)/\rho g$ anger tryckhöjdsskillnaden i m vpmellan två punkter i ledningen; $z_1 - z_2$ den geometriska höjdskillnaden mellan samma punkter.

Vi sätter summan av dessa differenser lika med $H =$ totala tryckhöjden

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = H = \frac{\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2}{2g} + h_f$$

Om, som ofta är fallet, $\bar{v}_1 = 0$ och utbytes \bar{v}_2 mot \bar{v} blir

$$H = \frac{\bar{v}^{-2}}{2g} + h_f \quad 6.10.3$$

där förlusthöjden h_f enligt ekv. 6.10.2 kan skrivas som en funktion av $\frac{\bar{v}^{-2}}{2g}$ eller

$$H = \frac{\bar{v}^2}{2g} + \sum K \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

dvs.

$$H = \frac{\bar{v}^2}{2g} (1 + \sum K) \quad 6.10.4$$

6.11 Inloppsförluster i brotrummor

Vid inströmning i brotrummor blir ofta energiförlusterna stora.

Antar vi, att motståndet vid själva inströmningen är e och dessutom att förlusterna vid genomströmningen är $f \cdot l/d \cdot \bar{v}^2/2g$ så gäller om tillströmningshastigheten kan försummas

$$h_f = \frac{\bar{v}^2}{2g} \left(1 + e + f \frac{l}{d}\right) \quad 6.11.1$$

Löses \bar{v} ur ekv. 6.11.1 fås

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2g h_f}{1 + e + f \frac{l}{d}}} \quad 6.11.2$$

Formeln är härledd av Weisbach.

Enligt Weisbach kan e sättas lika med 0,505.

Ett uttryck för f har givits av Darcy till

$$f = 0,02 + \frac{0,005}{d} \quad 6.11.3$$

7. Ideala vätskors och gasers strömning

7.1 Fordringar på ideala vätskors och gasers strömning

En ideal vätska eller gas måste satisfiera följande krav.

1. Kontinuitetsekvationen, avsnitt 4.5.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{eller } \text{div } \vec{v} = 0 \text{ eller}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

2. Newtons andra lag skall gälla i varje punkt och i varje ögonblick.
3. Vätskan eller gasen måste helt ansluta till en fast gräns, dvs. inget glapprum mellan strömning och gräns får föreligga. Dock får ej gränsen överskridas.

Som tillägg till ovanstående göres antagandet om rotationsfrihet (virvlingfrihet). Den resulterande vätske- eller gasrörelsen är nära lik den verkliga rörelsen hos vätskor eller gaser med låg viskositet.

Kraven ovan leder, vid tillämpning av Newtons andra lag på en vätske- eller gaspartikel, till Eulers ekvation, som vid antagande av rotationsfrihet, kan integreras och i sin tur ge Bernoullis ekvation.

De okända faktorerna i en strömningssituation med givna gränser är då hastigheten och trycket i varje punkt.

Det är dock i de flesta fall omöjligt, att ur gränsförhållandena direkt kunna nå fram till ekvationer för hastighets- och tryckfördelningarna.

7.2 Vektoroperatorn $\vec{\nabla}$

Vid utveckling av teorien för ideala vätskors eller gasers strömning är den förut nämnda vektoroperatorn $\vec{\nabla}$ mycket användbar.

Denna kan verka på en vektor, som en skalär produkt eller vektorprodukt men även fås att verka på en skalär funktion.

Vi låter U vara den storhet som påverkas av operatorn. Då definieras $\vec{\nabla}U$ av uttrycket

$$\vec{\nabla} U = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\Lambda} \vec{n}_1 U \, dA \quad 7.2.1$$

U kan vara \vec{a} , $\nabla \cdot \vec{a}$ där \vec{a} är en godtycklig vektor, eller en skalär t.ex. Φ .

Vi studerar en liten volym V med ytan A och ett ytelement dA (fig. 7.1) \vec{n}_1 är en enhetsvektor i riktning av den utåt dragna normalen n mot ytelementet dA.

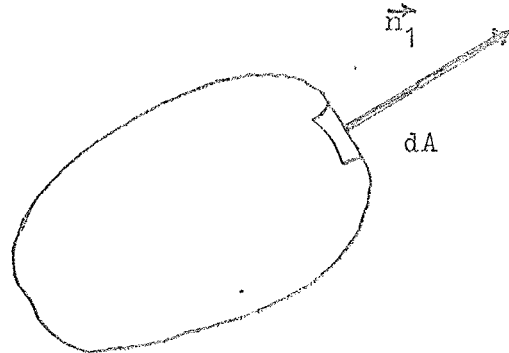


Fig. 7.1. Skiss av enhetsvektorn \vec{n}_1 i normalriktningen (utåt) till ytelementet dA.

Om U är en skalär, t.ex. Φ , definieras gradienten av Φ

$$\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_A \vec{n}_1 \Phi \, dA \quad 7.2.2$$

För att förklara grad Φ studerar vi ett volymselement i form av ett litet prisma med tvärsektionsarean dA och höjden dn, med ena ändytan i ytan: $\Phi(x, y, z) = \text{konst.}$, och den andra ändytan i ytan: $\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial n} dn = \text{konst.}$ (fig. 7.2)

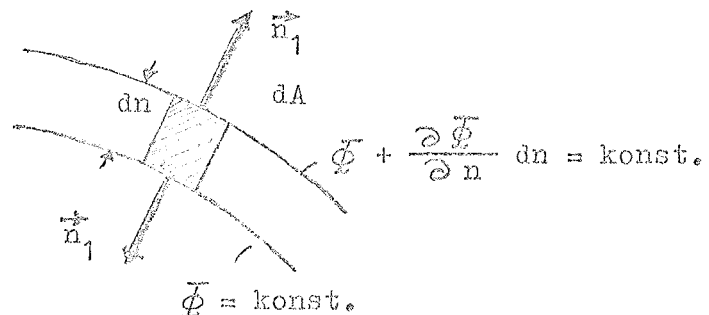


Fig. 7.2. Ytor av konstanta skalären Φ .

Eftersom det inte föreligger någon förändring i Φ i ytor parallella med ändytorna bortfaller, genom symmetrien, $\int \vec{n}_1 \Phi \, dA$ över elementets krökta ytor. Vi får

$$\int_{\Lambda} \vec{n}_1 \cdot \vec{\Phi} \, dA = \vec{n}_1 \cdot \left(\vec{\Phi} + \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} \, dn - \vec{\Phi} \right) dA = \vec{n}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} \, dn \, dA$$

och högra sidan av ekv. 7.2.2 blir

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{n}_1}{dA \, dn} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} \, dn \, dA = \vec{n}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n}$$

och

$$\text{grad } \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \vec{\Phi} = \vec{n}_1 \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} \quad 7.2.3$$

\vec{n}_1 är en enhetsvektor, dragen vinkelrätt mot ytan, där $\vec{\Phi}$ är konstant och positiv i riktning av ökande $\vec{\Phi}$.

Obs.: grad $\vec{\Phi}$ är en vektor.

Genom att låta U bilda en skalär produkt med $\vec{\nabla}$ fås den s.k. divergensen. Vi sätter U lika med \vec{v} ; då blir

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{n}_1 \cdot \vec{v} \, ds \quad 7.2.4$$

Detta uttryck har använts - i något annorlunda form - vid härledning av den allmänna kontinuitetsekvationen i avsnitt 4.5.

Divergensen anger volymflödet per volymenhet i en punkt och är en skalär.

Rot $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ är ett mera invecklat begrepp, som behandlar ett vätske- eller gaselements virvling eller rotation.

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\Lambda} \vec{n}_1 \times \vec{v} \, dA \quad 7.2.5$$

$\vec{n}_1 \times \vec{v}$ är, vilket framgår av fig. 7.3, hastighetskomponenten i tangentens riktning till ytelementet dA i en punkt, eftersom vektorprodukten är en vektor vinkelrät mot de två konstituerande vektorernas plan. Storleken är $v \sin \theta$ eftersom $n_1 = 1$.

Då är alltså $\vec{n}_1 \times \vec{v} \, dA$ en elementvektor, som bildar produkten av den tangentiella hastigheten och ett ytelement.

Summering över ytan och sedan division med volymen ger i limes, då

$\vec{v} \rightarrow 0$, $\text{rot } \vec{v}$ i en punkt.

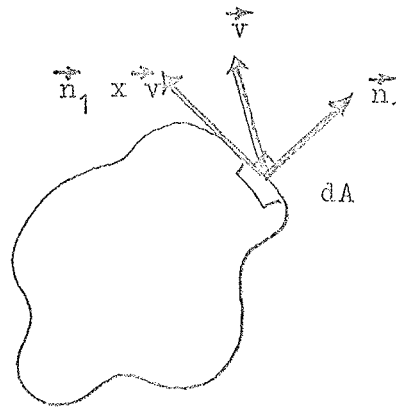


Fig. 7.3. Skiss visande vektorerna vid rotationen av hastighetsvektorn.

Vi undersöker en speciell typ av rörelse, för att demonstrera sambandet mellan $\text{rot } \vec{v}$ och virvlingen.

En liten cirkulär cylinder av vätska eller gas förutsättes rotera kring sin axel som om den vore en fast kropp (fig. 7.4), med vinkelhastigheten $\vec{\omega}$, som är en vektor parallell med rotationsaxeln.

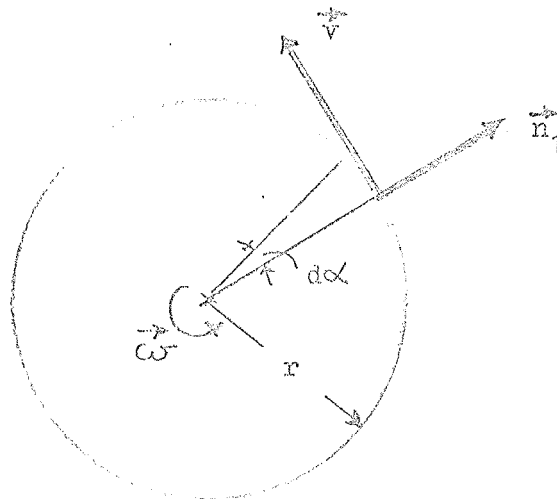


Fig. 7.4. Liten vätske- eller gascylinder roterande som en fast kropp.

Cylinderns radie är r och längden l . $\vec{n}_1 \times \vec{v}$ är i varje punkt på cirkelytan en vektor parallell med axeln och med storleken $v = \omega r$.

Över ändytorna är vektorn $\vec{n}_1 \times \vec{v}$ lika stor och motsatt riktad i korresponderande punkter på varje ändyta och bidrar ej till $\text{rot } \vec{v}$. Då fås, eftersom $dA = l r d\alpha$.

$$\int_A \vec{n}_1 \times \vec{v} \, dA = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \vec{\omega} \cdot r \, l \, r \, d\alpha = \vec{\omega} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot l \cdot d\alpha = 2\pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \vec{\omega}$$

Ekvation 7.2.5 ger nu

$$\text{rot } \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2 l} 2\pi r^2 l \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

Uttrycket ovan visar, att för en roterande fast kropp är rot \vec{v} i en punkt två gånger så stor som rotationsvektorn $\vec{\omega}$.

Om man enbart betraktar förflyttningen av ett litet element, som rör sig likt en fast kropp, då är rot \vec{v} alltid noll. Eftersom varje rörelse hos stela kroppar är en kombination av förflyttning och rotation kan vi notera att rot \vec{v} alltid är två gånger så stor som rotationsvektorn $\vec{\omega}$.

En vätska eller en gas kan inte endast förflyttas och rotera, utan också deformeras.

Definitionen av rot \vec{v} tillämpas, och därför definieras en vätska eller en gas' rotation genom relationen

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad 7.2.6$$

Om $\vec{\omega} = 0$ i en viss del av vätska eller en gas beskrives rörelsen där som rotationsfri.

Operatorn $\vec{\nabla}$ verkar som en vektor, men måste appliceras på en skalär eller en vektor för att ha fysikalisk mening.

Skalära komponenter av vektorer och vektorsamband

Här följer en koncentrerad sammanfattning av skrivningen av viktiga skalära komponenter av vektorer och vektorsamband.

En godtycklig vektor uppdelas i det Cartesiska koordinatsystemet i tre komponenter längs respektive x, y och z-axeln. Komponenten är en skalär eftersom endast storlek och tecken är nödvändiga för att specificera den.

Vektorn kan uttryckas i termer av dess skalära komponenter genom användning av de fastlagda enhetsvektorerna \vec{i} , \vec{j} och \vec{k} , parallella med

x, y och z-axlarna respektive

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Enhetsvektorerna ger följande kombinationer (skalära produkter)

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

Vektorprodukterna blir

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Den skalära produkten av två vektorer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ är

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

Vektorprodukten av två vektorer $\vec{a} \times \vec{b}$ blir

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

Den kan lämpligen skrivas i determinantform efter utveckling längs 1:a raden

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

För att finna de skalära komponenterna till $\vec{\nabla} \Phi$ betraktar vi först $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \Phi$ (fig. 7.5) där \vec{a} är en godtycklig vektor. Ur ekvation 7.2.3 fås

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} = a \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

eftersom θ är vinkeln mellan \vec{a} och \vec{n}_1 (regeln för skalär produkt) och $n_1 = 1$.

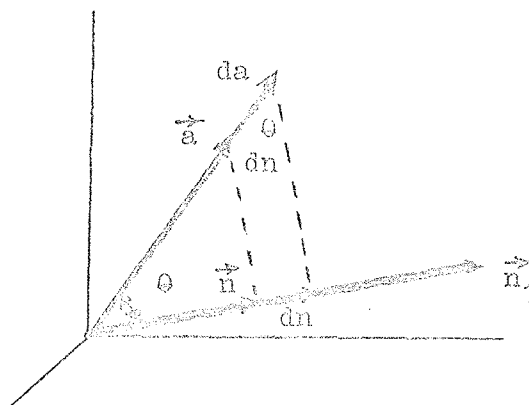


Fig. 7.5. Förändring av vektor \vec{a} med motsvarande förändring i normalens riktning.

En förändring i \vec{a} motsvarar en förändring i \vec{n} (se fig. 7.5) given av relationen $\cos \theta = dn/da$, varför

$$a \cos \theta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = a \frac{dn}{da} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = a \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a}$$

och

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \bar{\phi} = a \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial a} \quad 7.2.7$$

De skalära komponenterna av $\vec{\nabla} \bar{\phi}$ blir då

$$\vec{\nabla} \bar{\phi} \cdot \vec{i} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \quad \vec{\nabla} \bar{\phi} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \quad \vec{\nabla} \bar{\phi} \cdot \vec{k} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}$$

och

$$\vec{\nabla} \bar{\phi} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \vec{k} \quad 7.2.8$$

Operatorn $\vec{\nabla}$, i termer av dess skalära komponenter, är

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad 7.2.9$$

Den skalära produkten av $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ blir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) =$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad 7.2.10$$

Vektorprodukten $\vec{\nabla} \times \vec{v}$, i skalära komponenter, är

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad 7.2.11$$

Storheterna inom parenteserna är virvlingskomponenter, som är två gånger så stora som rotationskomponenterna ω_x , ω_y och ω_z , varför

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} \quad 7.2.12$$

7.3 Eulers rörelseekvation

I avsnitt 4.6 gavs en härledning av Eulers ekvation, för stationär strömning hos en friktionsfri vätska eller gas, längs en strömlinje.

Här tillämpar vi Newtons andra lag på en ideal vätska- eller gaspartikel med massan $\rho \, dV$. Tre termer kommer att ingå i relationen, nämligen uttryck för masskraften, för ytkraften och för massan gånger accelerationen (tröghetskraften).

Vi låter \vec{F} vara masskraften (t.ex. tyngdkraften) per massenhet, verkande på partikeln. Då blir $\vec{F} \rho \, dV$ masskraftsvektorn.

Ytkraften fås ur föregående avsnitt till $-\int_A \vec{n}_1 p \, dA$, om vätskan eller gasen är friktionsfri eller icke viskös, så att endast normalkrafter verkar.

Termen för massan gånger accelerationen blir $\rho \, dV \, \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Efter gruppering erhålles

$$\vec{F} \rho \, dV - \int_A \vec{n}_1 p \, dA = \rho \, dV \, \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Vi dividerar med elementets massa och får i limes, då $dV \rightarrow 0$

$$\vec{F} - \frac{1}{g} \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \int_{\Lambda} \vec{n}_1 p \, dA = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Vi inför operatören $\vec{\nabla}$ och erhåller då $\vec{\nabla} p = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \int_{\Lambda} \vec{n}_1 p \, dA$

$$\vec{F} - \frac{1}{g} \vec{\nabla} p = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad 7.3.1$$

Genom att bilda de skalära produkterna av varje term med \vec{i} , sedan \vec{j} och därefter \vec{k} fås följande skalära komponentekvationer.

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \quad 7.3.2$$

där X, Y och Z är masskraftskomponenterna per massenhet.

Accelerationstermerna kan utvecklas. I allmänhet är $v_x = v_x(x, y, z, t)$ varför vi kan bilda totala differentialen (se sid. 61-62 och appendix).

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt$$

Vi dividerar alla termerna i ekv. ovan med dt och får

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Men

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

varför

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad 7.3.3$$

På samma sätt fås

$$\frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad 7.3.4$$

$$\frac{dv_z}{dt} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad 7.3.5$$

Om den yttre kraften är konservativ, dvs. om kraftens storlek och riktning endast bestäms av läget, kan den härledas ur en potential ($\vec{F} = - \text{grad} \Omega$)

$$X = - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad Y = - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad Z = - \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad 7.3.6$$

Ekvationen ovan anger, att ett kraftfält är konservativt, om det finns en sådan funktion $\Omega(x, y, z)$, att kraftkomponenterna kan fås ur denna genom partiell derivering.

Minustecknet är godtyckligt. Det är en konvention att anta, att värdet på Ω minskar i kraftens riktning.

Speciellt gäller, om tyngdkraften är den enda verkande masskraften, att $\Omega = gh$ med h mätt vertikalt uppåt.

Då fås

$$X = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad Y = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad Z = -g \frac{\partial h}{\partial z} \quad 7.3.7$$

Eftersom ρ är konstant i en ideal vätska eller gas ger insättning av ekv. 7.3.3 och 7.3.7 i ekv. 7.3.2 efter hyfsning

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \rho g h) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad 7.3.8$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho + \rho g h) = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad 7.3.9$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho + \rho g h) = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad 7.3.10$$

Som redan påpekats i avsnitt 3.1 sid. 68 anger de tre första termerna den "konvektiva" accelerationen, beroende på förändringar av hastigheten med läget.

Den sista termen i varje ekvation anger den "lokala" accelerationen, beroende på hastighetsförändringen med tiden i en punkt.

Naturliga koordinater i tvådimensionell strömning

Eulers ekvationer i två dimensioner fås genom att i ekvationerna ovan sätta $v_z = 0$ och $\partial/\partial z = 0$. Således

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \rho g h) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad 7.3.11$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho + \rho g h) = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad 7.3.12$$

Genom införandet av speciella riktningar för x- och y-axlarna kan ekvationerna ovan ges en mera lättförståelig form.

Om x-axeln, benämnd s-axeln, lägges parallell med hastighetsvektorn i en punkt (se fig. 7.6) blir x-axeln tangent till strömlinjen genom punkten. y-axeln, kallad n-axeln, dras mot strömlinjens kurvcentrum. Hastighetskomponenten v_x blir v_s och komponenten v_y blir v_n . Eftersom v_n är noll i punkten får ekv. 7.3.11 formen

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (\rho + \rho g h) = v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial t} \quad 7.3.13$$

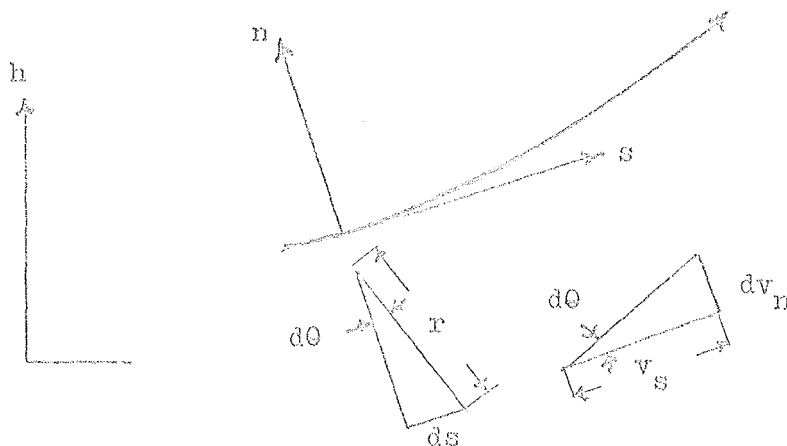


Fig. 7.6. Rörelse i ett naturligt koordinatsystem.

Även om v_n är noll i punkten (s, n) är dess förändring med avseende på s och t inte nödvändigtvis noll. Ekv. 7.3.12 blir då

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (\rho + \rho g h) = v_s \frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad 7.3.14$$

Betraktar vi hastigheten vid s och vid $s + ds$ längs strömlinjen, ändrar

sig v_n från noll till dv_n . Om nu r är strömlinjens kurvradie i s , fås ur likformiga trianglar (fig. 7.6)

$$\frac{ds}{r} = \frac{dv_n}{v_s} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial v_n}{\partial s} = \frac{v_s}{r}$$

Vi substituerar i ekv. 7.3.14 och erhåller

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho g h) = \frac{v_s^2}{r} + \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad 7.3.15$$

För stationär strömning i en inkompressibel vätska eller gas (tidsderivatorna = 0) kan ekv. 7.3.13 och 7.3.15 skrivas respektive

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho g h) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_s^2}{2} \right) \quad 7.3.16$$

och

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (p + \rho g h) = \frac{v_s^2}{r} \quad 7.3.17$$

Ekv. 7.3.16 kan integreras med avseende på s varvid fås ekv. 4.9.1 sid. 101 (Bernoullis ekvation) eller

$$\frac{v_s^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g h = \text{konst.}$$

Integrationskonstanten varierar med n , dvs. från strömlinje till strömlinje.

Ekvation 7.3.17 visar hur trycket varierar tvärs strömlinjerna. Är v_s och r kända funktioner av n kan ekvationen integreras.

Exempel 7.1. En behållare med vätska roterar med vinkelhastigheten kring en axel som en fast kropp. Bestäm hur trycket varierar inne i vätskan.

Lösning: Vi använder ekv. 7.3.17 eller

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (p + \rho g h) = \frac{v_s^2}{r}$$

Här är n den radiala distansen mätt inåt. Alltså: $n = -r$ och följaktligen $dn = -dr$. $v_s = \omega r$. Vi kan då skriva

$$-\frac{1}{\rho} \int d(p + \rho g h) = - \int \frac{\omega^2 r^2}{r} dr$$

eller

$$-\frac{1}{\rho} (p + \rho g h) = - \int \omega^2 r dr + C$$

som ger

$$\frac{1}{\rho} (p + \rho g h) = \frac{\omega^2 r^2}{2} + C$$

Om $p = p_0$ när $r = 0$ och $h = 0$ fås $C = \frac{p_0}{\rho}$. Vi kan skriva

$$p = p_0 - \rho g h + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

Ekv. ovan visar, att trycket är hydrostatiskt längs en vertikallinje och ökar med kvadraten på radien.

7.4 Rotationsfri strömning. Hastighetspotentialen

Storleken av ett vätske- eller gaselements rotation (vridning) kring z -axeln per tidsenhet kan uttryckas i termer av hastighetskomponenterna v_x och v_y och deras förändringar i x - och y -riktningarna, som framgår av fig. 7.7.

Med rörelsen motsols som positiv, finner vi att rotationen per tidsenhet hos elementets dx -sida är

$$\frac{v_y + (\partial v_y / \partial x) dx - v_y}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad 7.4.1$$

För dy -sidan fås

$$-\frac{(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy) + v_x}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad 7.4.2$$

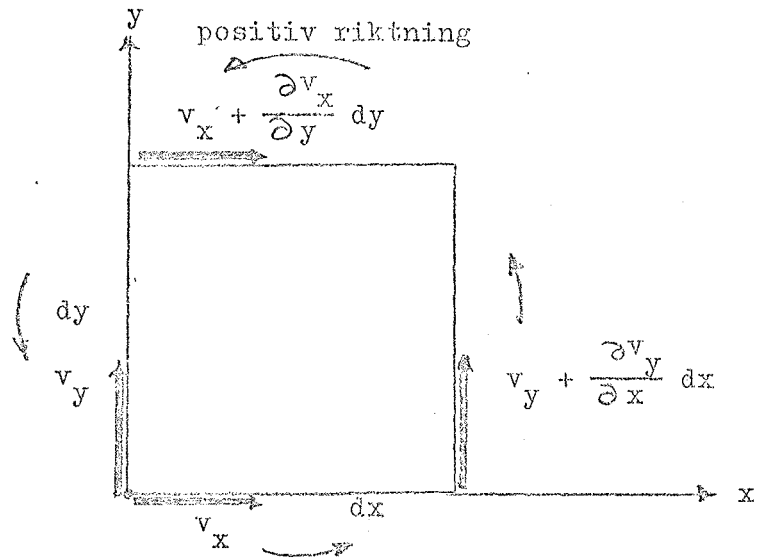


Fig. 7.7. Definitionsdiagram för beräkning av vridningen för ett vätske- eller gaselement.

Ett vätske- eller gaselements nettorotation kring z-axeln per tidsenhet blir medeltalet av summan av rotationen för dx- och dy-sidorna. Alltså

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

På samma sätt

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad 7.4.3$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

Resultterande rotationsvektorn är, som vi visat i ekv. 7.2.6 sid. 189,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \quad 7.4.4$$

med storleken

$$|\omega| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

En rotationsfri strömning definieras såsom varande sådan, att rotationskomponenterna $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Därav följer att $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ och

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad 7.4.5$$

Den första ekvationen ovan anger villkoret för rotationsfrihet vid tvådimensionell strömning.

Den anger också villkoret, att det differentiella uttrycket

$$v_x dx + v_y dy$$

är en total differential. Det framgår av följande utredning. Vi sätter

$$v_x dx + v_y dy = -d\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy \quad 7.4.6$$

Senare delen av ekv. 7.4.6 är det matematiska uttrycket för en total differential. Minustecknet är godtyckligt; det är en konvention, att definiera den strömningsriktning positiv i vilken värdet på Φ minskar.

Vi jämför termerna i ekv. 7.4.6 och får att

$$v_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad \text{och} \quad v_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

Ovanstående visar närvaron i tvådimensionell strömning av en funktion sådan att dess negativa derivata med avseende på en godtycklig riktning är lika med hastighetskomponenten i riktningen ifråga. Detta kan också visas för tredimensionell strömning. Uttryckt i vektorform

$$\vec{v} = -\text{grad } \Phi = -\vec{\nabla} \Phi \quad 7.4.7$$

Eftersom den negativa gradienten av Φ är lika med hastighetsvektorn \vec{v} är Φ känd som hastighetspotentialen och rotationsfri strömning benämnes ofta potentialströmning.

Både kompressibla eller inkompressibla vätskor eller gaser kan vara i rotationsfri rörelse och en potentialfunktion existerar i endera fallet.

Vi kan också skriva

$$v_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad v_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad v_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad 7.4.8$$

Antagandet om en hastighetspotential är liktydigt med antagandet om rotationsfri strömning, eftersom

$$\text{rot} (-\text{grad } \bar{\phi}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \bar{\phi} = 0 \tag{7.4.9}$$

då $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = \vec{0}$. Detta kan visas av ekv. 7.4.8 genom differentiering. Vi får att

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y \partial x}$$

som anger att $\partial v_y / \partial x = \partial v_x / \partial y$ osv.

Substitution av ekvationerna 7.4.8 i kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

ger

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \tag{7.4.10}$$

I vektorform skrives ekv. 7.4.10

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \bar{\phi} = -\nabla^2 \bar{\phi} = 0 \tag{7.4.11}$$

Detta är Laplace's ekvation, och ∇^2 benämnes Laplace's operator.

7.5 Bernoullis ekvation för rotationsfri strömning

Ekvation 7.3.8 kan omformas, så att varje term innehåller en partiell derivata med avseende på x. Från ekvationerna 7.4.5 får vi

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_y^2}{2} \right); \quad v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_z^2}{2} \right)$$

och från ekv. 7.4.8

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}$$

Vi substituerar med ovanstående uttryck i ekv. 7.3.8 och omgrupperar

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right) + \frac{p}{\rho} + g h = 0$$

Eftersom $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ fås

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g h - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad 7.5.1$$

På samma sätt erhålles för y- och z-riktningarna

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g h - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad 7.5.2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g h - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad 7.5.3$$

Uttrycken inom parenteserna är desamma i alla tre ekvationerna ovan.

Ekv. 7.5.1 anger att parentesuttrycket ej är en funktion av x eftersom derivatan med avseende på x är noll. På samma sätt visar de andra ekvationerna att respektive uttryck ej är funktioner av y och z. Därför kan uttrycket endast vara funktion av t, eller

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g h - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t) \quad 7.5.4$$

Vid stationär strömning är $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ och $F(t)$ blir en konstant E

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g h = E \quad 7.5.5$$

Den tillgängliga energien är överallt konstant i mediet. Detta är Bernoullis ekvation för en rotationsfri vätska eller gas.

Trycktermen kan delas i två delar; det hydrostatiska trycket p_s och det dynamiska trycket p_d , så att $p = p_s + p_d$.

Insättning i ekv. 7.5.5 ger

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_s}{\rho} + \frac{p_d}{\rho} + g h = E$$

Termerna $\frac{p_s}{\rho} + g h$ kan skrivas

$$\frac{p_s}{\rho} + g h = \frac{1}{\rho} (p_s + \rho g h)$$

där h är mätt vertikalt uppåt. Uttrycket är en konstant eftersom den anger variationerna i trycket enligt den hydrostatiska trycklagen. Dessa två termer kan då inkluderas i konstanten E . Då fås till slut

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_d}{\rho} = E \quad 7.5.6$$

Ur ekvationen ovan kan variationen i det dynamiska trycket bestämmas om hastigheten är känd och vice versa.

Antar vi, att både hastigheten v_0 och det dynamiska trycket p_0 är kända i en punkt har vi att

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_d}{\rho}$$

eller

$$p_d = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \quad 7.5.7$$

7.6 Strömfunktionen. Gränsvillkor

Strömfunktionen ψ

En annan betydelsefull funktion, den s.k. strömfunktionen ψ kan definieras för ett godtyckligt tvådimensionellt strömningsfält likgiltigt om strömningen är rotationsfri och inkompressibel eller ej. Här kommer vi dock att begränsa oss till stationär inkompressibel strömning.

I en tvådimensionell strömning är linjerna för konstanta ψ strömlinjer och skillnaden mellan de numeriska värdena på två strömlinjer är lika med den framströmmande mängden per tidsenhet mellan de två strömlinjerna.

Den fysikaliska betydelsen av strömfunktionen framgår av fig. 7.8.

Följer vi en väg från (1) till (2) mellan ψ_1 och ψ_2 antas strömningen vara positiv från höger till vänster.

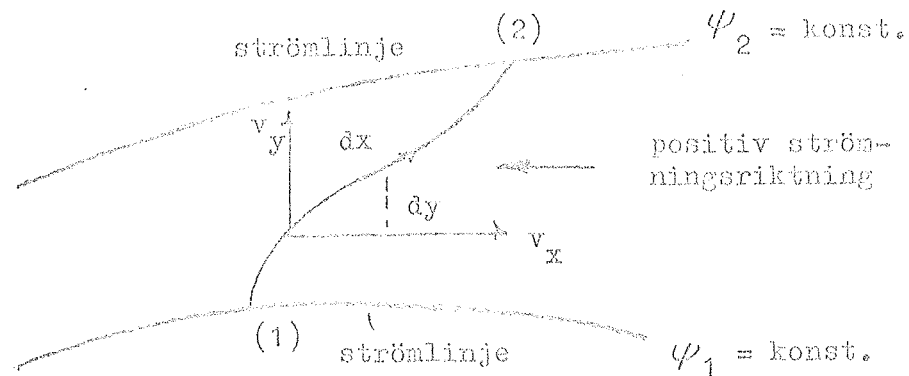


Fig. 7.6. Strömlinjerna och strömfunktionen ψ vid tvådimensionell, stationär strömning.

Den framströmmande mängden per tidsenhet mellan ψ_1 och ψ_2 (positiv från höger mot vänster) blir

$$q_{1-2} = \int_1^2 (v_y dx - v_x dy) = \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right)$$

Uttrycket innanför integralecknet anger en total integral $= d\psi$.
Alltså

$$q_{1-2} = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad 7.6.1$$

Integralen ovan är oberoende av vägen så länge som den ansluter till de två strömlinjerna.

ψ definieras således i termer av v i Cartesiska koordinater som

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad 7.6.2$$

För tvådimensionell strömning har vi från villkoren för rotationsfrihet det redan på sidan 204 införda uttrycket $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, dvs. $\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y = 0$. Detta kombinerat med definitionen på ψ ger för en godtycklig tvådimensionell inkompressibel potentialströmning

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Kombination av ekv. 7.6.1 med 7.4.8 ger också

$$v_x = - \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \quad 7.6.3$$

Uttrycken i 7.6.3 är kända som Cauchy-Riemanns ekvationer.

En annan viktig följd av att $\bar{\phi}$ och ψ satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer är, att linjer med konstanta $\bar{\phi}$ och ψ är ortogonala, dvs. skär varandra under rätta vinklar.

Vi åskådliggör detta genom att visa att

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\bar{\phi} = \text{konst.}} = - \left. \frac{dx}{dy} \right|_{\psi = \text{konst.}}$$

Längs en linje med konstant $\bar{\phi}$ är

$$d\bar{\phi} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dy = 0 = -v_x dx - v_y dy$$

och längs en linje med konstant ψ är

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 = v_y dx - v_x dy$$

varför vi får från $d\bar{\phi} = 0$, $dy/dx = -v_x/v_y$ och från $d\psi = 0$ $dy/dx = v_y/v_x$ och således

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\bar{\phi} = \text{konst.}} = - \left. \frac{dx}{dy} \right|_{\psi = \text{konst.}} \quad 7.6.4$$

vilket är det matematiska uttrycket för att konstanta $\bar{\phi}$ -linjer och konstanta ψ -linjer bildar ett ortogonalt nätverk.

Eftersom dessa linjer är vinkelräta mot varandra och satisfierar samma differentialekvationer, kan $\bar{\phi}$ och ψ växla med varandra för att representera olika strömningar.

Gränsvillkor

Fig. 7.9 anger, att hastighetskomponenten vinkelrätt mot en gräns måste vara lika med noll i varje punkt av gränsen.

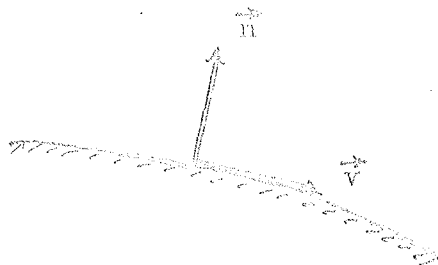


Fig. 7.9. Vektorbeteckningar vid en fast gränsyta.

Vi har också enligt figuren att skalära produkten

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad 7.6.5$$

där \vec{n} är en enhetsvektor vinkelrät mot gränsytan. Med skalära beteckningar får vi detta uttryckt i termer av hastighetspotentialen eller

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad 7.6.6$$

i alla punkter av gränsen.

För en rörlig gräns (fig. 7.10), där gränsen har hastigheten \vec{v}_g , måste hastighetskomponenten vinkelrät mot gränsen vara lika stor som gränsens hastighet vinkelrät mot sig själv, dvs.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_g \cdot \vec{n} \quad 7.6.7$$

Omskrivning ger

$$(\vec{v} - \vec{v}_g) \cdot \vec{n} = 0 \quad 7.6.8$$

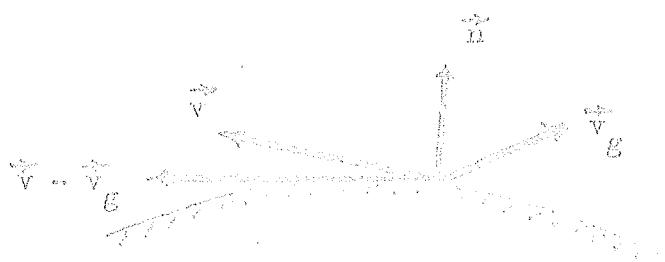


Fig. 7.10. Vektorbeteckningar vid en rörlig gränsyta.

7.7 Strömfältet

linjen given av $\phi(x, y) = \text{konst.}$ kallas en ekvipotentielllinje. Här

en dylik linje ändras ej hastighetspotentialen $\bar{\phi}$.

Eftersom hastigheten v_s i en godtycklig riktning s kan skrivas

$$v_s = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\phi}}{\Delta s}$$

där $\Delta \bar{\phi}$ är lika med noll för två närbelägna punkter på en ekvipotentiallinje, har hastighetsvektorn ingen komponent i den riktning, som definieras av en linje genom de två punkterna.

I limes, då $\Delta s \rightarrow 0$, visar detta, att det finns ingen hastighetskomponent, som är tangent till en ekvipotentiallinje.

Därför måste hastighetsvektorn överallt vara vinkelrät mot en ekvipotentiallinje (utom i singularära punkter, där hastigheten är noll eller obestämbar).

Linjen $\psi(x, y) = \text{konst.}$ anger en strömlinje, som överallt är tangent till hastighetsvektorn. Detta innebär, vilket vi redan visat på sid. 210, att strömlinjer och ekvipotentiallinjer är ortogonala, dvs. skära varandra under räta vinklar. Undantag inträffar, som ovan påpekats, i singularära punkter.

Ett strömrät är sammansatt av en familj av ekvipotentiallinjer och en motsvarande familj av strömlinjer med konstanterna varierande i aritmetisk progression. Det är brukligt, att låta förändringen i konstant mellan närliggande ekvipotentiallinjer och närliggande strömlinjer vara densamma, t.ex. Δc .

Ur fig. 7.11 kan man få den approximativa hastigheten v_n i termer av avståndet mellan ekvipotentiallinjerna och korresponderande avstånd mellan strömlinjerna.

Är avståndet mellan strömlinjerna Δn och motsvarande mellan ekvipotentiallinjerna Δc i ett litet område erhålles med hjälp av strömlinjerna

$$v_n \approx \frac{\Delta \psi}{\Delta n} = \frac{\Delta c}{\Delta n} \quad (\text{ekv. 7.4.8})$$

och med hjälp av ekvipotentiallinjerna

$$v_s \approx - \frac{\Delta \bar{\phi}}{\Delta s} = - \frac{-\Delta c}{\Delta s} = \frac{\Delta c}{\Delta s} \quad (\text{ekv. 7.6.2})$$

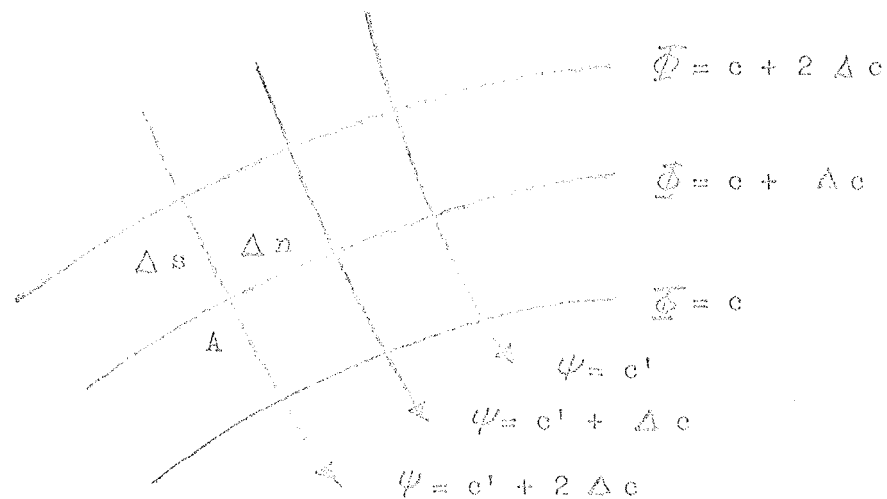


Fig. 7.11. Skiss av ett strömnät.

Dessa uttryck är approximativa, då Δc har bestämd storlek. I limes, när Δc blir oändligt litet, är uttrycken exakta och ger hastigheten i en punkt.

Eftersom båda de använda hastigheterna är lika, visar ekvationerna, att $\Delta s = \Delta n$, dvs. att strömnätet består av ett ortogonalt nät, vilket i limes kommer att bestå av kvadrater, då nätstorleken närmar sig noll.

Ofta är användningen av strömnätet den enda möjliga utvägen vid lösandet av strömningsproblemet.

Vid stationär strömning med fasta gränser kommer de senare att ingå i strömnätet som strömlinjer.

Problemet att upprätta ett strömnät med givna fasta gränser kan uppfattas som en grafisk upprätt, dvs. konstruktionen av ett ortogonalt nät till inre gränserna, vilket vid ständigt ökande antal linjer till slut i limes kommer att bestå av kvadrater. Detta är en av de praktiska metoder, som används i tvådimensionell strömningsanalys.

En annan är den s.k. "spänningstekniken". Den senare är speciellt lämpad för beräkningar med datormaskin.

Eller det kan tyckas konstruera ett strömnät till en given geometri.

figuration kan detta användas för alla rotationsfria strömningar med geometriskt liknande gränser. Det är nödvändigt att känna hastigheten och dynamiska trycket i en enskild punkt, för att kunna bestämma hastigheten i varje annan punkt.

Tillämpningen av Bernoullis ekvation (ekv. 7.5.7 sid. 208) ger det dynamiska trycket.

Om hastigheten är känd t.ex. i A i fig. 7.11 kan Δn och Δs fås ur närliggande linjer. Då är $\Delta c \cong \Delta n v_s \cong \Delta s v_s$. Med konstanten c bestämd för hela rutnätet ger uppmätning av Δs eller Δn i en godtycklig punkt möjlighet till bestämning av hastigheten där.

$$v_s \approx \frac{\Delta c}{\Delta s} = \frac{\Delta c}{\Delta n}$$

De begrepp, som ligger till grund för strömnätet har utvecklats för rotationsfri strömning hos en ideal vätska eller gas. På grund av likheten i de ekvationer, som beskriver grundvattenströmning och rotationsfri strömning kan strömnätet också användas för att bestämma strömlinjer och linjer för konstant piezometrisk tryckhöjd ($p/g + h$) vid perkolations genom homogena porösa media.

Förteckning över utkomna häften i serien STENCILTRYCK

- Nr 1 Håkansson, A. 1952. Redogörelse för resultaten av 1951 års täckdikningsförsök. 71 sid.
- Nr 2 Håkansson, A. 1953. Redogörelse för resultaten av 1952 års täckdikningsförsök. 64 sid.
- Nr 3 Håkansson, A. 1954. Redogörelse för resultaten av 1953 års täckdikningsförsök. 84 sid.
- Nr 4 Berglund, G. & Eriksson, J. 1955. Redogörelse för resultaten av 1954 års täckdikningsförsök. 97 sid.
- Nr 5 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1956. Redogörelse för resultaten av 1955 års täckdikningsförsök. 59 sid.
- Nr 6 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1957. Redogörelse för resultaten av 1956 års täckdikningsförsök. 66 sid.
- Nr 7 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1958. Redogörelse för resultaten av 1957 års täckdikningsförsök. 56 sid.
- Nr 8 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1959. Redogörelse för resultaten av 1958 års täckdikningsförsök. 66 sid.
- Nr 9 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1960. Redogörelse för resultaten av 1959 års täckdikningsförsök. 70 sid.
- Nr 10 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1961. Redogörelse för resultaten av 1960 års täckdikningsförsök. 53 sid.
- Nr 11 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1962. Redogörelse för resultaten av 1961 års täckdikningsförsök. 59 sid.
- Nr 12 Håkansson, A., Berglund, G. & Eriksson, J. 1963. Redogörelse för resultaten av 1962 års täckdikningsförsök. 57 sid.
- Nr 13 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1964. Resultat av 1963 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 63 sid.
- Nr 14 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1965. Resultat av 1964 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 75 sid.
- Nr 15 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1966. Resultat av 1965 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 82 sid.
- Nr 16 Hallgren, G. 1940. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; Några hydrografiska och hydrotekniska studier. 30 sid.
- Nr 17 Hallgren, G. 1942. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient. 27 sid.
- Nr 18 Hallgren, G. 1943. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning. 161 sid.
- Nr 19 Andersson, S. 1952. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydroteknik. 162 sid.
- Nr 20 Andersson, S. 1952. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller med kommentarer och exempel till Kompendium i elementär hydroteknik. 22 sid.
- Nr 21 Andersson, S. 1960. Kapillariet. 115 sid.
- Nr 22 Andersson, S. 1961. Markens temperatur och värmeinhållande. 25 sid.

- Nr 23 Johansson, W. 1962. Bevattningsförsök i potatis, korn och foderbetor vid Tömnersa försöksgård 1959-1961. 13 sid.
- Nr 24 Johansson, W. 1962. Metodik och erfarenheter vid användning av hålkort för undersökning av torrlägningsförhållanden och ytsänkning vid Nedre Olandsån. 10 sid.
- Nr 25 Johansson, W. 1962. Utredning för förslag till bevattningsanläggning vid Sör Salbo, Salbohed, Västmanlands län. 9 sid.
- Nr 26 Andersson, S. 1963. Skrivningar i agronomisk hydroteknik. 50 sid.
- Nr 27 Berglund, G. & Sjöberg, S. 1964. Undersökning av plaströrsdikningar. 15 sid.
- Nr 28 Håkansson, A. 1964. Anvisning rörande täckdikning med plaströr av styv PVC. 5 sid.
- Nr 29 Berglund, G. 1966. Vattendragsförbundet: Förslag till överenskommelse och stadgar samt något om kostnadsfördelningar. 19 sid.
- Nr 30 Fahlstedt, T. 1966. Kvismaredalsprojektet -- en orientering samt Redogörelse för undersökning i syfte att klargöra avkastningens beroende av högvattenståndet i Kvismare kanal. 29 sid.
- Nr 31 Hallgren, G. 1966. Vattenrätt. 77 sid.
- Nr 32 Brink, N. 1966. Hydrologi. 17 sid.
- Nr 33 Jonsson, Y. 1967. Ytplanering med planersladd. 36 sid.
- Nr 34 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1967. Resultat av 1966 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 85 sid.
- Nr 35 Nitsch, U. 1967. Om östersjövattnets användbarhet för bevattningsändamål. 35 sid.
- Nr 36 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G. & Eriksson, J. 1968. Resultat av 1967 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 96 sid.
- Nr 37 Brink, N. 1968. Ansvarsfördelningen vid underhåll av vattendrag inom Sagåns vattensystem. 10 sid.
- Nr 38 Håkansson, A., Johansson, W. & Fahlstedt. 1968. Nederbördens storlek och fördelning. En detaljstudie av nederbördsdata från 16 nederbördsstationer. 175 sid.
- Nr 39 Berglund, G. 1968. Om genomsläppligheten i återfyllning och rörfogar. 14 sid.
- Nr 40 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1969. Resultat av 1968 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 83 sid.
- Nr 41 Brink, N. 1969. Kväve och fosfor i Sävjeån. 10 sid.
- Nr 42 Brink, N. 1969. Sagåns vatten. 33 sid.
- Nr 43 Johansson, W. 1970. Anvisningar för projektering och dimensionering av bevattningsanläggningar. 34 sid.
- Nr 44 Hallgren, G. 1970. Dränering av tommark, vägar, trädgårdar, kyrkogårdar, isrottplatser, flygfält m. m. 140 sid.
- Nr 45 Håkansson, A., Berglund, G., Eriksson, J. & Johansson, W. 1970. Resultat av 1969 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök. 73 sid.

- Nr 46 Berglund, G. 1971. Kalkens inverkan på jordens struktur. 10 sid.
- Nr 47 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G. & Eriksson, J. 1971. Resultat av 1970 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkförsök. 77 sid.
- Nr 48 Sandsborg, J. 1971. Exempelsamling i hydromekanic. 148 sid.
- Nr 49 Eriksson, J. 1971. Bevattning. Tropiskt jordbruk. 21 sid.
- Nr 50 Eriksson, J. 1971. Erosion. Tropiskt jordbruk. 27 sid.
- Nr 51 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G. & Eriksson, J. 1972. Resultat av 1971 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkningsförsök. 78 sid.
- Nr 52 Andersson, S. 1972. Agrohydrologi. Skrivningar för 5 poäng med svar, lösningar och kommentarer. 100 sid.
- Nr 53 Berglund, G. 1973. Försök med påskyndad snösmältning. 11 sid.
- Nr 54 Kristiansson, L. & Sundéll, G. 1973. Studier av arbetstiden för olika bevattningssystem. 81 sid.
- Nr 55 Andersson, P.-O. & Rydén, M. 1973. Studier av arbetstiden vid ändbogsring av spridarledning. 16 sid.
- Nr 56 Berglund, G. & Hofvendahl, G. 1973. Inventering av dämningmöjligheterna inom Sävjaåns avrinningsområde. 14 sid.
- Nr 57 Berglund, G. 1973. Slamavsättning i släta och i korrugerade dräneringsrör av plast. 25 sid.
- Nr 58 Bjerketorp, A. 1973. Envertikalmetoder med flyttar- eller flygelmätning för approximativ bestämning av flöde i små vattendrag. Preliminärt förslag. 86 sid.
- Nr 59 Bjerketorp, A. 1973. Fyra metoder för approximativ bestämning av flöde i små vattendrag genom mätning av vattenhastigheten i en enda vertikal. 2:a, översedda uppl. 20 sid.
- Nr 60 Bjerketorp, A. 1973. Några metoder för avkortad mätning och beräkning av flöde i små vattendrag. Del I: Avkortade metoder vid flygelmätning: Några allmänna förutsättningar för mätningens procedur och dess utvärdering. 32 sid.
- Nr 61 Andersson, Ö. & Bjerketorp, A. 1973. Vattenföringsmätning i små vattendrag med ytflyttare enligt en maximalskivhastighetsmetod. 7 sid.
- Nr 62 Håkansson, A., Johansson, W., Berglund, G., Linnér, H. & Eriksson, J. 1973. Resultat av 1972 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkningsförsök. 88 sid.
- Nr 63 Andersson, Ö. 1973. Underhåll av vattendrag. II: Maskiner och redskap för mekanisk vegetationsbekämpning och slamrensning. 44 sid.
- Nr 64 Eriksson, J. 1973. Undersökning av olika typer av filter vid dränering. 14 sid.
- Nr 65 Sandsborg, J. 1973. Korpendium i elementär hydroteknik. I: Hydrotekniska grundarna. 240 sid.

Denna skriftserie, benämnd Stenciltryck, utges av Avdelningen för lantbrukets hydroteknik vid Institutionen för markvetenskap, Lantbrukshögskolan. Serien utkommer i fri följd och innehåller undersökningsresultat och annat material, som avdelningen funnit angeläget att redovisa, men som av olika anledningar ej befunnits möjligt att framlägga i tryck, exempelvis i den från institutionen utgivna tidskriften Grundförbättring. Sådana anledningar kan vara att ett arbete är för omfångsrikt att trycka, är av mera preliminär natur eller vänder sig till en för liten grupp av läsare.

Serien finns tillgänglig vid avdelningen, och enskilda nummer kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Lantbrukshögskolan, Inst. för markvetenskap, Avd. för lantbrukets hydroteknik, 750 07 Uppsala 7.

Address: Agricultural College of Sweden, Dept. of Soil Science, Div. of Agr. Hydrotechnics, S-750 07 Uppsala 7, Sweden.