Agrohydrologi

Skrivningar för 5 poäng
med
svar, lösningar och kommentarer

av

Sigvard Andersson

STENCILTRYCK NR 52

INSTITUTIONEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK

UPPSALA 1972

Institutionen för lantbrukets hydroteknik delger bl. a. i sin tidskrift *Grundförbättring* resultat från institutionens olika verksamhetsgrenar. Allt material blir emellertid inte föremål för tryckning. Undersökningsresultat av preliminär natur och annat material som av olika anledningar ej ges ut i tryck delges ofta i stencilerad form. Institutionen har ansett det lämpligt att redovisa dylikt material i form av en i fri följd utarbetad serie, benämnd stenciltryck. Serien finns endast tillgänglig på institutionen och kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Institutionen för lantbrukets hydroteknik, *750 07 Uppsala 7*

Stenciltryck

Nr	År	Författare och titel
1—12		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Redogörelse för resultaten av täckdikningsförsöken åren 1951—1962.
13—15		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av täckdikningsförsök och bevattningsförsök åren 1963—1965.
16	1940	Gunnar Hallgren. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; några hydrotekniska studier.
17	1942	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient.
18	1943	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning.
19	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydromekanik.
20	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller och kommentarer.
21	1960	Sigvard Andersson. Kapillaritet.
22	1961	Sigvard Andersson. Markens temperatur och värmehushållning.
23	1962	Waldemar Johansson. Bevattningsförsök i potatis, korn och foderbetor vid Tönnersa försöksgård 1959—1961.
24	1962	Waldemar Johansson. Metodik och erfarenheter vid användning av hålkort för undersökning av torrläggningsförhållanden och ytsänkning vid Nedre Olandsån.
25	1962	Waldemar Johansson. Utredning för förslag till bevattningsanläggning vid Sör Salbo, Salbohed, Västmanlands län.
26	1963	Sigvard Andersson. Skrivningar i agronomisk hydroteknik.
27	1964	Gösta Berglund och Stig Sjöberg. Undersökning av plaströrstäckdikningar.
28	1964	Aug. Håkansson. Anvisning rörande täckdikning med plaströr av styv PVC.
29	1966	Gösta Berglund. Vattendragsförbundet: Förslag till överenskommelse och stadgar samt något om kostnadsfördelningar.
30	1966	Tryggve Fahlstedt. Kvismaredalsprojektet — en orientering samt Redogörelse för undersökning i syfte att klargöra avkastningens beroende av högvattenstånden i Kvismare kanal.
31	1966	Gunnar Hallgren. Vattenrätt.
32	1966	Nils Brink. Hydrologi.
33	1967	Yngve Jonsson, Ytplanering med planersladd.
34	1967	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1966 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök.
35	1967	Ulrich Nitsch. Om östersjövattnets användbarhet för bevattningsändamål.
36	1968	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1967 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök.
37	1968	Nils Brink. Ansvarsfördelningen vid underhåll av vattendrag inom Sagåns vattensystem.
38	1968	Aug. Håkansson, Waldemar Johansson, Tryggve Fahlstedt. Nederbördens storlek och fördelning.
39	1968	Gösta Berglund. Om genomsläppligheten i återfyllning och rörfogar.
40	1969	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1968 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök.

Forts. på omslagets tredje sida

Förord

Undervisningen i agronomisk hydroteknik har alltsedan ämnets tillkomst varit uppdelad på en grundläggande del och en tillämpad, teknisk-ekonomisk del. I samband med tidigare omorganisationer av undervisningen vid Lantbrukshögskolan har den grundläggande delen benämnts Agrohydrologi. Den kan också benämnas markfysik med särskild hänsyn till vattenomsättningen i jordarna.

Som stöd för undervisningen och studiet av Agrohydrologin utges härmed ett antal skrivningar i ämnet med svar, lösningar och kommentarer. Skrivningarna har kompletterats med ett antal blandade exempel, vilka också försetts med utförliga lösningar och svar. Samlingen omfattar ett hundratal exempel.

Frågorna och exemplen ligger i stort sett inom ramen för betyget fem poäng. En del av de exempel, som förekommer under rubriken: "Några blandade exempel med svar, lösningar och kommentarer" torde dock få betraktas som hörande till en överkurs. En liknande exempelsamling omfattande tiopoängskursen kommer också att utges.

En noggrann genomgång av dessa skrivningar och exempel bör kunna ge den studerande, som förbereder sig för tentamen, en god uppfattning om innehållet i ämnesdelen, dess problemtyper och frågeställningar.

För alla som är intresserade av jord och vatten - det ena dubbelparet i den gamla läran om elementen - kan detta arbete tjänstgöra som en rapport från ett fascinerande forskningsområde av central betydelse för de stora odlingsfrågorna: dränering, jordbearbetning och bevattning.

Uppsala i december 1972

Sigvard Andersson

Innehållsförteckning sid.

Skrivning i Lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Fredagen den 29 maj 1970

För 5 poäng

1. Hur många cm v.p. är 1 N/m^2 ?

2. Trycket p på en yta A definieras av funktionen

$$p = f(x)$$

där x kan uppfattas som en lägesvariabel.

Vilket uttryck gäller för tryckkraften F på hela ytan?

3. Beräkna med hjälp av de Chezys formel

$$v = C\sqrt{R_h I}$$

med C = 51, hur stor vattenmängd, som per sekund framrinner i en 60 cm betongledning vid fullgång, om I = 0,4:1000. R_h betecknar hydrauliska radien. Alla mått i meter och motsvarande!

4. Definiera de i nedanstående formel förekommande storheterna och härled formeln!

$$\gamma_t = (1 - \frac{n}{100})\rho$$

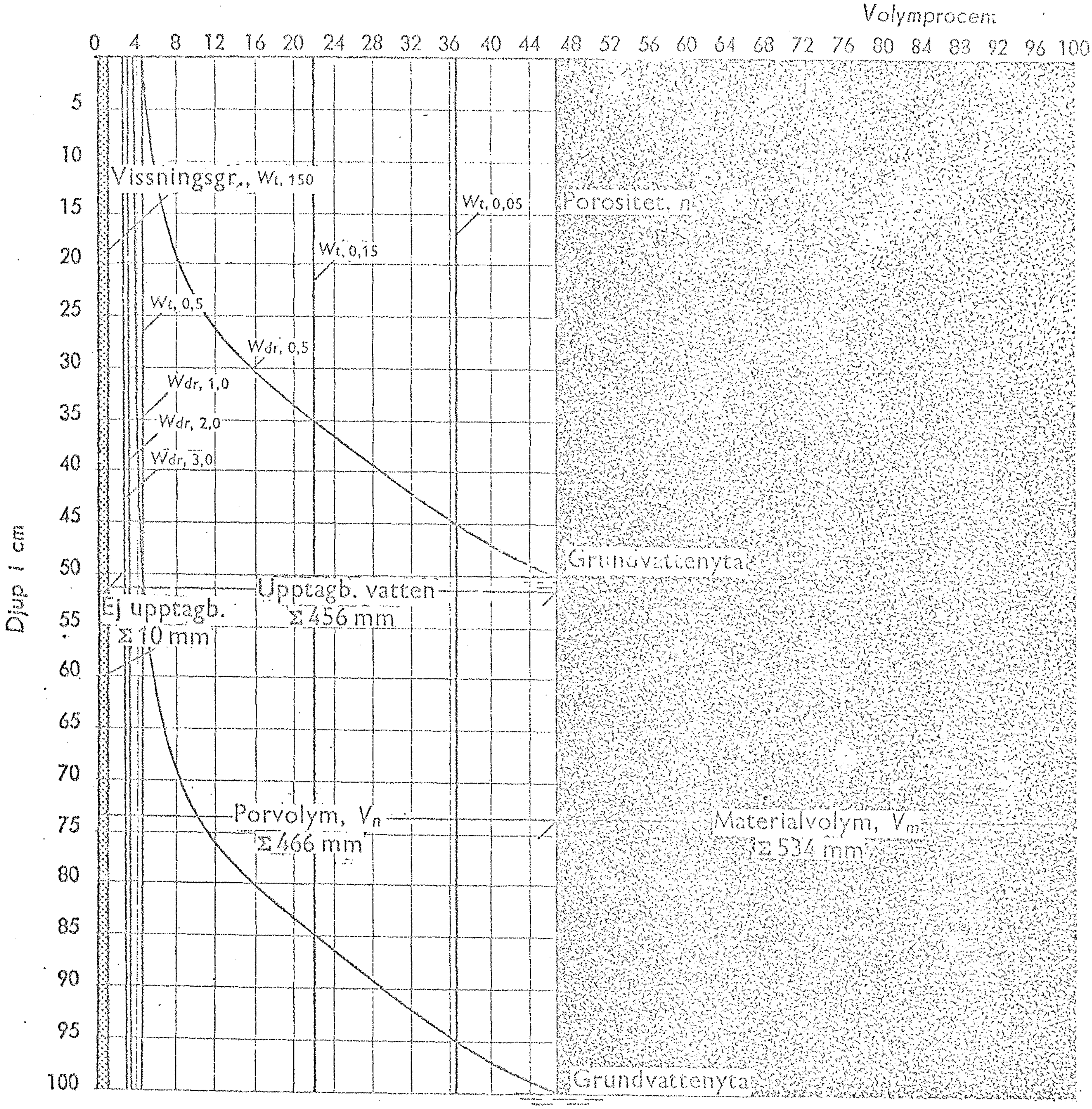
Ange storleksordningen på n och ρ i mineraljordar!

5. Beräkna i anslutning till bilagda n-diagram, hur mycket vatten, som utgår ur den mot diagrammet svarande profilen, då grundvattenytan tänkes sjunka från 0,5 till 1,0 m djup.

6. Inrita i samma diagram vattenhaltskurvan för dräneringsjämvikt mot en grundvattenyta på 75 cm djup. Vilken jord (jordart) måste profilen bestå av?

7. Skatta på något lämpligt sätt, hur mycket vatten, som per tids- och breddenhet kan strömma fram i ett 20 cm tjockt sandlager under gradienten 0,01 m v.p. per meter strömväg.

8. Beskriv makrostrukturens utbildning och variation med djupet i en styv lera från Uppland.


Volymprocent
0 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40 44 48 52 56 60 64 68 72 76 80 84 88 92 96 100
Djup i cm
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100
Vissningsgr., Wt, 150
Wt, 0,05
Porositet, n
Wt, 0,15
Wt, 0,5
Wdr, 0,5
Wdr, 1,0
Wdr, 2,0
Wdr, 3,0
Grundvattenyta
Upptagb. vatten
Σ 456 mm
Ej upptagb.
Σ 10 mm
Porvolym, Vn
Σ 466 mm
Materialvolym, Vm
Σ 534 mm
Grundvattenyta

Skrivning i Lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Fredagen den 29 maj 1970

För 5 poäng

Svar, lösningar och kommentarer

1. Antag x cm vattenpelare (v.p.).

Jämviktsekvationen i MKS-systemet kan då skrivas

$$p = \rho g h = 1000\ g\ x/100 = 1\ N/m^2$$

$$x = 1/10\ g = 1/98,1 = 0,01019 = 0,0102 \text{ cm v.p.}$$

och i cgs-systemet

$$p = \rho\ g\ h = 1\ g\ x = 10^5/10^4 \text{ dyn/cm}^2$$

$$x = 10/981 = 0,0102 \text{ cm v.p.}$$

Svar: 0,0102 cm v.p. = 0,102 mm v.p.
(1 N/m^2 = 0,10 mm v.p.)

2. Om trycket endast beror av en lägesvariabel måste, om ytan tänkes orienterad i ett rätvinkligt (xy-) koordinatsystem, ekvitrycklinjerna vara parallella med y-axeln. Radial symmetri kan också råda dvs. ekvitrycklinjerna bildar ett system av koncentriska cirklar.

Definitionsmässigt har vi

$$dF = p\ dA = f(x)\ dA$$

och således

$$F = \int_A p\ dA = \int_A f(x)\ dA$$

där integralen skall tas över hela ytan A.

3. Hydrauliska radien R_h är definierad som

våta arean/våta perimetern

För en fullgående cirkulär ledning gäller då

$$R_h = \pi r^2/2\pi r = r/2 = d/4$$

vilket i detta fall ger 0,60/4 = 0,15 m

$$v = 51\sqrt{0{,}0004 \cdot 0{,}15}$$

$$q = \frac{\pi\,\overline{0{,}6}^2}{4} \cdot 51 \cdot 0{,}001\ \sqrt{60}\ m^3/s$$

$$q = 0{,}2827 \cdot 51 \cdot 7{,}746 = 111{,}7\ l/s$$

Svar: 112 l/s

4. I formeln betyder γ_t den torra volymvikten dvs. vikten per volymsenhet (kg/dm^3, g/cm^3 etc.) av ett kornigt material, en jord, med porositeten n volymprocent, då kornens eller materialets täthet (densitet) är ρ g/cm^3.

Formeln kan härledas på olika sätt. Enklast och mest generellt är att betrakta V dm^3 jord med vikten (torra vikten) G_s kg, porositeten n och korntätheten ρ g/cm^3.

Då gäller, att volymen porer är nV/100 dm^3 och följaktligen volymen porfritt material V - nV/100 dm^3. Detta ger

$$G_s = (V - \frac{nV}{100})\rho$$

och enligt definitionen på torra volymvikten γ_t således

$$\gamma_t = \frac{G_s}{V} = (1 - \frac{n}{100})\rho$$

V.S.B.

För mineraljordar kan n överslagsvis sättas = 50 volymprocent och ρ kan sättas = 2,70 g/cm^3. Detta ger γ_t 1,35 kg/dm^3.

5. På diagrammet finns vattenhaltskurvorna för dräneringsjämvikt mot en grundvattenyta på 0,5 m djup respektive 1,0 m djup inritade. De är betecknade $w_{dr,0.5}$ respektive $w_{dr,1.0}$.

För att lättare kunna hålla fast vid de angivna kurvorna skuggas konturen till den yta, som de jämte kurvan (linjen) för n avgränsar i diagrammet.

Nu vet vi, att 1 volymprocent/dm horisont motsvarar ett vattenskikt av 1 mm. Det enklaste sättet att erhålla den sökta mängden är då att avläsa differenserna $w_{dr,0.5} - w_{dr,\,1.0}$ för var tionde cm med början vid djupet z = 5 cm. Summan av dessa differenser är då lika med den sökta vattenmängden i mm.

Vi kan direkt erhålla denna summa genom grafisk summering med hjälp av en pappersremsa, där differenserna addidivt avsätts på remsan, varefter avståndet mellan första och sista markeringen uppmätes med en i millimeter graderad linjal. Summan blir 368 mm.

Avståndet mellan 0 och 100 volymprocent på w-axeln i diagrammet är 170 mm. Således är den sökta mängden

$$\frac{368 \cdot 100}{170} = 216 \text{ mm}$$

Svar: 216 mm

6. Vattenhaltskurvan för en dräneringsjämvikt på 75 cm djup konstrueras enklast, om man beaktar att i en homogen profil är $\underline{w}_{dr}$ till formen oberoende av grundvattenytans djup. En ändring av grundvattenståndet innebär endast, att den för profilen karakteristiska vattenhaltsfördelningen över en grundvattenyta rör sig upp eller ned i anslutning till om det nya grundvattenståndet ligger högre eller lägre än tidigare.

På en pappersremsa sätter vi av det avstånd i diagrammet som svarar mot t.ex. differensen 75–50 cm djup. Vi parallellförskjuter sedan kurvan för $\underline{w}_{dr,0.5}$ med detta avstånd nedåt i diagrammet.

7. För en parallell grundvattenström dvs. en strömning av vatten under övertryck i mättad jord med $\underline{v}_x = \underline{v}$ och $v_y = \underline{v}_z = 0$ gäller

$$q = k \cdot A \cdot I = k\, A \frac{h_f}{l}$$

där ingående bokstavsbeteckningar har i föreläsningarna och kurslitteraturen given betydelse.

Här gäller med alla mått i cgs-enheter och om vi betraktar bredden en meter = 100 cm

$$q = k\, 100 \cdot 20 \cdot 0{,}01 = k \cdot 20 \text{ cm}^3/\text{s}$$

där $\underline{k}$ enl. föreläsningarna skattas med formeln

$$k = 5\, d_p^2 \quad \text{cm/s}$$

Sandfraktionen definieras av gränserna

$$d_m = 0{,}2 \text{ mm} \leq d_p \leq 2 \text{ mm} = d_M$$

Detta ger

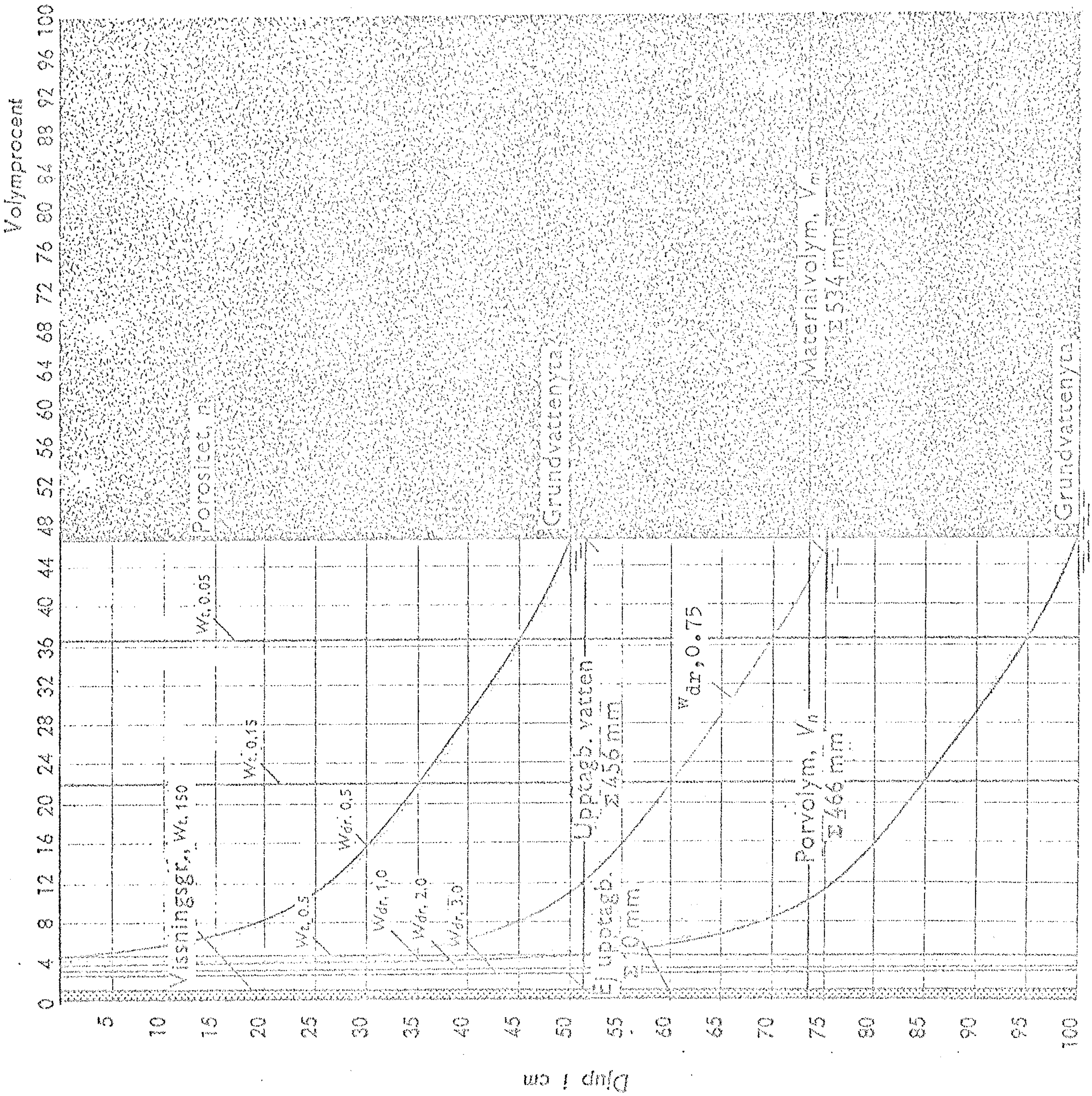
$$q_M = 5 \cdot \overline{0,2}^2 \cdot 20 = 4\ cm^3/s = 14,4\ l/tim,\ m\ bredd$$

och

$$q_m = 5 \cdot \overline{0,02}^2 \cdot 20 = 0,04\ cm^3/s = 0,144\ l/tim,\ m\ bredd$$

Svar: Den framrinnande vattenmängden kan skattas ligga mellan gränserna 14 till 0,14 l/tim, m bredd där förskjutningen mot den övre eller nedre gränsen i övrigt beror av sandens kornstorleksfördelning

8. Se föreläsningarna, kurslitteraturen och demonstrationerna! Jfr speciellt med M.F.U. XI!


Volymprocent
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
44
48
52
56
60
64
68
72
76
80
84
88
92
96
100
Djup i cm
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
Vissningsgr., Wt,150
Porositet, n
Wt,0.05
Wt,0.15
Wt,0.5
Wdr,0.5
Wdr,1.0
Wdr,2.0
Wdr,3.0
Grundvattenyta
Upptagb. vatten
Σ 456 mm
Ej upptagb.
Σ 10 mm
wdr,0.75
Porvolym, Vn
Σ 466 mm
Materialvolym, Vm
Σ 534 mm
Grundvattenyta

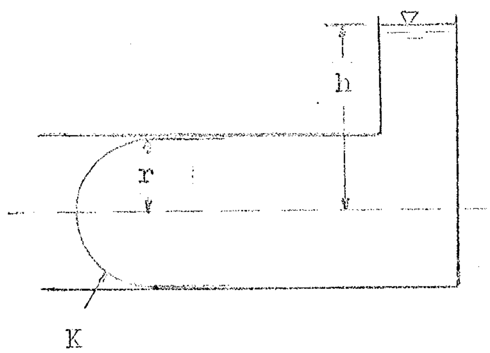
Skrivning i lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Lördagen den 15 maj 1971

För 5 poäng

1. Med hur stor kraft förskjutes den ihåliga, halvsfäriska kolven K av vätsketrycket i vidstående schematiskt tecknade anordning?



2. Ur en sluten vattenbehållare strömmar vatten ut genom ett litet hål med en hastighet av 8 m/s. Hålet befinner sig 1,2 m under vattenytan. Hur stort är övertrycket i behållaren? Svaret skall anges i kp/cm^2!

3. Härled formeln

$$n = 100\left(1 - \frac{\gamma_t}{\rho}\right)$$

där beteckningarna har i föreläsningarna given betydelse. Beräkna sedan porositeten i en sand, vars torra volymvikt är 1,50 kg/dm^3 och vars partikeltäthet ρ är 2,70 g/cm^3.

4. Visa att den sammanlagda partikelytan per gram prov i en jord, som antas bestå av likstora sfäriska partiklar med diametern d_p, är omvänt proportionell mot partikeldiametern d_p med proportionalitetsfaktorn $6/\rho$, där ρ är partiklarnas täthet.

Beräkna sedan den sammanlagda partikelytan i ett kg sand med d_p = 1 mm och likaså i ett kg lera med d_p = 1 μ!

5. Definiera kortfattat följande termer: 1. markstruktur, 2. aggregat, 3. fragment och 4. crumb!

6. Definiera begreppet vissningsgräns och ange några speciella kriterier, som gäller för vattnet i jorden vid denna gräns.

7. Rita upp på anslutande diagramunderlag bindningskarakteristikan för material nr 6 med stöd av siffrorna i den bilagda tabellen (ur M.F.U. XVII)!

a. Beräkna sedan, hur stor del av porvolymen i summationsprocent, som ligger i porstorleksklassen $3\ \mu \leq d_v \leq 30\ \mu$!

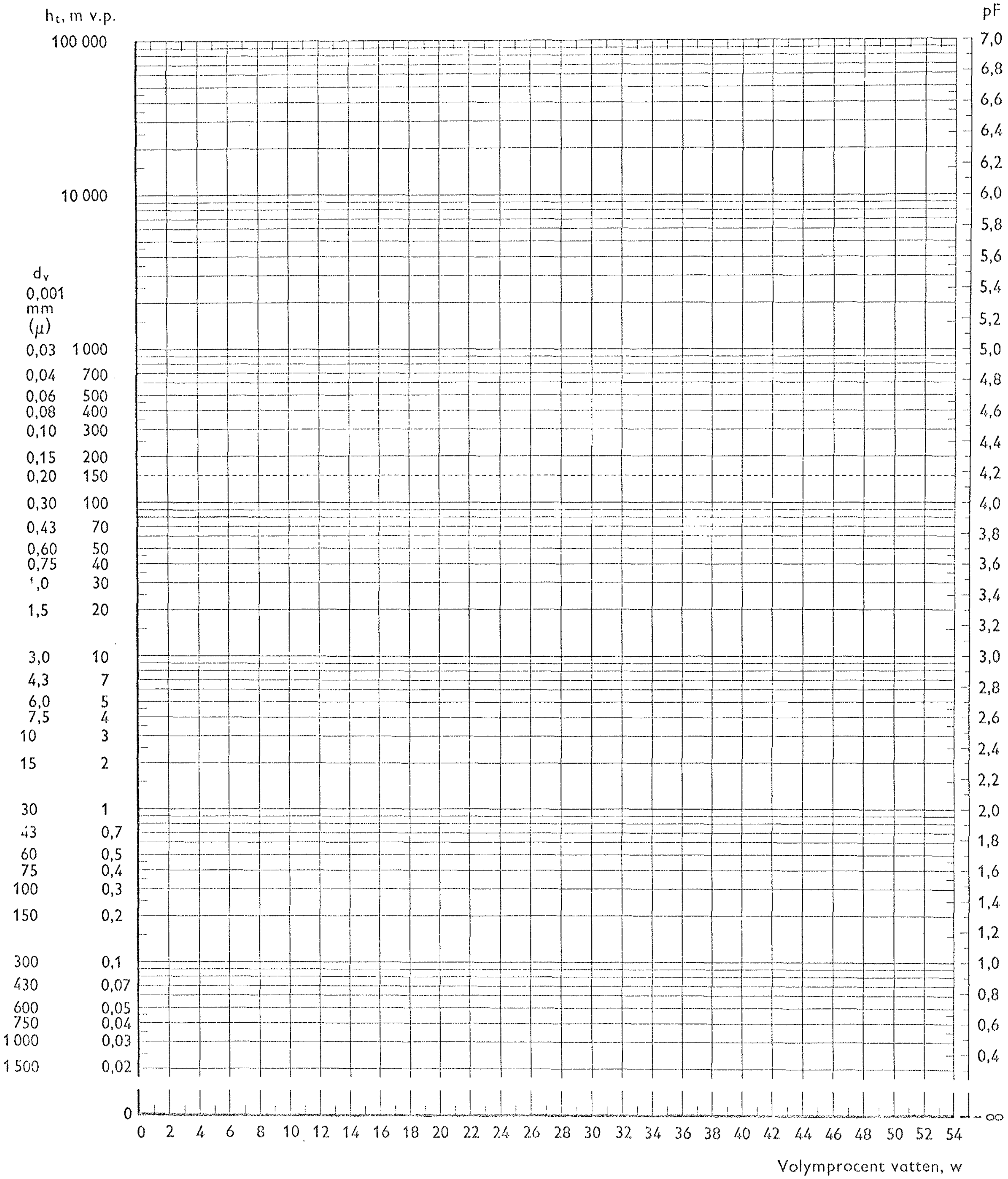
b. Konstruera sedan på likaså bilagda diagramunderlag ett n-diagram för en meter mäktig homogen profil (bädd) av detta material och inrita speciellt vattenhaltskurvan för dräneringsjämvikt mot en grundvattenyta på 80 cm djup!

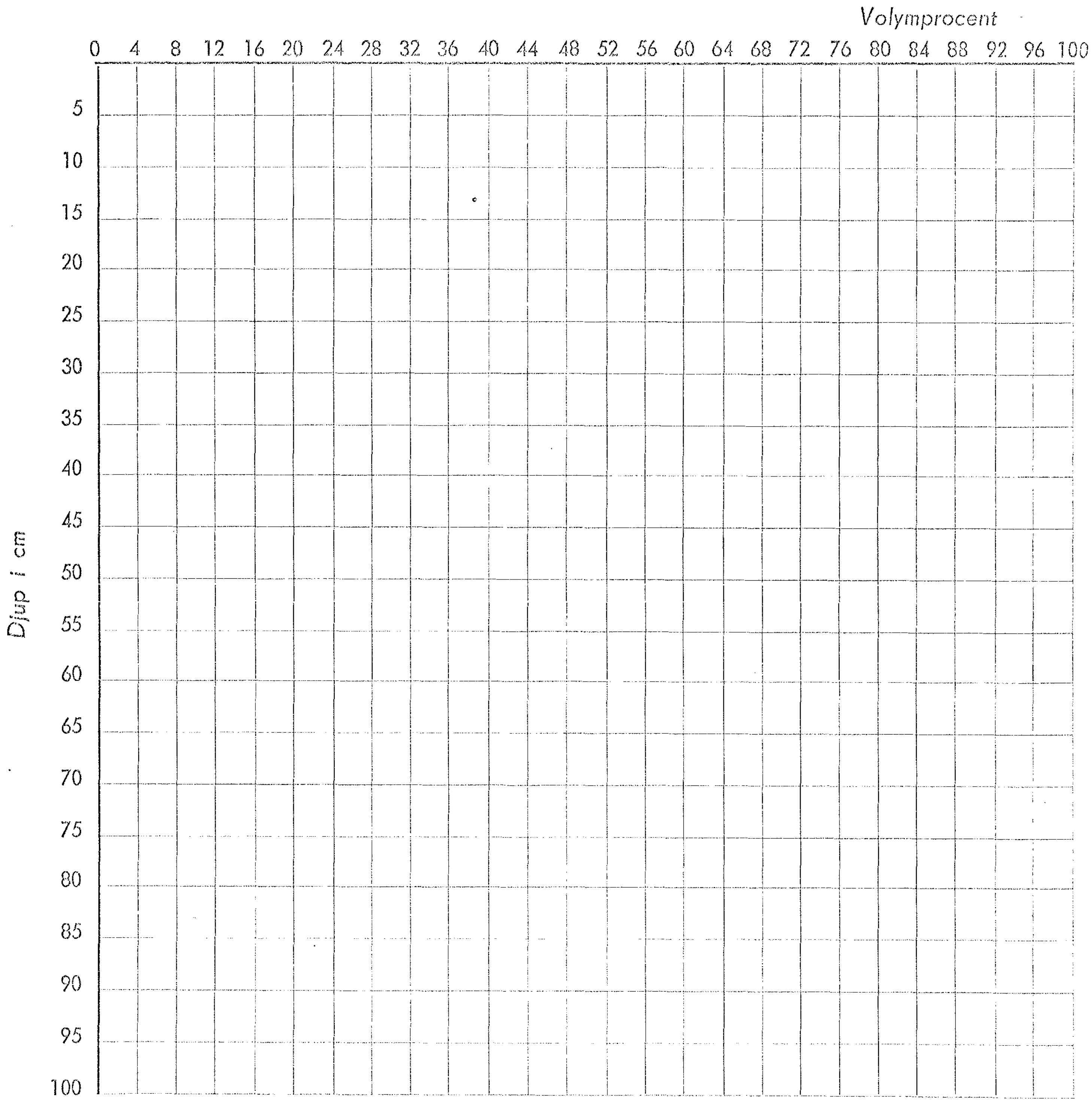
c. Hur stor blir lufthalten på 50 cm djup i profilen?

8. Ett grundvattenförande grovmolager med tjockleken 30 cm ligger instängt mellan ogenomsläppliga lager av lera. Två tryckrör (grundvattenståndsrör) nedsättes i lagret. Avståndet mellan rören i grundvattenströmmens riktning är 100 m. Höjdskillnaden i vattenståndet är 0,2 m. k-värdet har uppmätts och befunnits vara $5 \cdot 10^{-3}$ cm/s. Beräkna grundvattenströmmens storlek i l/tim hänförd till 100 m bredd av det vattenförande lagret.

Tabell 4. *Sammanställning av experimentellt bestämda värden över de olika grundmaterialens och blandmaterialens vattenhalt w_2 i volymprocent vid olika vattenavförande tryck h_t i meter vattenpelare (m v. p.). De vid de olika tryckstegen uppkomna vattenhaltsminskningarna har blivit uträknade och införda i tabellen.*

Material nr	Porvolym %	Volymvikt γ_t kg/dm³	Vattenavförande tryck i m v. p. jämte differenser 0,05	Diff.	0,15	Diff.	0,50	Diff.	1,00	Diff.	2,00	Diff.	3,00	Diff.	10,0	Diff.	150	Diff.	400	Diff.	1 000	Diff.	10 000
1	46,6	1,43	36,5	14,4	22,1	17,5	4,6	1,0	3,6	0,7	2,9	0,5	2,4	0,1	2,3	1,3	1,0	0,5	0,5	0,1	0,4	0,1	0,3
2	61,5	1,06	52,3	1,2	51,1	6,5	44,6	3,2	41,4	2,8	38,6	2,4	36,2	2,9	33,3	9,2	24,1	13,3	10,8	3,7	7,1	5,3	1,8
3	94,9	0,081	70,3	8,2	62,1	19,5	42,6	8,6	34,0	5,2	28,8	3,5	25,3	1,4	23,9	17,1	6,8	3,3	3,5	0,7	2,8	1,6	1,2
4	50,2	1,33	38,0	14,4	23,6	15,5	8,1	1,4	6,7	1,1	5,6	0,9	4,7	1,2	3,5	1,2	2,3	1,5	0,8	0,1	0,7	0,3	0,4
5	59,4	1,08	43,9	12,8	31,1	15,5	15,6	2,7	12,9	1,4	11,5	1,2	10,3	1,3	9,0	6,2	2,8	1,6	1,2	0,2	1,0	0,5	0,5
6	71,1	0,76	53,4	9,4	44,0	18,1	25,9	5,0	20,9	2,6	18,3	1,8	16,5	1,3	15,2	11,1	4,1	2,1	2,1	0,3	1,8	1,0	0,8
7	64,9	0,95	59,4	0,9	58,5	9,5	49,0	4,2	44,8	4,4	40,4	3,0	37,4	3,4	34,0	12,3	21,7	9,2	12,5	4,3	8,2	6,1	2,1
8	70,3	0,80	61,0	1,8	59,2	10,0	49,2	4,6	44,6	4,6	40,0	3,6	36,4	3,4	33,0	13,5	19,5	8,5	11,0	3,7	7,3	2,6	4,7
9	78,7	0,55	66,9	3,0	63,9	14,3	49,6	6,8	42,8	5,3	37,5	2,1	35,4	3,1	32,3	16,7	15,6	7,3	8,3	2,7	5,6	3,9	1,7
10	48,5	1,39	35,7	14,4	21,3	11,4	9,9	1,3	8,6	0,8	7,8	0,8	7,0	1,1	5,9	3,0	2,9	1,7	1,2	0,1	1,1	0,7	0,4
11	53,7	1,24	40,6	9,9	30,7	14,0	16,7	2,5	14,2	1,7	12,5	1,4	11,1	1,5	9,6	5,2	4,4	2,6	1,8	0,1	1,7	1,1	0,6
12	62,0	1,01	46,9	7,5	39,4	16,3	23,1	3,6	19,5	2,4	17,1	2,0	15,1	1,7	13,4	7,6	5,8	3,2	2,6	0,6	2,0	1,2	0,8
13	72,1	0,72	55,5	5,1	50,4	18,0	32,4	5,6	26,8	3,6	23,2	2,7	20,5	2,3	18,2	12,3	5,9	3,2	2,7	0,4	2,3	1,4	0,9
14	49,6	1,36	38,8	9,7	29,1	10,9	18,2	2,2	16,0	1,7	14,3	1,0	13,3	1,5	11,8	5,2	6,6	4,0	2,6	0,3	2,3	1,7	0,6
15	54,9	1,21	42,9	7,0	35,9	12,9	23,0	3,0	20,0	2,1	17,9	1,7	16,2	2,0	14,2	6,3	7,9	4,6	3,3	0,8	2,5	1,7	0,8
16	61,2	1,04	47,0	5,8	41,2	13,8	27,4	3,9	23,5	2,4	21,1	2,3	18,8	1,9	16,9	6,3	10,6	7,0	3,6	0,8	2,8	1,9	0,9
17	52,4	1,29	43,3	4,7	38,6	10,4	28,2	2,6	25,6	2,4	23,2	1,8	21,4	2,1	19,3	7,1	12,2	6,7	5,5	1,3	4,2	3,1	1,1
18	58,4	1,12	48,2	3,8	44,4	11,1	33,3	3,5	29,8	2,0	27,8	3,4	24,4	2,5	21,9	8,3	13,6	7,0	6,6	1,9	4,7	3,5	1,2
19	65,5	0,91	54,8	2,9	51,9	13,3	38,6	4,7	33,9	3,4	30,5	2,7	27,8	2,6	25,2	11,7	13,5	6,3	7,2	2,5	4,7	3,3	1,4


h_t, m v.p.
100 000
10 000
d_v
0,001
mm
(μ)
0,03 1 000
0,04 700
0,06 500
0,08 400
0,10 300
0,15 200
0,20 150
0,30 100
0,43 70
0,60 50
0,75 40
1,0 30
1,5 20
3,0 10
4,3 7
6,0 5
7,5 4
10 3
15 2
30 1
43 0,7
60 0,5
75 0,4
100 0,3
150 0,2
300 0,1
430 0,07
600 0,05
750 0,04
1 000 0,03
1 500 0,02
0
pF
7,0
6,8
6,6
6,4
6,2
6,0
5,8
5,6
5,4
5,2
5,0
4,8
4,6
4,4
4,2
4,0
3,8
3,6
3,4
3,2
3,0
2,8
2,6
2,4
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
∞
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54
Volymprocent vatten, w


Volymprocent
0 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40 44 48 52 56 60 64 68 72 76 80 84 88 92 96 100
Djup i cm
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100

Skrivning i lantbrukets hydroteknik

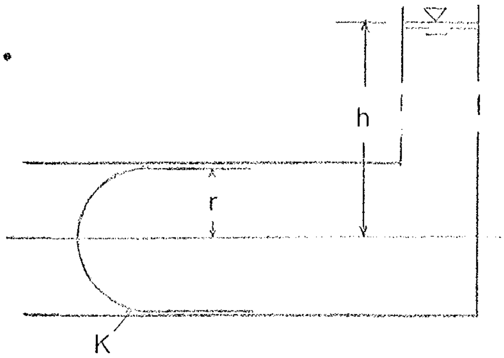
Agrohydrologi

Lördagen den 15 maj 1971

För 5 poäng

Svar, lösningar och kommentarer

1.



Enligt hydrostatiken gäller för den horisontella tryckkraften F_h mot en buktig yta, att den är bestämd av uttrycket

$$F_h = \rho g A_v \cdot h$$

där A_v är den buktiga ytans vertikala projektion och h avst. från den fria vätskeytan till A_v:s tyngdpunkt.

Således i detta fall

$$F_h = \rho g \cdot \pi r^2 \cdot h$$

Svar: Kraften är $\rho g \cdot \pi r^2 \cdot h$ (N)

2. Enligt Toricellis utströmningslag gäller för utströmningshastigheten v

$$v = \alpha \sqrt{2gh}$$

där α är en koefficient, som i allmänhet ligger inom området 0,98 - 1,00. Då ingenting utsäges om denna koefficient sätter vi $\alpha = 1$.

Vi antar övertrycket vara x N/m^2 och får

$$8 = 1 \sqrt{2g(1{,}2 + \frac{x}{1000\ g})}$$

eller

$$64 = 2{,}4\ g + \frac{x}{500} ;$$

$$x = 500 \cdot 40{,}46 = 20230\ N/m^2 = 0{,}21\ kp/cm^2$$

Svar: 0,21 kp/cm^2

3. Enligt definitionen på torra volymvikten väger 1 dm^3 jord helt torr γ_t kg. Om partiklarnas täthet är ρ upptar denna massa alltså en volym av γ_t/ρ dm^3.

Porvolymen kan då tecknas

$$1\ dm^3 - \frac{\gamma_t}{\rho}\ dm^3 = \left(1 - \frac{\gamma_t}{\rho}\right)\ dm^3$$

och detta uttryckt i procent på totalvolymen 1 dm^3 ger porositeten n. Således

$$n = 100\left(1 - \frac{\gamma_t}{\rho}\right)$$

V.S.V.

Direkt insättning ger

$$n = 100\left(1 - \frac{1,50}{2,70}\right) = 100 - 55,6 = 44,4$$

Svar: $n = 44,4$

4. Eftersom alla partiklar är sfäriska och likstora kan vi genomföra beräkningen på en partikel. Således får vi, att vikten av en partikel är

$$\rho \frac{\pi}{6} d_p^3\ g$$

och att ytan av samma partikel blir

$$\pi d_p^2\ cm^2$$

varav följer, att ytan A_{sp} (= specifika ytan) per g blir

$$A_{sp} = \pi d_p^2 : \rho \frac{\pi}{6} d_p^3 = \frac{6}{\rho} \cdot \frac{1}{d_p}$$

V.S.V.

Det numeriska exemplet ger, om ρ sättes = 2,7 g/cm^3

$$A_{sp,s} = 1000\ \frac{6}{2,7} \cdot \frac{1}{0,1} = 2,2 \cdot 10^4\ cm^2 = 2,2\ m^2/kg$$

$$A_{sp,L} = 1000\ \frac{6}{2,7} \cdot \frac{1}{0,0001} = 2,2 \cdot 10^7 cm^2 = 2,2 \cdot 10^3\ m^2/kg$$

<u>Anm.</u> Observera, att detta exempel mycket åskådligt belyser, varför adsorptionsvattnets mängd snabbt bör öka med tilltagande finkornighet och framför allt tilltagande kolloiditet!

5. och 6. Se definitionerna i M.F.U. XX s. 12-18!

7. Punkterna inprickas och en "mjukt" förlöpande kurva dras genom punkterna. <u>Bindningskarakteristikan</u> är därmed färdig.

<u>a</u> Vattenhalterna svarande mot de angivna porstorlekarna avläses. Avläsningarna har på diagrammet markerats med streckade linjer. Vi får

mot $\underline{d_v}$ = 3 μ svarar $\underline{w}$ = 15,2 volymprocent

" $\underline{d_v}$ = 30 μ " $\underline{w}$ = 20,9 "

Summationsprocenten $\underline{\Delta y}$ är bestämd (se bl.a. M.F.U. XIII!) av uttrycket

$$\Delta y = \frac{100}{n} \Delta w$$

$\underline{\Delta w}$ är här tydligen 20,9 - 15,2 = 5,7 volymprocent. Detta ger för $\underline{n}$ = 71,1

$$\Delta y = \frac{100}{71{,}1} \cdot 5{,}7 = 8{,}0$$

<u>b</u> <u>n</u>-diagrammets två grundkurvor blir räta linjer: en för $\underline{n}$ = 71,1 och en för $\underline{w_v}$ = 4,1.

Härur erhålles: porvolymen till 10 · 71,1 = 711 mm och materialvolymen till 1000 - 711 = 289 mm.

Vattenhaltskurvan för en dräneringsjämvikt mot en grundvattenyta på djupet $\underline{h_o}$ = 80 cm konstrueras lätt genom att tabellens vattenhaltsvärden $\underline{w_{t,0.05}}$ = 53,4, $\underline{w_{t,0.15}}$ = 44,0 och $\underline{w_{t,0.5}}$ = 25,9, direkt avsättes på de höjder över grundvattenytan, där dessa spänningar råder (ang. av index). Ytterligare punkter erhålles genom avläsning av bindningsdiagrammet. Se konstruktionen!

<u>c</u> Vattenhalten $\underline{w}$ på 50 cm djup är 33 volymprocent. Detta ger en lufthalt $\underline{p_l}$ av 71,1 - 33 = 38,1 volymprocent.

8. För en parallell grundvattenström gäller Darcys lag i formen

$$Q = k \cdot A \cdot I \cdot t$$

där beteckningarna har i föreläsningarna given betydelse.

Här gäller

$$k = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{cm/s} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3600}{100}\ \frac{\text{m}}{\text{tim}} = 0{,}18\ \text{m/tim}$$

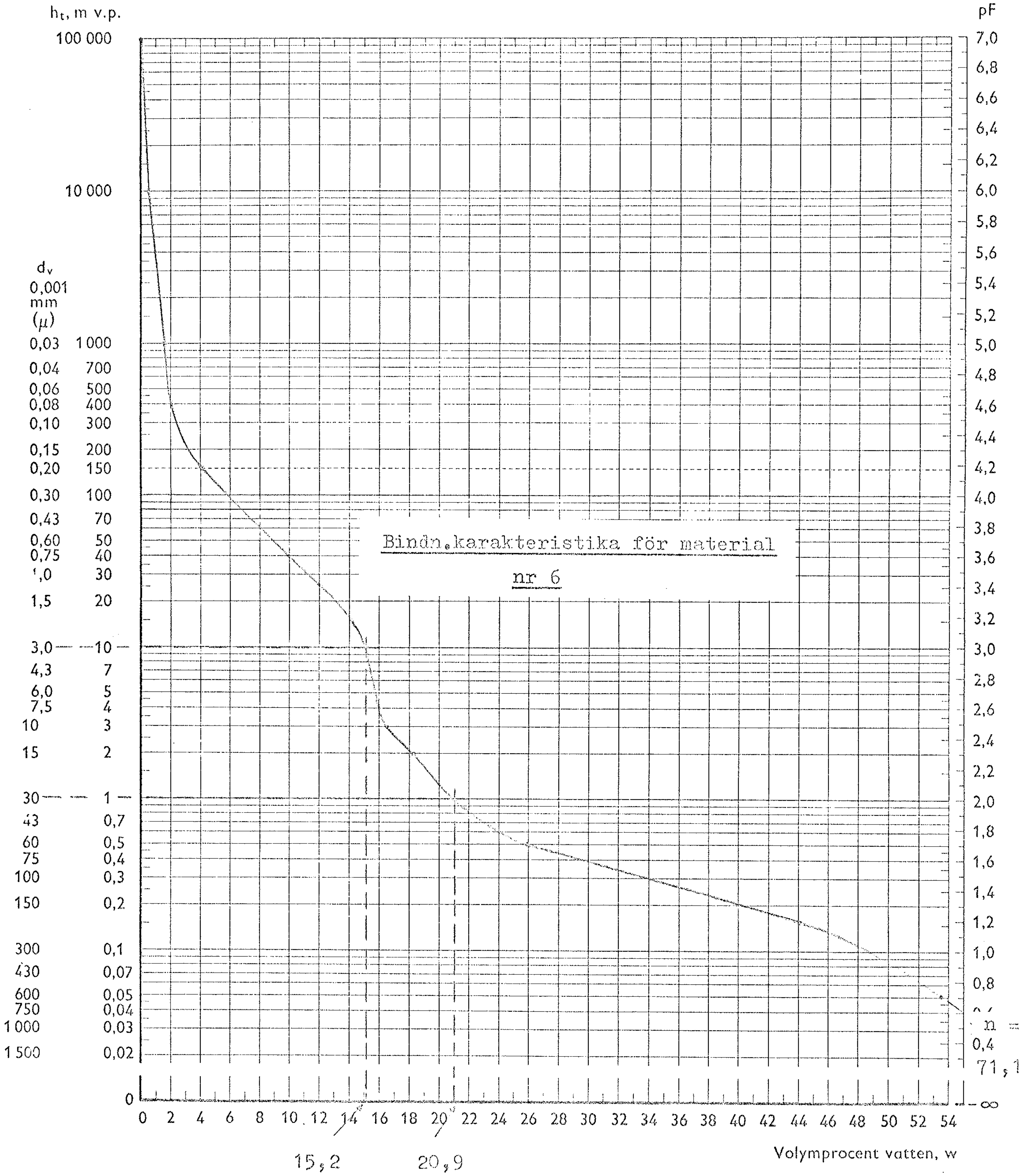
$$A = 100\ \text{m} \cdot 0{,}3\ \text{m} = 30\ \text{m}^2$$

$$I = 0{,}2 : 100 = 0{,}002 \text{ och } t = 1 \text{ tim}$$

Vi får således

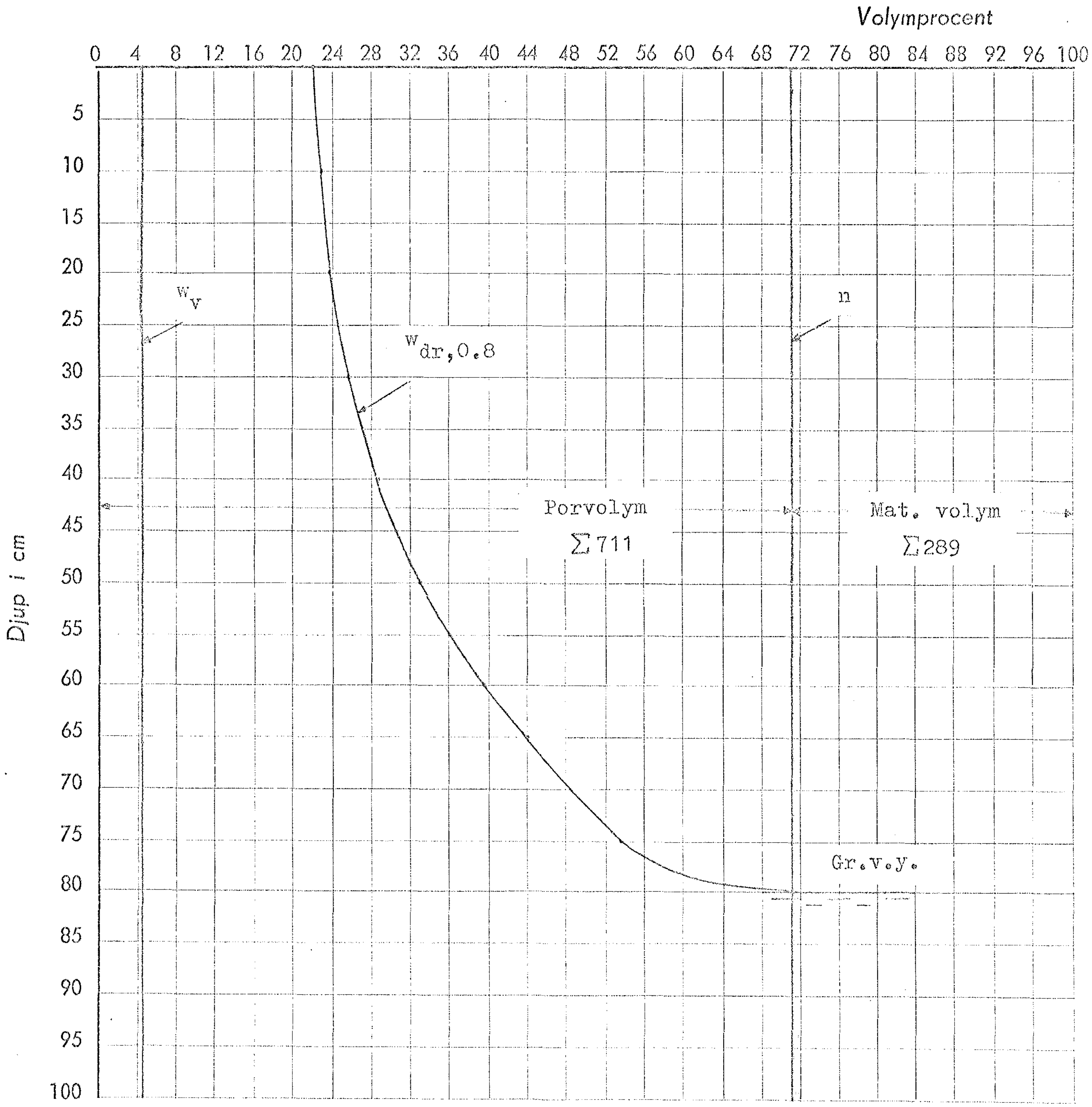
$$Q = 0{,}18 \cdot 30 \cdot 0{,}002 \cdot 1000 = 10{,}8\ \text{l/tim}$$

Svar: 10,8 l/tim



hₜ, m v.p.
pF
Bindn.karakteristika för material
nr 6
dᵥ
0,001 mm
(μ)
15,2
20,9
n =
71,1
Volymprocent vatten, w

Volymsdiagram för en en meter mäktig homogen bädd (profil) av material nr 6 (M.F.U. XVII).



Skrivning i lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Fredagen den 28 maj 1971

För 5 poäng

1. En behållare för vatten är utformad som en rät cirkulär kon med höjden h (vertikal) och basradien r. Konen står på sin basyta och i konens spets finns en liten öppning. Med vilken kraft trycks basytan från mantelytan, när konen just är fylld med vatten. Svaret skall ges i kraftenheten newton, N!

2. Hur stor vattenmängd (20^{0}) kan per timma passera genom ett 2 m långt glasrör, som har inre diametern 1 mm, utan att rörelsen blir turbulent, och hur stor är då gradienten I?

$$R_{krit} = 2000 \text{ och } \mu = 0{,}0101 \text{ Poise.}$$

3. Visa, att viktsprocenten adsorptionsvatten (hygroskopiskt vatten) bör vara omvänt proportionell mot partikeldiametern! Beräkna därefter viktsprocenten hygroskopiskt vatten för en kornig massa av likstora sfäriska partiklar med diametern $d_p = 0{,}2\ \mu$ och $\varrho = 2{,}70$ g/cm^3, om vattenfilmens tjocklek δ antas vara 10^{-6} cm.

4. En jord antas bestå av p viktsprocent organisk substans med tätheten ϱ_h och (100 - p) viktsprocent mineralsubstans med tätheten ϱ_m. Visa att

$$\frac{100}{\varrho_{med.}} = \frac{p}{\varrho_h} + \frac{100 - p}{\varrho_m}$$

där $\varrho_{med.}$ betecknar jordens täthet. Beräkna sedan p, om $\varrho_{med.} = 2{,}50$ g/cm^3, $\varrho_h = 1{,}50$ g/cm^3 och $\varrho_m = 2{,}70$ g/cm^3!

5. En plexibult med diametern D cm och längden l cm tänkes i axelriktningen vara genomborrad av N likstora kapillära kanaler med diametern d cm. Bestäm bultens k-värde för vatten!

6. Bevisa formeln

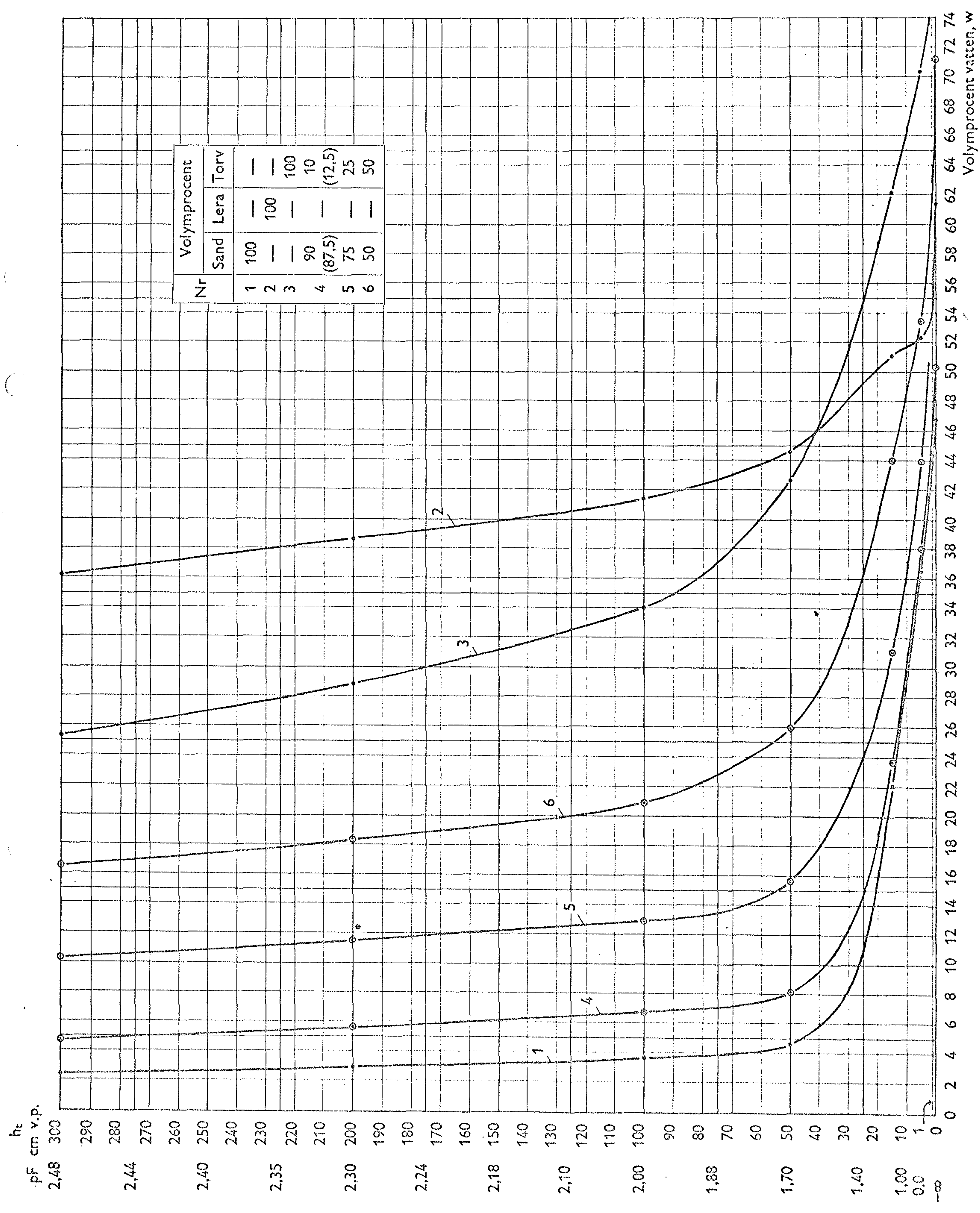
$$h_c^2\ k = \text{konst.}$$

där h_c är kapillariteten i cm v.p. i en jordart, vars genomsläpplighet är k cm/s!

Bestäm produktens värde med utgångspunkt från i markfysiken och agrohydrologien givna enkla relationer mellan h_c, k och partikeldiametern d_p samt skatta h_c för en jordart, vars k-värde är 10^{-4} cm/s!

7. Bestäm i anslutning till bilagda w-h_t-diagram (bindningsdiagram), hur stor volymprocent vatten de olika materialen håller eller kan hålla i porstorleksklassen 0,06-0,02 mm!

8. Rita en schematisk bild över en markprofil i en lerjord från Uppland! Ange och försök i skissen framställa olika horisonter, strukturer och eventuellt tänkt texturell variation med djupet! Beskriv sedan med möjligast precisa termer, hur strukturen varierar med djupet i profilen!


Volymprocent
Nr | Sand | Lera | Torv
1 | 100 | — | —
2 | — | 100 | —
3 | — | — | 100
4 | 90 | — | 10
(87,5) | — | (12,5)
5 | 75 | — | 25
6 | 50 | — | 50
pF
h_t cm v.p.
Volymprocent vatten, w
1
2
3
4
5
6

Skrivning i lantbrukets hydroteknik

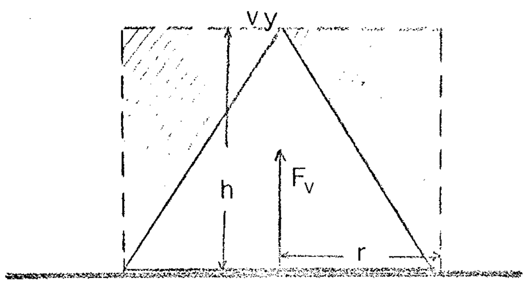
Agrohydrologi

Fredagen den 28 maj 1971

För 5 poäng

Svar, lösningar och kommentarer

1. Vi uppritar vidstående enkla figur och inför givna data. Enligt lagarna för tryck mot buktiga ytor är den vertikala tryckkraften mot en buktig yta lika med tyngden av den vätskepelare, som har den givna, buktiga ytan till nedre begränsning och denna ytas horisontella projektion på den fria vätskeytans plan som övre begränsningsyta.



Denna volym framträder i vårt plana snitt som den i figuren streckade ytan. Denna svarar mot volymen

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

Vattnets tyngd och således den sökta tryckkraften F i newton blir

$$F = \rho g V = 1000\ g \cdot \frac{2}{3} \pi r^2 h \text{ newton}$$

2. Vi bestämmer först den kritiska hastigheten v_c. Reynolds kritiska tal definieras av uttrycket

$$\frac{v_c \cdot d}{\nu} = R_{krit}$$

och i detta fall således (obs! för vatten är $\mu = \nu$!)

$$\frac{v_c \cdot 0,1}{0,0101} = 2000$$

$$v_c = 202 \text{ cm/s}$$

Den sökta vattenmängden blir

$$q \text{ l/tim} = \pi \frac{0,1^2}{4} \cdot 202 \cdot \frac{3600}{1000} = 5,71 \text{ l/tim}$$

Hagen-Poiseuilles lag kan skrivas

$$q = \frac{\pi \rho g I d^4}{128 \mu}$$

Härur erhålles $\underline{v}$ till

$$v = \frac{4q}{\pi d^2} = \frac{\rho g I d^2}{32 \mu}$$

Vi löser ut $\underline{I}$ och insätter givna värden

$$I = \frac{32 \mu v}{\rho g d^2} = \frac{32 \cdot 0{,}0101 \cdot 202}{1 \cdot 981 \cdot 0{,}01} = \frac{6528{,}6}{981} = 6{,}655$$

Mellan rörets ändar måste icke mindre än 13,3 m vattenståndsskillnad råda, för att den angivna vattenmängden skall gå igenom och innan turbulens under angivna förutsättningar inträffar.

<u>Svar:</u> Vattenmängden blir 5,71 l/tim och
$\underline{I}$ blir 6,66 m v.p./m rör

3. Om alla partiklar antas ha samma diameter $\underline{d_p}$, kan beviset genomföras i anslutning till en enda partikel. Det gäller då också för $\underline{N}$ partiklar. Vattenfilmens tjocklek betecknas såsom angivits med $\underline{\delta}$ (cm).

Vi uppställer nedanstående räkneschema:

Volymen av en partikel	$\frac{\pi}{6} d^3$ cm^3
Volymen av en partikel med vattenfilm	$\frac{\pi}{6} (d + 2\delta)^3$ cm^3
Volymen av vattenfilmen	$\frac{\pi}{6} (d + 2\delta)^3 - \frac{\pi}{6} d^3$ cm^3

Motsvarande vikter fås genom multiplikation av volymerna med gällande täthet. Partikelns täthet betecknas i anslutning till problemet med $\underline{\rho}$ g/cm^3 och vattnets täthet sättes = 1 g/cm^3. Viktsprocenten vatten kan då tecknas (obs! index $\underline{p}$ är struket, då någon förv. ej kan ske)

$$w_h = 100 \frac{\frac{\pi}{6} (d + 2\delta)^3 - \frac{\pi}{6} d^3}{\frac{\pi}{6} d^3 \rho} = \frac{100}{\rho} \left[(1 + \frac{2\delta}{d})^3 - 1 \right]$$

$$w_h = \frac{600}{\rho} \cdot \frac{\delta}{d}$$

om vid utvecklingen av parentesen alla termer δ/d av högre dignitet än 1 strykes eller när δ/d är ett litet tal.

Således gäller

$$w_h = \text{prop}\ \frac{\delta}{d}$$

<u>dvs. viktsprocenten adsorptionsvatten (hygroskop. vatten) är omvänt proportionellt mot partikeldiametern</u>, vilket skulle visas Q.E.D.

Det num. ex. ger

$$w_h = \frac{600}{2,70} \cdot \frac{10^{-6}}{2 \cdot 10^{-5}} = 11,1\ \%$$

<u>Svar</u>: Det hygroskopiska vattnet $\underline{w_h}$ bestäms av uttrycket

$$w_h = \frac{600}{\rho} \cdot \frac{\delta}{d}$$

och det num. ex. ger $\underline{w_h} = 11,1\ \%$

4. Vi betraktar 100 g jord. Dess volym i porfri lagring är då $100/\rho_{med.}$ enligt formeln volymen = absoluta vikten : tätheten.

På samma sätt erhålles:

volymen org. substans i porfri lagring p/ρ_h

volymen mineralsubstans i porfri lagring $(100 - p)/\rho_m$

Kravet om volymslikhet ger då

$$\frac{100}{\rho_{med.}} = \frac{p}{\rho_h} + \frac{100 - p}{\rho_m}$$

V.S.V.

Det numeriska exemplet ger vid direkt insättning

$$\frac{100}{2,50} = \frac{p}{1,50} + \frac{100 - p}{2,70}$$

$$p = 10,0\ \%$$

<u>Svar</u>: Procenten org. substans är 10,0 viktsprocent

5. För en enda kapillär gäller enligt Hagen-Poiseuilles lag, att genomströmningen $\triangle q$ cm^3 per tidsenhet är bestämd av ekvationen

$$\triangle q = \frac{\pi \varrho g d^4}{128 \mu} \cdot \frac{\triangle h}{l} \qquad (a)$$

där $\triangle h$ är förlusthöjden och övriga bokstävers betydelse är givna i problemet och markfysiken.

För N likstora kapillära kanaler måste då gälla

$$q = N \triangle q = N \frac{\pi \varrho g d^4}{128 \mu} \cdot \frac{\triangle h}{l} \qquad (b)$$

Enligt Darcys lag kan emellertid q även skrivas

$$q = k A \frac{\triangle h}{l} = k \pi \frac{D^2}{4} \cdot \frac{\triangle h}{l} \qquad (c)$$

Härav erhålles

$$N \frac{\pi \varrho g d^4}{128 \mu} \cdot \frac{\triangle h}{l} = k \pi \frac{D^2}{4} \cdot \frac{\triangle h}{l} \qquad (d)$$

eller

$$k = \frac{\pi \varrho g}{128 \mu} \cdot \frac{N}{\frac{\pi D^2}{4}} \cdot d^4 = \text{prop} \cdot N \cdot d^4 \qquad (e)$$

Svar: $k = \frac{\varrho g}{32 \mu} \cdot \frac{N}{D^2} d^4$

Kommentarer:

Mot bakgrunden av ekv. (e) ovan kan de i M.F.U. III givna satserna formuleras:

Sats 1. Genomsläppligheten är direkt proportionell mot antalet (N_1) kapillära kanaler per ytenhet.

Sats 2. Genomsläppligheten är direkt prop. mot fjärde potensen av kapillärernas radie eller diameter.

Vi kan även skriva

$$k = \frac{\varrho g}{32 \mu} \cdot \frac{N}{D^2} \cdot d^4 = \frac{\varrho g}{32 \mu} \cdot \frac{Nd^2}{D^2} \cdot d^2$$

där tydligen

$$\frac{n}{100} = \frac{N\pi d^2}{4} : \frac{\pi D^2}{4} = \frac{Nd^2}{D^2}$$

varför

$$k = \frac{\rho g}{32\,\mu} \cdot \frac{n}{100} \cdot d^2$$

dvs.

$$k = \text{prop} \cdot n \cdot d^2$$

som visar att k är prop. mot porositeten n och kapillärdiametern i kvadrat. Detta samband är av samma typ som

$$k = 5 \cdot d_p^2$$

6. Experimentell erfarenhet och teori visar, att mellan h_c och d_p råder i första approximationen ett inverst förhållande, dvs.

$$h_c = \frac{a}{d_p} \qquad (a)$$

där a är en konst., som beror av jordarten.

Med samma motivering gäller att

$$k = c \cdot d_p^2 \qquad (b)$$

där c är en konstant, som likaså beror av jordarten.

Kvadreras ekvationen (a), erhålles

$$h_c^2 = \frac{a^2}{d_p^2} \qquad (c)$$

Ledvis multiplikation av ekvationerna (c) och (b) ger

$$h_c^2\, d_p = a^2 c = \text{konst.} \qquad (d)$$

V.S. V.

Enligt markfysiken kan vi för rena enhetliga fraktioner sätta $a = 0{,}6$ och $c = 5$. Detta ger

$$h_c^2\, k = 1{,}8 \qquad (e)$$

Om $\underline{k} = 10^{-4}$ cm/s, får vi för skattning av $\underline{h_c}$ ekvationen

$$h_c^2 \cdot 10^{-4} = 1{,}8$$

som ger

$$h_c = 100 \sqrt{1{,}8} = 134 \text{ cm v.p.}$$

<u>Svar:</u> $h_c = 134$ cm

7. Enligt markfysiken gäller, att

$$h_t = \frac{0{,}3}{d_v} \quad \text{(med alla mått i cm)}$$

Mot porstorleken $\underline{d_v} = 0{,}06$ mm svarar då $\underline{h_t} = 0{,}3/0{,}006 = 50$ cm v.p. och mot porstorleken $\underline{d_v} = 0{,}02$ mm svarar $\underline{h_t} = 0{,}3/0{,}002 = 150$ cm v.p.

Genom avläsning av det bilagda diagrammet kan då följande översikt upprättas:

Material nr	1.	2.	3.	4.	5.	6.
h_t = 50 cm v.p.	4,6	44,6	42,6	8,1	15,6	25,9
h_t = 150 " "	3,2	39,9	31,1	6,0	12,2	19,3
Differens	1,4	4,7	11,5	2,1	3,4	6,6
Jordart	Sand	Lera	Torv	Stig. proc. torv i sanden		

Sanden håller endast 1,4 volymsprocent, leran 4,7 och torven 11,5 volymprocent vatten i det angivna porstorleksintervallet. Vi ser sedan, hur den aktuella volymprocenten vatten stiger med ökad inblandning av torv i sanden.

8. Beträffande denna fråga se M.F.U. XI, föreläsningsanteckningar och fältdemonstration!

Skrivning i lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Onsdagen den 13 oktober 1971

För 5 poäng

1. Omvandla 1 bar till cm vattenpelare (visa hur omvandlingen göres !) och ange häremot svarande pF!

2. Vid en viss strömning antages den per tidsenhet genom en viss sektion av ledningen framrinnande vattenmängden q per tidsenhet t vara bestämt av uttrycket

$$q = f(t) = 0{,}005 + 0{,}002\ t \quad m^3/s$$

Hur stor vattenmängd passerar sektionen under de 5 första minuterna?

3. Vad betyder formeln

$$n = 100\left(1 - \frac{\gamma_t}{\rho}\right)$$

och vilket värde kan lämpligen åsättas ρ för a. minerogen substans och b. organogen substans (humus)? Ge några exempel på storleken av γ_t!

4. En jords torra volymvikt är γ_t kg/dm^3 och substansens täthet är ρ g/cm^3. Hur stor är denna jords specifika tyngd eller tunghet under vatten dvs. i anslutning till vanligt språkbruk volymvikt under vatten. Vattnets täthet ρ_v = 1,00 g/cm^3.

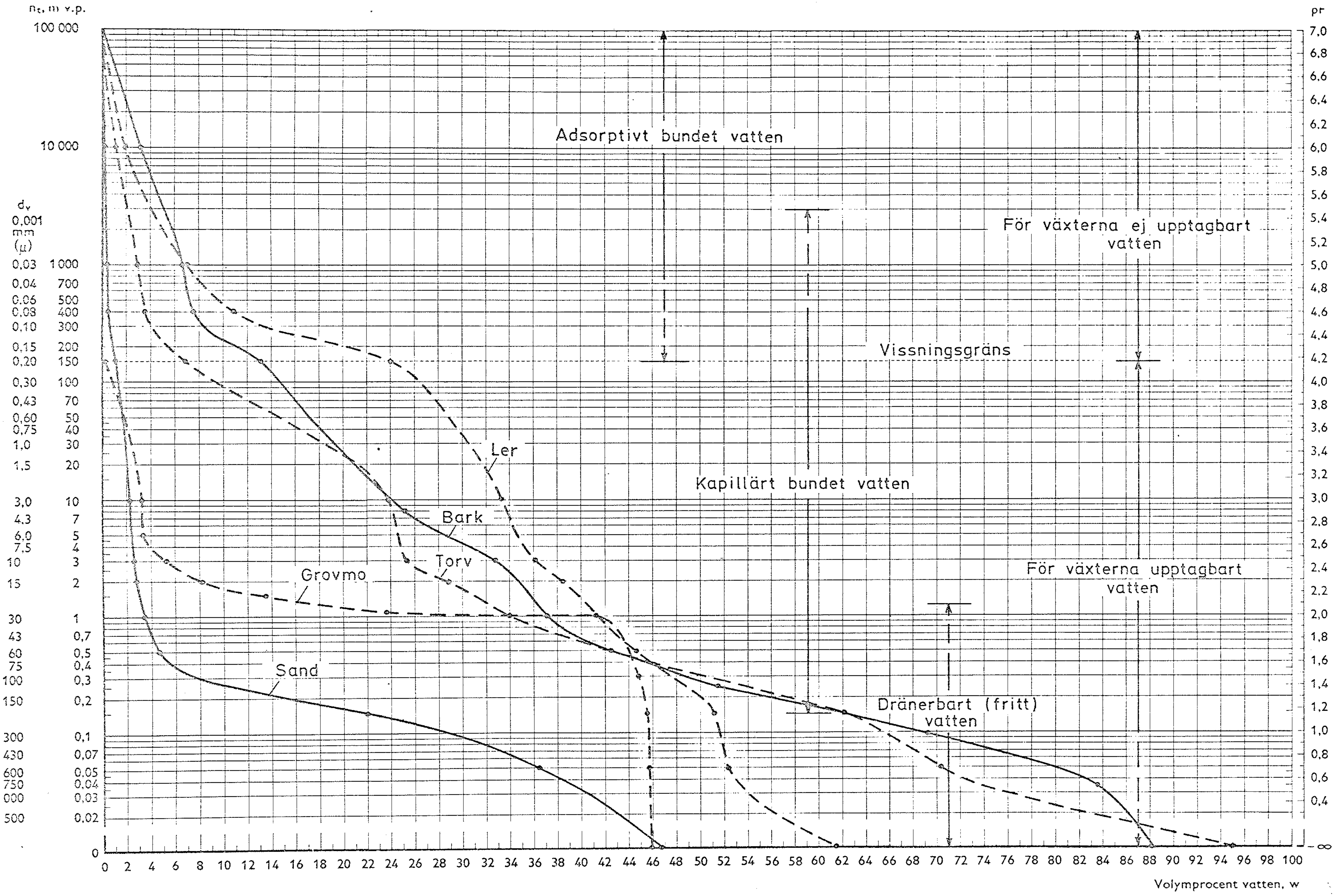
Num. ex. γ_t = 1,62 kg/dm^3 och ρ = 2,70 g/cm^3.

5. Definiera begreppen bindningstryck, vattenbindande tryck och vattenavförande tryck!

6. Definiera begreppet ekvivalent pordiameter och härled teoretiskt ekvivalentpordiametern för en mycket smal rektangulär por!

7. Huru lyder Darcys lag, och skatta på lämpligt sätt den mängd vatten, som per timma och m^2 passerar genom en 0,5 m mäktig bädd av sand vid tryckfallet 0,01 m v.p.

8. Skriv en kort förklarande text till vidstående diagram! Exemplifiera de upplysningar man kan erhålla från detsamma. Vad kallas diagrammet och vad kallas de enskilda kurvorna i diagrammet?



nt, m v.p.
pF
dv 0,001 mm (μ)
Adsorptivt bundet vatten
För växterna ej upptagbart vatten
Vissningsgräns
Kapillärt bundet vatten
För växterna upptagbart vatten
Dränerbart (fritt) vatten
Ler
Bark
Torv
Grovmo
Sand
Volymprocent vatten, w

Skrivning i lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Onsdagen den 13 oktober 1971

För 5 poäng

Svar, lösningar och kommentarer

1. Antag, att vattenpelarens höjd blir x cm.

Definitionsmässigt gäller för 1 bar, att 1 bar = 10^6 dyn/cm^2. Vi får då ekvationen

$$10^6 \text{ dyn} = 1 \text{ cm}^2 \circ x \text{ cm} \cdot 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 981 \text{ cm/s}^2$$

$$10^6 \text{ dyn} = 981x \text{ g cm/s}^2 = 981x \text{ dyn}$$

$$x = 1019{,}4 \approx 1020 \text{ cm v.p.}$$

Om ett noggrannare värde önskas, måste i första hand vattnets temperatur och den lokala accelerationen beaktas.

Betraktas 1 bar som mått på ett aktuellt bindningstryck (tension) så gäller enligt definitionen

$$pF = \log h_t = \log 1020 = 3{,}009 \approx 3{,}0$$

Svar: 1 bar = 1020 cm v.p.
pF = 3,0

2. Generellt gäller, om det momentana flödet per tidsenhet genom en sektion är q, att

$$dQ = q\,dt$$

där dQ är den vätskevolym, som passerar en betraktad sektion (= tvärsnittsarea) under tiden dt.

I detta fall gäller således

$$dQ = q\,dt = f(t)\,dt = (0{,}005 + 0{,}002t)\,dt$$

och

$$Q = \int q\,dt = \int_0^{300} (0{,}005 + 0{,}002t)\,dt$$

som ger

$$Q = \Big|_{0}^{300} 0{,}005t + 0{,}001t^2 = 91{,}5 \text{ m}^3$$

Eftersom flödet q växer lineärt gäller även för beräkning av den sökta vattenmängden

$$Q = \frac{0{,}005 + 0{,}005 + 0{,}002 \cdot 300}{2} \cdot 300 = 91{,}5 \text{ m}^3$$

Svar: Den sökta vattenmängden är 91,5 m^3

3. I den anförda formeln betyder $\underline{n}$ porositeten i en jord, ett jordprov eller ett jordlager, där torra volymvikten är $\underline{\gamma_t}$ kg/dm^3 och jordmaterialets täthet är $\underline{\rho}$ g/cm^3 (= $\underline{\rho}$ kg/dm^3).

För rena mineraljordar kan $\underline{\rho}$ (= $\underline{\rho_m}$) sättas = 2,70 g/cm^3. Man ser också ofta värdet 2,65 g/cm^3.

För organogen substans (humus) kan $\underline{\rho}$ (= $\underline{\rho_h}$) sättas = 1,50 g/cm^3 ($1{,}35 \leq \underline{\rho_h} \leq 1{,}60$).

Om i rena mineraljordar (index $\underline{M}$ för max. och index $\underline{m}$ för min.) $\underline{n_M}$ sättes = 70 volymprocent, blir $\underline{\gamma_{t,m}} = 0{,}30 \cdot 2{,}70 = 0{,}81$ kg/dm^3 och, om $\underline{n_m} = 30$, blir $\underline{\gamma_{t,M}} = 0{,}70 \cdot 2{,}70 = 1{,}89$ kg/dm^3.

Om i rena mulljordar, organogena jordar, $\underline{n_M}$ sättes = 95 volymprocent (gäller t.ex. för vitmossjordar), blir $\underline{\gamma_{t,m}} = 0{,}05 \cdot 1{,}5 = 0{,}075$ kg/dm^3, medan $\underline{\gamma_{t,M}}$ här är svårare att ange beroende på den successiva inblandningen av minerogen substans (se nedan!).

För matjordar kommer $\underline{\gamma_t}$ att genomgående bero av halten organisk substans, som ju påverkar $\underline{\rho}$, och mera slumpmässigt av det aktuella bruknings- och strukturtillståndet.

Är halten org. substans $\underline{p}$ viktsprocent, så kan den i problemet och frågan givna formeln skrivas

$$\gamma_t = \left(1 - \frac{n}{100}\right)\rho$$

där

$$\frac{100}{\rho} = \frac{p}{\rho_h} + \frac{100 - p}{\rho_m}$$

Antag, att en matjord innehåller $\underline{p}$ = 10 viktsprocent humus och att dess aktuella porositet är $\underline{n}$ = 55 procent. Då gäller

$$\gamma_t = (1 - \frac{55}{100})\varrho$$

och

$$\frac{100}{\varrho} = \frac{10}{1,5} + \frac{90}{2,7}$$

som ger $\underline{\varrho} = 2,50$ g/cm^3 och $\underline{\gamma_t} = 1,13$ kg/dm^3.

I en matjord, vars humushalt är 40,0 viktsprocent blir $\underline{\varrho} = 2,05$ g/cm^3 under samma förutsättningar om $\underline{\varrho_h}$ och $\underline{\varrho_m}$.

Av olika anledningar växer nu också $\underline{n}$ med mull- eller humushalten. Om vi i detta fall sätter $\underline{n} = 85,0$ procent blir

$$\gamma_t = (1 - 0,85)\ 2,05 = 0,308 \text{ kg/dm}^3 \quad \text{eller avrundat}$$

$$\underline{\gamma_t} = 0,31 \text{ kg/dm}^3$$

De gjorda beräkningarna kan sammanfattas i nedanstående schema:

<u>Mineraljordar</u> (alvjordar), $\underline{\varrho} = 2,70$ g/cm^3, $30 \leq \underline{n} \leq 70$
$0,81 \leq \underline{\gamma_t} \leq 1,89$

<u>Rena mulljordar</u> (alvjordar), $\underline{\varrho} = 1,50$ g/cm^3, $80 \leq \underline{n} \leq 95$
$0,075 \leq \underline{\gamma_t} \leq 0,30$

<u>Matjordar</u>, $1,50 \leq \underline{\varrho} \leq 2,70$ g/cm^3 $30 \leq \underline{n} \leq 95$
$0,075 \leq \underline{\gamma_t} \leq 1,89$

4. En jord, som har volymvikten $\underline{\gamma_t}$ kg/dm^3 angripes av tyngdkraften med $\underline{\gamma_t}$ kp/dm^3, varför <u>tungheten</u> numeriskt är = volymvikten, då massenheten är kg och kraftenheten kp.

Massan $\underline{\gamma_t}$ kg med tätheten $\underline{\varrho}$ g/cm^3 upptar en volym, när den tänkes porfri, som är $\underline{\gamma_t}/\underline{\varrho}$ dm^3. Enligt Archimedes princip blir då tyngdförlusten $\underline{\gamma_t}/\underline{\varrho} \cdot 1$ kp, när kroppen nedsänkes i vatten och vattnets täthet sättes = 1 g/cm^3.

Följaktligen gäller för tyngden $\underline{\gamma'}$ av volymsenheten under vatten

$$\gamma' = \gamma_t - \frac{\gamma_t}{\varrho} \cdot 1 = \frac{\varrho - 1}{\varrho}\gamma_t \quad \text{kp/dm}^3 \tag{a}$$

<u>Annan lösning</u>: Porvolymen $\underline{n}$ i jorden är

$$n = 100(1 - \frac{\gamma_t}{\varrho}) \text{ dm}^3 \tag{b}$$

och provets volymvikt vattenmättat blir då

$$\gamma_{v,m} = (1 - \frac{n}{100})\varrho + \frac{n}{100} \quad \text{kg/dm}^3 \tag{c}$$

Tungheten under vatten $\underline{\gamma}'$ blir alltså

$$\gamma' = (1 - \frac{n}{100})\varphi + \frac{n}{100} - 1 \qquad (d)$$

dvs.

$$\gamma' = (1 - \frac{n}{100})(\varphi - 1) \qquad (e)$$

Denna ekvation kan erhållas direkt, om man betänker, att den skenbara (apparenta) tätheten under vatten måste bli $(\varphi - 1)$ g/cm^3.

Tyngden av volymen $(1 - n/100)$ dm^3 blir då

$$\gamma' = (1 - \frac{n}{100})(\varphi - 1)\ \text{kp/dm}^3 \qquad (f)$$

Det numeriska exemplet ger enligt formel (a)

$$\gamma' = \frac{\varphi - 1}{\varphi}\gamma_t = \frac{2,70 - 1}{2,70}\cdot 1,62 = 1,02\ \text{kp/dm}^3$$

och enligt formel (e)

$$\gamma' = (1 - \frac{n}{100})(\varphi - 1) = 0,60 \cdot 1,70 = 1,02\ \text{kp/dm}^3$$

där $\underline{n}$ beräknats med hjälp av formeln

$$n = 100(1 - \frac{\gamma_t}{\varphi}) = 100(1 - \frac{1,62}{2,70}) = 40,0\ \text{volymproc.}$$

Svar: Volymvikten $\underline{\gamma}'$ under vatten är

$$\gamma' = \frac{\varphi - 1}{\varphi}\gamma_t\ \text{kp/dm}^3$$

Det num. ex. ger $\underline{\gamma}' = 1,02$ kp/dm^3

5. Se kurslitteraturen och föreläsningarna! Se särskilt M.F.U. sid. 14!

6. Mot varje given godtyckligt, mer eller mindre oregelbundet begränsad poröppning och häremot svarande menisk kan ställas en cirkulärt begränsad por, vars diameter just är sådan, att den förmår uppta samma maximala kapillära spänning som den givna oregelbundet begränsade poren.

Om h_t är denna spänning, så definierar ekvationen

$$h_t = \frac{0,3}{d_v}$$

diametern d_v på den cirkulära por, som i maximalspänningssituationen är kapillärt ekvivalent med den givna poren. d_v benämnes ekvivalentpordiameter.

Enligt Laplaces ekvation (se föreläsningarna!) gäller

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{a}$$

där Δp är tryckdifferensen över en dubbelkrökt menisk i ett medium, vars ytspänning är α.

En menisk, som utspännes över en mycket smal rektangulär por, antar formen av en rotationscylinder med diametern = rektangelns bredd; den blir med andra ord enkelkrökt. Menisken över en cirkulärt begränsad por antar däremot formen av en halvsfär och blir dubbelkrökt.

Om den rektangulära porens bredd betecknas med b och den ekvivalenta pordiametern med d_v, så skall alltså gälla

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{\infty}\right) = \alpha \left(\frac{2}{d_v} + \frac{2}{d_v}\right) \tag{b}$$

som ger

$$d_v = 2b \tag{c}$$

Ekvivalentpordiametern till en mycket smal (och lång) rektangulär por är lika med två gånger porbredden.

7. Darcys lag lyder

$$Q = kA \frac{\Delta h}{\Delta l} t$$

där Q är den vattenmängd (vätskemängd), som under tiden t passerar genom den vinkelrätt mot strömmen ställda ytan A, då tryckfallet är Δh längdenheter vattenpelare (vätskepelare) per Δl längdenheter strömväg.

Proportionalitetskonstanten k benämnes genomsläpplighetstal eller permeabilitetskoefficient. Den beror både av den strömmande vätskan och det korniga system (kapillärsystem), i vilket strömningen sker.

Kvoten $\Delta h/\Delta l$ benämnes hydraulisk gradient, lutning eller fall och betecknas med I. Darcys lag kan då skrivas

$$Q = kAIt$$

Sättes $\underline{t}$ = tidsenheten, erhålles

$$q = kAI$$

och, om båda sidor divideras med $\underline{A}$, fås

$$v = \frac{q}{A} = kI$$

som för $\underline{I} = 1$ ger definitionen på $\underline{k}$.

$\underline{k}$ har alltså dimensionen hastighet cm/s, mm/tim., mm/dag etc.

För att lösa det numeriska exemplet måste först $\underline{k}$ på lämpligt sätt skattas. Sanden definieras av att $\underline{d_M} = 2$ mm och $\underline{d_m} = 0{,}2$ mm. Härur erhålles

$$d_{med} = \sqrt{2 \cdot 0{,}2} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}63 \text{ mm}$$

$\underline{k}$ skattas med hjälp av formeln $5d^2$. Alltså

$$k = 5 \left(\frac{\sqrt{0{,}4}}{10}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-2} \quad \text{cm/s}$$

Vi får med alla mått i cm

$$Q = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10000 \cdot \frac{1}{50} \cdot 3600 \quad \text{cm}^3/\text{tim}$$

$$Q = 14{,}4 \text{ l/tim}$$

<u>Svar:</u> $Q = k\,A\,\frac{\Delta h}{\Delta l} \cdot t$ och $Q = 14{,}4$ l/tim

8. Se föreläsningarna och litteraturen! T.ex. uppsatsen "Vattnet i jorden - Kommentarer till ett diagram"!

Skrivning i lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Lördagen den 8 april 1972

För 5 poäng

1. a) Definiera begreppen tryck och tryckkraft! b) Om trycket mot en yta beror av lägeskoordinaterna x och y, huru kan då de allmänna uttrycken för tryck och tryckkraft tecknas?

2. a) Omvandla trycket 1 atmosfär (atm., fys. atmosfär, normalatmosfär) till meter vattenpelare! Tätheten ρ för kvicksilver kan sättas = = 13,6 g/cm^3. b) Vilket pF svarar mot bindningstrycket 1 atm?

3. Skatta med någon lämplig formel tryckförlusten i en 500 m lång 2" järnrörsledning, som skall föra 100 l vatten per minut!

Anm. För att underlätta ber. ges här den uppkommande vattenhastigheten, som blir 0,85 m/s.

4. a) Vad säger formeln

$$\gamma = (1 - \frac{n}{100})(1 + \frac{w_1}{100})\rho$$

och b) skatta volymvikten för en lera med vattenhalten 20 viktsprocent!

5. Definiera och diskutera kortfattat begreppen fritt vatten och dränerbart vatten!

6. Definiera och ge några synpunkter på begreppet bindningstryck! Beräkna det kapillära bindningstryck som förorsakas av en por med ekvivalentdiamtern 6 μ!

7. a) Konstruera på bilagda diagramunderlag bindningskarakteristikan för material nr 5 (se bil. tabell!) och bestäm summaprocenten porer $< 3\,\mu$!

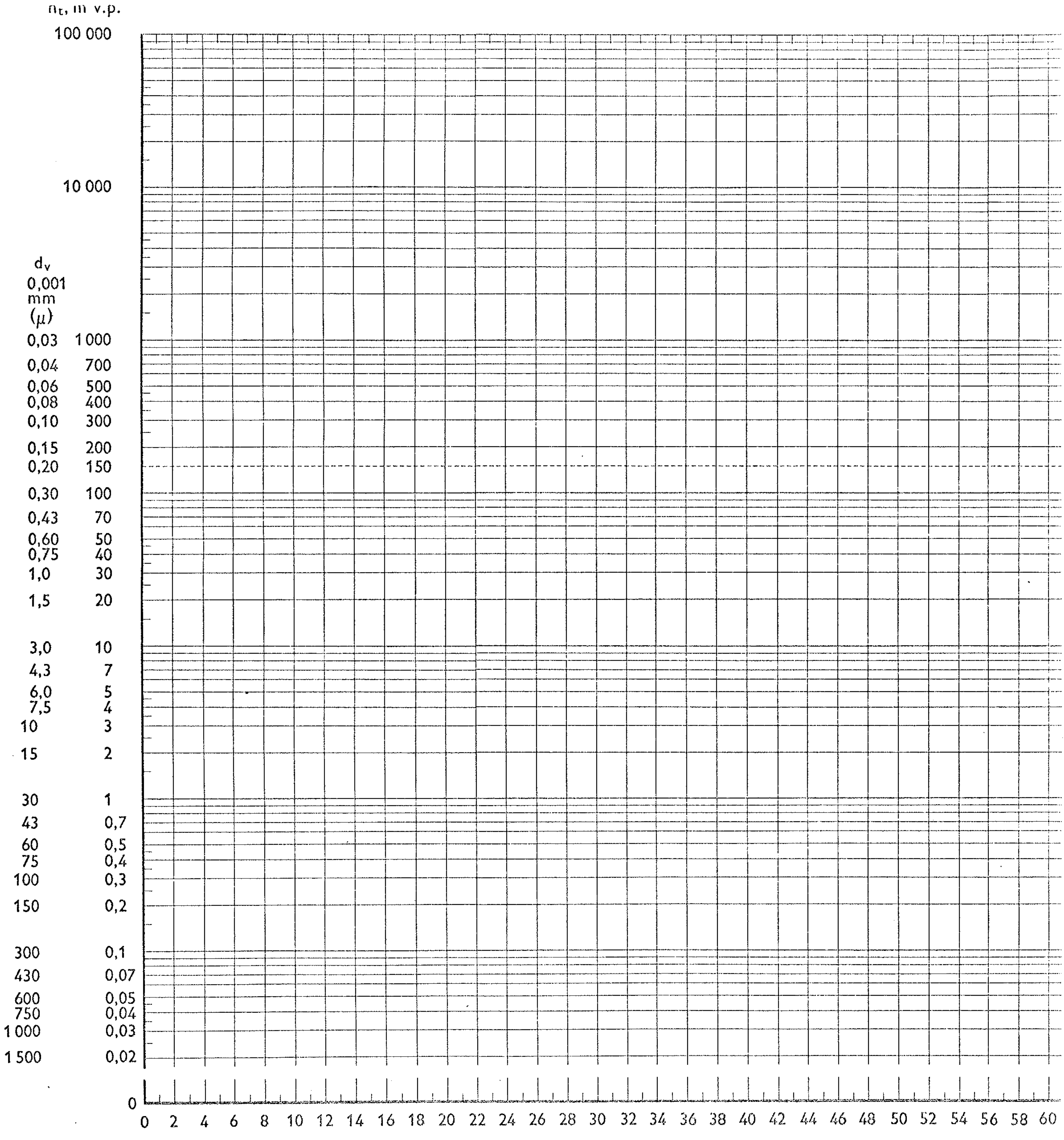
b) Konstruera likaledes på bilagda diagramunderlag ett n-diagram (volymsdiagram) för en en meter mäktig bädd av angivna material (nr 5)!

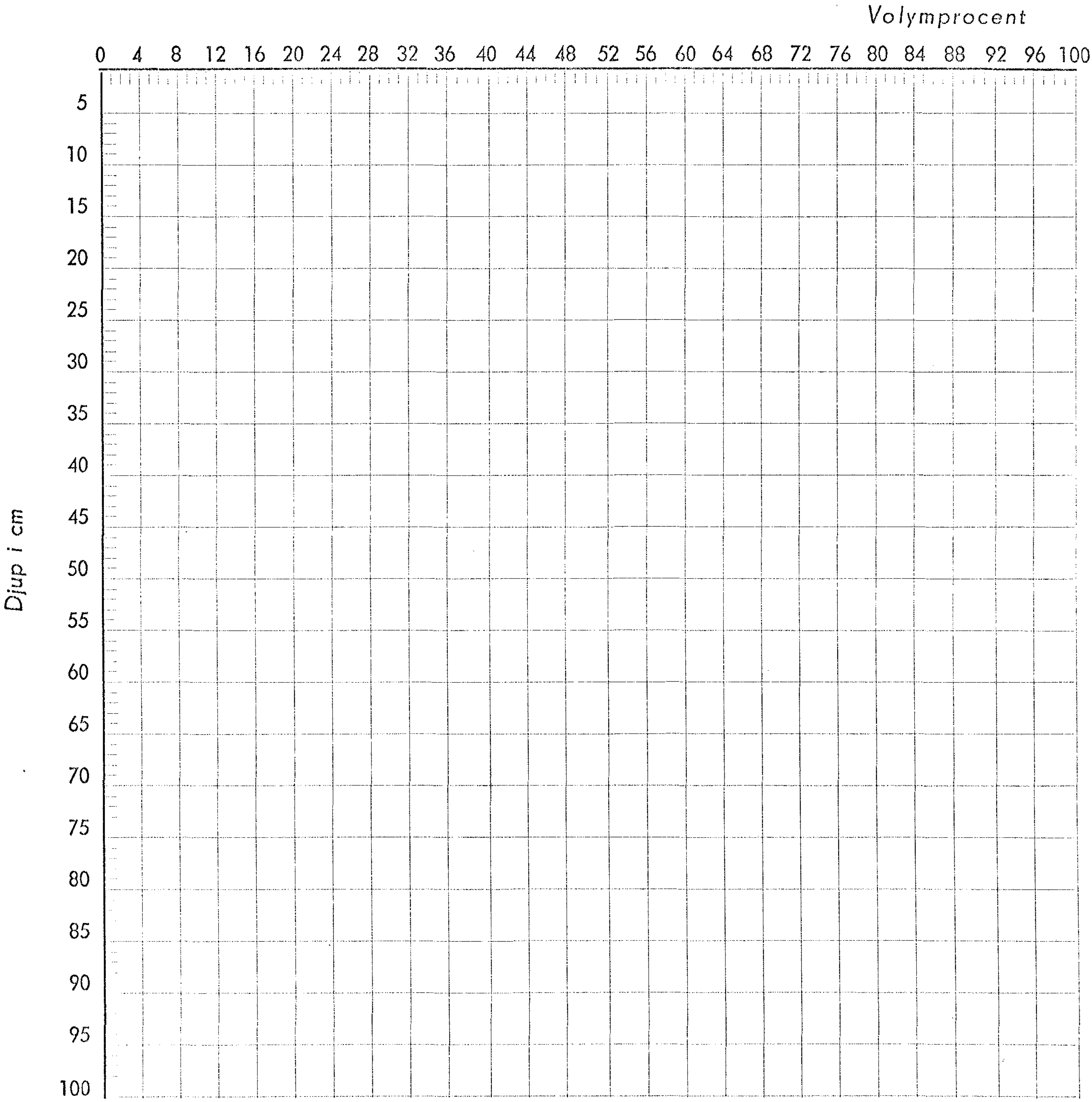
c) Rita sedan in vattenhaltskurvan för dräneringsjämvikt mot en grundvattenyta, som står på djupet 1 m dvs. vid bäddens bas.

8. Skatta på något lämpligt sätt hur mycket det får regna i mm/tim utan att ytvatten bildas på en finmojord!

Tabell 4. *Sammanställning av experimentellt bestämda värden över de olika grundmaterialens och blandmaterialens vattenhalt w_2 i volymprocent vid olika vattenavförande tryck h_t i meter vattenpelare (m v. p.). De vid de olika trycksteg uppkomna vattenhaltsminskningarna har blivit uträknade och införda i tabellen.*

Material nr	Porvolym %	Volymvikt γ_t kg/dm³	Vattenavförande tryck i m v. p. jämte differenser 0,05	Diff.	0,15	Diff.	0,50	Diff.	1,00	Diff.	2,00	Diff.	3,00	Diff.	10,0	Diff.	150	Diff.	400	Diff.	1 000	Diff.	10 000
1	46,6	1,43	36,5	14,4	22,1	17,5	4,6	1,0	3,6	0,7	2,9	0,5	2,4	0,1	2,3	1,3	1,0	0,5	0,5	0,1	0,4	0,1	0,3
2	61,5	1,06	52,3	1,2	51,1	6,5	44,6	3,2	41,4	2,8	38,6	2,4	36,2	2,9	33,3	9,2	24,1	13,3	10,8	3,7	7,1	5,3	1,8
3	94,9	0,081	70,3	8,2	62,1	19,5	42,6	8,6	34,0	5,2	28,8	3,5	25,3	1,4	23,9	17,1	6,8	3,3	3,5	0,7	2,8	1,6	1,2
4	50,2	1,33	38,0	14,4	23,6	15,5	8,1	1,4	6,7	1,1	5,6	0,9	4,7	1,2	3,5	1,2	2,3	1,5	0,8	0,1	0,7	0,3	0,4
5	59,4	1,08	43,9	12,8	31,1	15,5	15,6	2,7	12,9	1,4	11,5	1,2	10,3	1,3	9,0	6,2	2,8	1,6	1,2	0,2	1,0	0,5	0,5
6	71,1	0,76	53,4	9,4	44,0	18,1	25,9	5,0	20,9	2,6	18,3	1,8	16,5	1,3	15,2	11,1	4,1	2,1	2,1	0,3	1,8	1,0	0,8
7	64,9	0,95	59,4	0,9	58,5	9,5	49,0	4,2	44,8	4,4	40,4	3,0	37,4	3,4	34,0	12,3	21,7	9,2	12,5	4,3	8,2	6,1	2,1
8	70,3	0,80	61,0	1,8	59,2	10,0	49,2	4,6	44,6	4,6	40,0	3,6	36,4	3,4	33,0	13,5	19,5	8,5	11,0	3,7	7,3	2,6	4,7
9	78,7	0,55	66,9	3,0	63,9	14,3	49,6	6,8	42,8	5,3	37,5	2,1	35,4	3,1	32,3	16,7	15,6	7,3	8,3	2,7	5,6	3,9	1,7
10	48,5	1,39	35,7	14,4	21,3	11,4	9,9	1,3	8,6	0,8	7,8	0,8	7,0	1,1	5,9	3,0	2,9	1,7	1,2	0,1	1,1	0,7	0,4
11	53,7	1,24	40,6	9,9	30,7	14,0	16,7	2,5	14,2	1,7	12,5	1,4	11,1	1,5	9,6	5,2	4,4	2,6	1,8	0,1	1,7	1,1	0,6
12	62,0	1,01	46,9	7,5	39,4	16,3	23,1	3,6	19,5	2,4	17,1	2,0	15,1	1,7	13,4	7,6	5,8	3,2	2,6	0,6	2,0	1,2	0,8
13	72,1	0,72	55,5	5,1	50,4	18,0	32,4	5,6	26,8	3,6	23,2	2,7	20,5	2,3	18,2	12,3	5,9	3,2	2,7	0,4	2,3	1,4	0,9
14	49,6	1,36	38,8	9,7	29,1	10,9	18,2	2,2	16,0	1,7	14,3	1,0	13,3	1,5	11,8	5,2	6,6	4,0	2,6	0,3	2,3	1,7	0.6
15	54,9	1,21	42,9	7,0	35,9	12,9	23,0	3,0	20,0	2,1	17,9	1,7	16,2	2,0	14,2	6,3	7,9	4,6	3,3	0,8	2,5	1,7	0,8
16	61,2	1,04	47,0	5,8	41,2	13,8	27,4	3,9	23,5	2,4	21,1	2,3	18,8	1,9	16,9	6,3	10,6	7,0	3,6	0,8	2,8	1,9	0,9
17	52,4	1,29	43,3	4,7	38,6	10,4	28,2	2,6	25,6	2,4	23,2	1,8	21,4	2,1	19,3	7,1	12,2	6,7	5,5	1,3	4,2	3,1	1,1
18	58,4	1,12	48,2	3,8	44,4	11,1	33,3	3,5	29,8	2,0	27,8	3,4	24,4	2,5	21,9	8,3	13,6	7,0	6,6	1,9	4,7	3,5	1,2
19	65,5	0,91	54,8	2,9	51,9	13,3	38,6	4,7	33,9	3,4	30,5	2,7	27,8	2,6	25,2	11,7	13,5	6,3	7,2	2,5	4,7	3,3	1,4


h_t, m v.p.
100 000
10 000
d_v
0,001
mm
(μ)
0,03 1 000
0,04 700
0,06 500
0,08 400
0,10 300
0,15 200
0,20 150
0,30 100
0,43 70
0,60 50
0,75 40
1,0 30
1,5 20
3,0 10
4,3 7
6,0 5
7,5 4
10 3
15 2
30 1
43 0,7
60 0,5
75 0,4
100 0,3
150 0,2
300 0,1
430 0,07
600 0,05
750 0,04
1 000 0,03
1 500 0,02
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60


Volymprocent
0 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40 44 48 52 56 60 64 68 72 76 80 84 88 92 96 100
Djup i cm
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100

Skrivning i lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Lördagen den 8 april 1972

För 5 poäng

Svar, lösningar och kommentarer

1. a) Tryck definieras som kraft per ytenhet och tryckkraft som den totala kraft F som verkar på en yta A.

Således gäller, om p betecknar trycket

$$p = F/A$$

eller

$$F = p\,A$$

För vätskor, som befinner sig i relativ vila, gäller att det av dem förorsakade vätsketrycket verkar vinkelrätt mot den betraktade ytan dvs. p är en normalkraft/ytenhet.

b) Om trycket mot en yta beror av lägeskoordinaterna, så gäller tydligen att p kan betraktas som en funktion av (de rätvinkliga) lägeskoordinaterna x och y. Således

$$p = p(x, y)$$

där p(x, y) symboliskt betecknar det i ett aktuellt fall gällande funktionssambandet.

För ytelementet dA gäller då

$$dF = pdA = p(x, y)\,dA$$

eller

$$p = \frac{dF}{dA} = p(x, y)$$

och

$$F = \int_{(A)} p(x, y)\,dA$$

där integralen skall tas över hela ytan A.

2. a) Antag x m vattenpelare.

1 atm = 760 mm Hg (= kvicksilver). Kan fås ur Elfymatabellen eller ev. ur minnet. Följaktligen skall en <u>x</u> m hög vattenpelare balansera en 760 mm hög kvicksilverpelare. Vi uppställer jämviktsekvationen med alla mått i MKS-systemet. Således

$$p = \rho gh = 1000 \cdot g \cdot x = 13{,}6 \cdot 1000 \cdot g \cdot 0{,}760 \text{ N/m}^2$$

$$x = 13{,}6 \cdot 0{,}760 = 10{,}336 \text{ m} = 10{,}34 \text{ m}$$

Vi kan också skriva jämviktsekvationen med hjälp av alla mått i C-g-s-enheter. Således

$$p = \rho\, g\, h = 1 \cdot g \cdot 100x = 13{,}6 \cdot g \cdot 76 \text{ dyn/cm}^2$$

$$x = 13{,}6 \cdot 0{,}760 = 10{,}336 \text{ m} = 10{,}34 \text{ m}$$

<u>Svar</u>: 10,34 m

b) pF definieras av ekvationen

$$pF = \log h_t$$

där $\underline{h_t}$ är bindningstrycket i cm v.p. (vattenpelare).

Följaktligen i detta fall

$$pF = \log h_t = \log 1034 = 3{,}0154 = 3{,}0$$

<u>Svar</u>: pF 3,0

3. Skattningen genomföres med hjälp av Darcys-Weisbachs ekv.

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

varvid enligt föreläsningarna λ sättes = 0,03.

Vi får (2" = 2 · 25 = 50 mm)

$$h_f = 0{,}03 \cdot \frac{500}{0{,}05} \cdot \frac{\overline{0{,}85}^2}{2 \cdot 9{,}81} = 300 \cdot 0{,}7225 \cdot 0{,}0510$$

$$h_f = 15{,}3 \cdot 0{,}7225 = 11{,}05 \text{ m v.p.} = 11{,}1 \text{ m v.p.}$$

Skattningen kan också genomföras med de Chezys formel

$$v = C\sqrt{R_h\, I}$$

där C enl. föreläsningarna sättes = 51.

Vi får

$$0{,}85 = 51 \sqrt{\frac{0{,}05}{4} \, I}$$

$$I = \frac{0{,}85^2 \cdot 4}{51^2 \cdot 0{,}05}$$

$$h_f = 500\,I = \frac{500 \cdot 0{,}7225 \cdot 4}{2601 \cdot 0{,}05} = 11{,}11 = 11{,}1 \text{ m v.p.}$$

Svar: $h_f = 11{,}1$ m v.p.

Anmärkning

Skattningen kan ej genomföras med Hagen-Poiseuilles lag, ty strömningen är turbulent. En beräkning av Reynolds tal R_e ger

$$R_e = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{85 \cdot 5}{0{,}01} = 42500$$

4. a) Formeln

$$\gamma = \left(1 - \frac{n}{100}\right)\left(1 + \frac{w_1}{100}\right)\rho$$

uttrycker sambandet mellan volymvikten (kg/dm^3) hos en jord, dess porositet n, vattenhalt i viktsprocent av torrsubstansen och kornens eller jordmaterialets täthet ρ (g/cm^3, kg/dm^3).

b) Lerans porositet sättes lämpligen = 50 proc. och ρ = 2,70 g/cm^3. Vi får då

$$\gamma = \left(1 - \frac{50}{100}\right)\left(1 + \frac{20}{100}\right) 2{,}70$$

$$\gamma = 0{,}50 \cdot 1{,}2 \cdot 2{,}70 = 1{,}62$$

Svar: b) $\gamma = 1{,}62$ kg/dm^3

5. Se föreläsningarna och kurslitteraturen, särskilt M.F.U. XX, s. 16 och 17!

6. Beträffande begreppet bindningstryck se föreläsningarna och kurslitteraturen!

Mellan ekvivalentpordiametern d_v och bindningstrycket h_t (det kapillära bindningstrycket) råder definitionsmässigt sambandet

$$h_t = \frac{0,3}{d_v}$$

I detta fall således med $\underline{d_v} = 6\ \mu = 6 \cdot 10^{-4}$ cm

$$h_t = \frac{0,3}{6 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m v.p.}$$

<u>Svar</u>: Bindningstrycket $\underline{h_t} = 500$ cm v.p.
(= 5 m v.p. = 0,5 kp/cm^2 = 0,5 at)

7. a) <u>Bindningskarakteristikan</u> för material nr 5 konstrueras genom direkt inprickning av tabellens värden, varefter punkterna förenas medelst en "mjukt" förlöpande kurva.

Summaprocenten porer $< 3\ \mu$ bestämmes på följande sätt: Tabellen liksom wh_t-kurvan ger att mot spänningen (tensionen) 10 m v.p. svarar porstorleken 3 µ. Vattenhalten är då 9,0 proc. Uttryckes detta procenttal i procent av totala porositeten erhålles summaprocenten $\underline{y}$. Således

$$y = 100\ \frac{w_2}{n} = 100\ \frac{9}{59,4} = 15,2$$

där $\underline{n}$ enl. tabellen satts = 59,4 proc. Summaprocenten porer $< 3\ \mu$ är alltså 15,2 proc.

c) <u>n-diagrammet</u> (volymsdiagrammet) kan också direkt konstrueras med utgångspunkt från tabellens värden. Då bädden (profilen) är homogen dvs. alltigenom består av samma material i likartad lagring (struktur) blir kurvorna för $\underline{n}$ och $\underline{w_v}$ räta linjer parallella med djupaxeln. Likaså blir <u>tensions- eller avsugningskurvorna</u> räta linjer. I diagrammet har inlagts sex sådana kurvor, $\underline{w_{t,h}}$-kurvor.

Kurvan för vattenhaltsjämvikt mot en grundvattenyta på djupet h_o = 1,0 m kan nu lätt inprickas, då ju tensionen, det vattenavförande respektive det vattenbindande trycket måste växa lineärt med höjden över grundvattenytan enligt uttrycket

$$h_t = h_o - z = 100 - z$$

där $\underline{z}$ är djupet i cm.

Sålunda gäller tydligen, att fem centimeter över gr.v.y. är $\underline{h_t}$ = 0,05, vilket svarar mot $\underline{w}$ = 43,9 proc. På samma sätt är femton centimeter över gr.v.y. $\underline{h_t}$ = 0,15, vilket enl. tab. ger $\underline{w}$ = 31,1 proc. osv.

Genom avl. på bindningsdiagrammet kan även varje annat värdepar $\underline{wh_t}$, som ej är angivet i tabellen, erhållas och avsättas i $\underline{n}$-diagrammet.

8. Vid stationär infiltration och nedsjunkning av vatten mot en grundvattenyta i en homogen profil måste gälla

$$v = k\ I$$

I fortfarighetstillståndet blir I = 1, varför

$$v = k$$

Nu gäller enligt M.F.U.

$$k = 5\ d^2\ \text{cm/s}$$

eller

$$k = 3600 \cdot 5\ d^2 = 1,8 \cdot 10^4\ d^2\ \text{cm/tim}$$

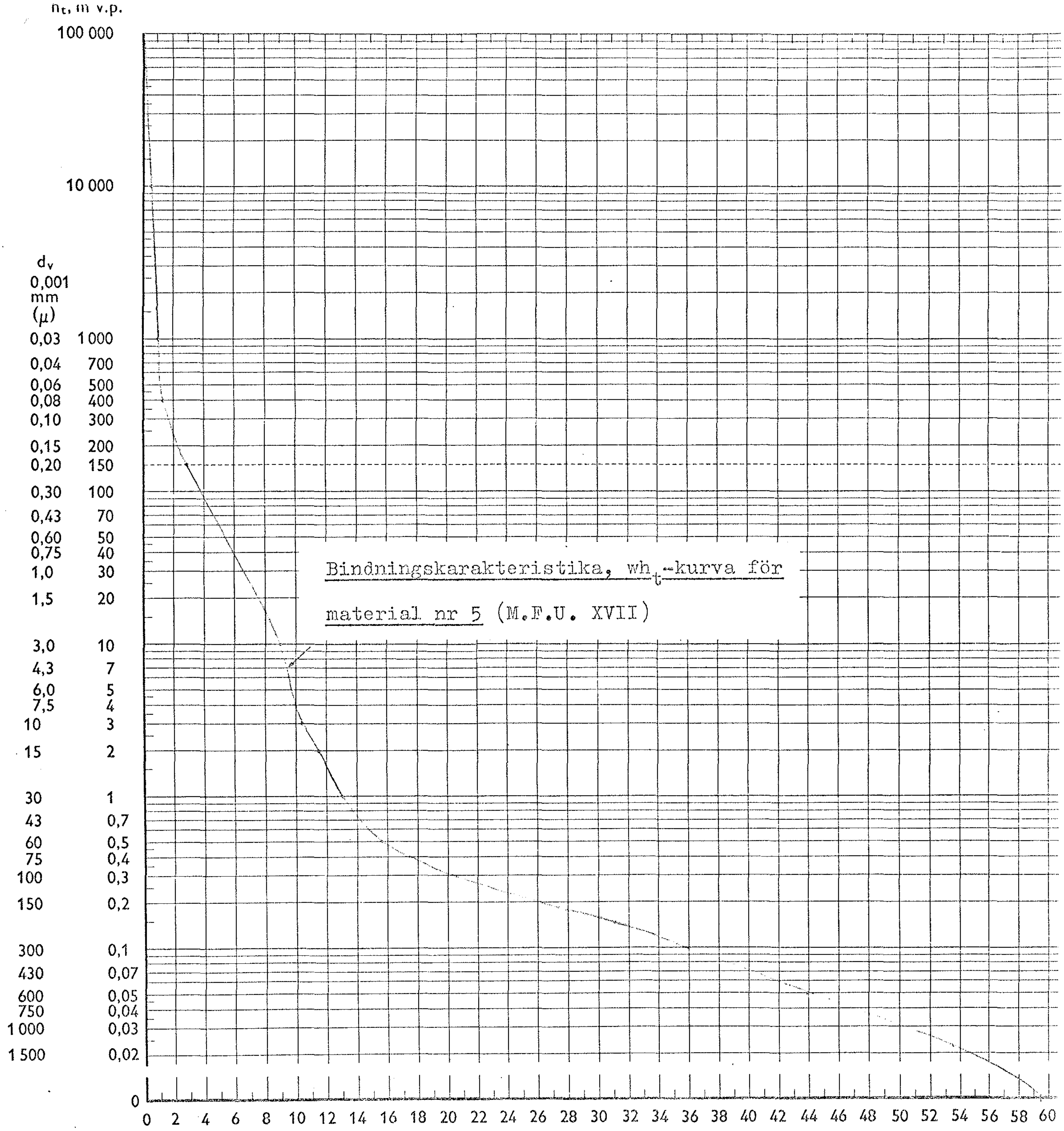
Finmon bestäms av gränserna $\underline{d_m} = 0,02 \leq d \leq 0,06 = \underline{d_M}$.

Detta ger

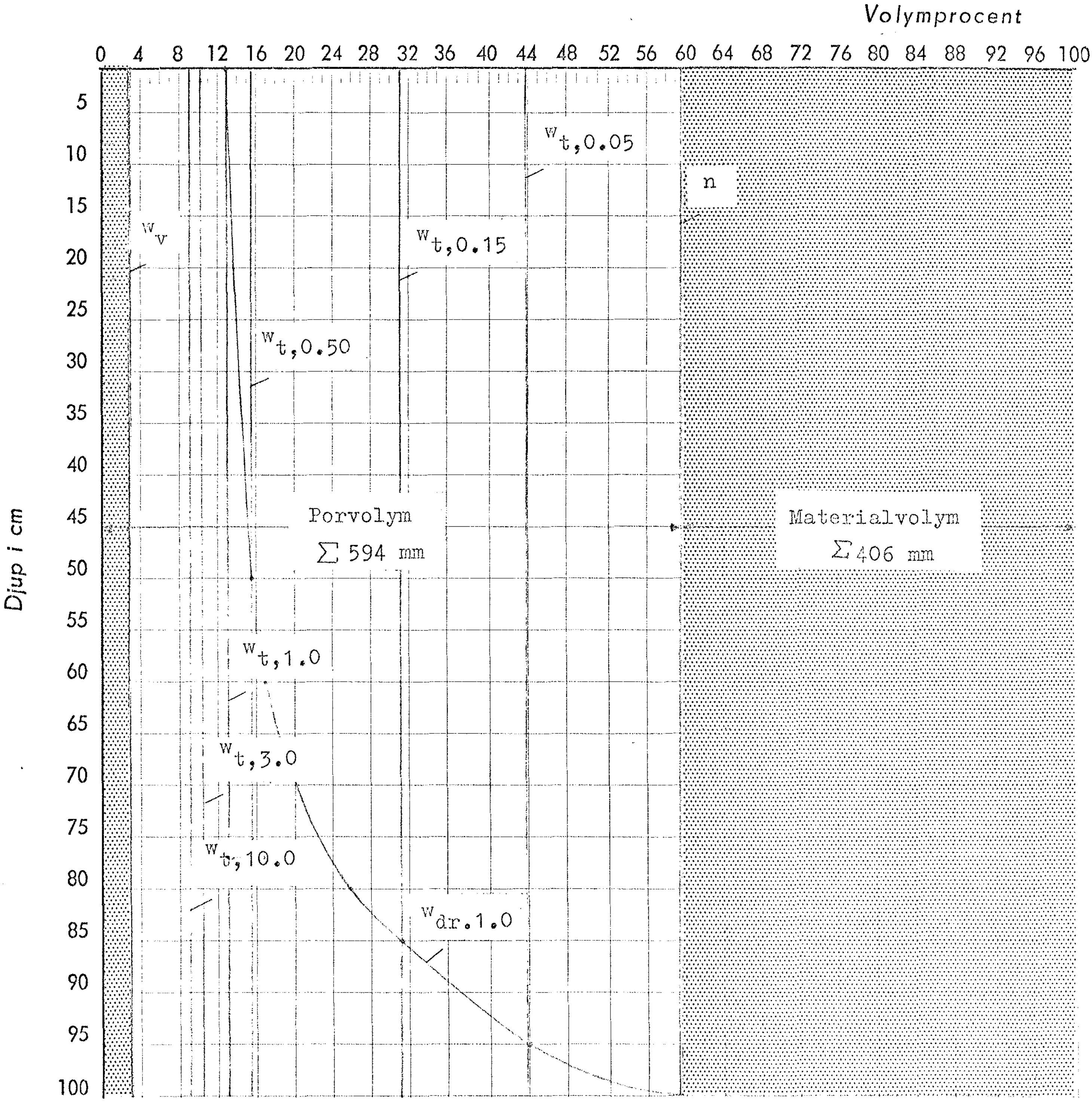
$$v_{max} = 1,8 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot \overline{0,006}^2 = 1,8 \cdot 3,6 = 6,48\ \text{mm/tim}$$

$$v_{min} = 1,8 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot \overline{0,002}^2 = 1,8 \cdot 0,4 = 0,72\ \text{mm/tim}$$

<u>Svar:</u> Finmojorden förmår ta emot mellan 6,5 och 0,7 mm nederbörd per timme utan att ytvatten bildas.


h_t, m v.p.
100 000
10 000
d_v
0,001
mm
(μ)
0,03 1 000
0,04 700
0,06 500
0,08 400
0,10 300
0,15 200
0,20 150
0,30 100
0,43 70
0,60 50
0,75 40
1,0 30
1,5 20
3,0 10
4,3 7
6,0 5
7,5 4
10 3
15 2
30 1
43 0,7
60 0,5
75 0,4
100 0,3
150 0,2
300 0,1
430 0,07
600 0,05
750 0,04
1 000 0,03
1 500 0,02
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60
Bindningskarakteristika, wh_t-kurva för
material nr 5 (M.F.U. XVII)

Volymsdiagram för en <u>en</u> meter mäktig homogen bädd av material nr 5 (M.F.U. XVII).



Skrivning i Lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Fredagen den 19 maj 1972

För 5 poäng

1. En behållare för vatten begränsas av en vertikal plan vägg. Väggens bredd är b och vattendjupet är h.

Beräkna den av vattentrycket förorsakade tryckkraften F a) med stöd av minnesformel b) genom att uppställa uttrycket för elementartryckkraften dF och därefter integrera.

Tätheten för vatten betecknas med ρ_v.

c) Beräkna sedan F i kp, om $b = 5$ m, $h = 3$ m och $\rho_v = 1$ kg/dm^3.

2. En vertikalt stående cylindrisk behållare för vatten (hydrofor) har ett litet hål i cylinderväggen. Hålet är beläget 1 m under vattenytan i behållaren och övertrycket i behållaren är 2,5 kp/cm^2.

Hur stor blir vattnets utströmningshastighet?

3. I en engelsk lärobok i geoteknik finns nedanstående formel för beräkning av torra volymvikten γ_t

$$\gamma_t = \frac{\rho}{1 + e}$$

där ρ är kornmaterialets täthet och e är portalet.

Bevisa formeln!

4. Ange och definiera kortfattat de olika vattenhaltszoner, som förekommer i en jordprofil, när man tänker sig observationsmässigt gå från lager, som ligger under grundvattenytan, och upp mot lager, som ligger omedelbart under markytan.

Rita en schematisk skiss över profilen!

5. Rita på rutat papper ett schematiskt volymsdiagram (n-diagram) för en lerjord ned till en meters djup. Inför olika förekommande kurvor, ange deras namn och betydelse! Ange eller markera genom kurvornas lägesplacering och dragning kunskap om storleksordningar på olika vattenhalter!

6. Enligt M.F.U. XX, s. 38, är kornstorleksfördelningen i markprofilen från Offer definierad av följande frekvenser i viktsprocent: ler 33 proc., finmjäla 38 proc., grovmjäla 17 proc., finmo 5 proc., grovmo 3 proc., sand 1 proc. och glödförlust 3 procent. Torra volymvikten är 1,52 kg/dm^3.

Skatta vissningsgränsen i viktsprocent och i volymprocent!

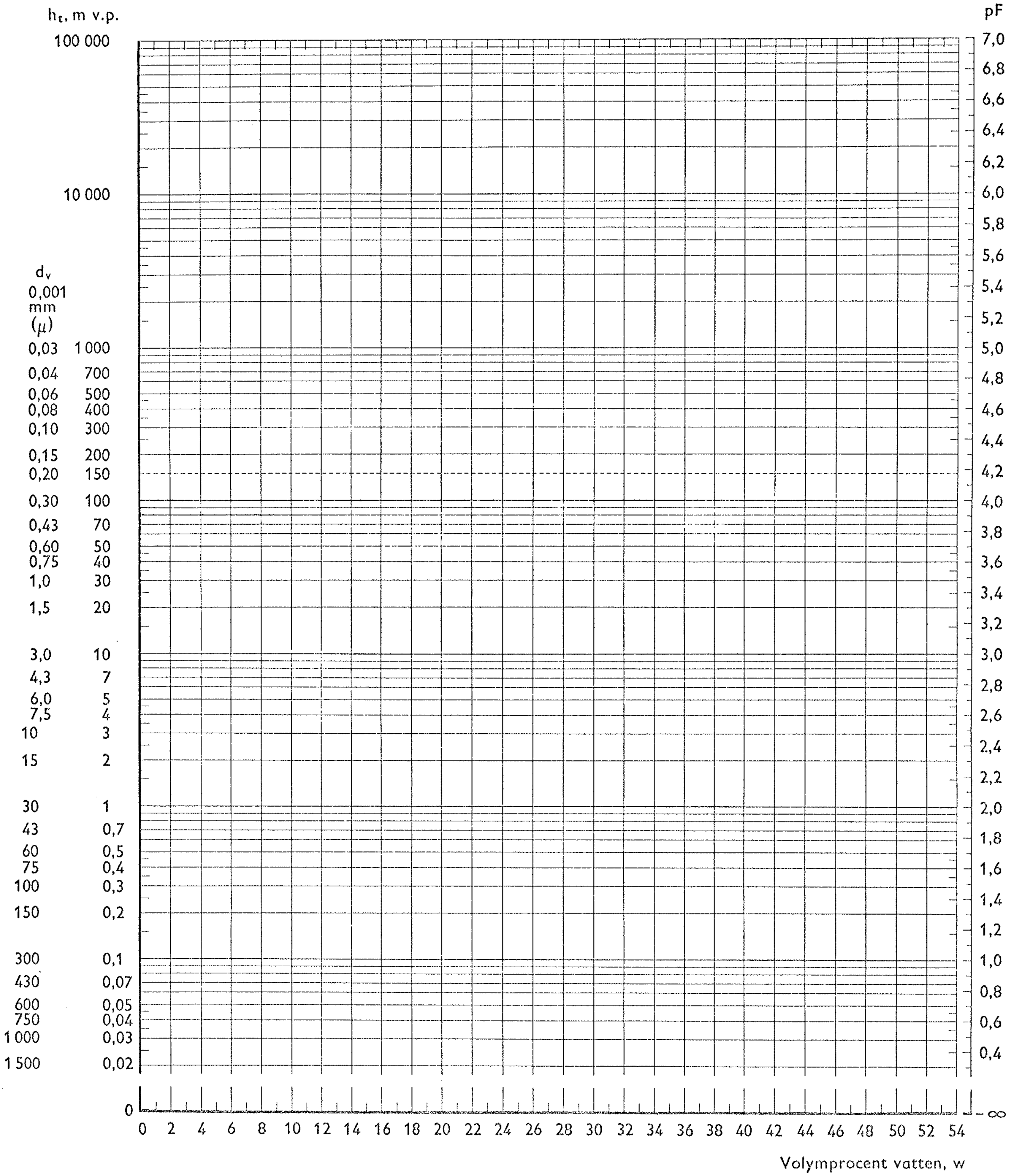
7. Enligt M.F.U. XX, s. 36-37, gäller för markprofilen nr 2 från Röbäcksdalen i lagret 40-50 cm djup följande tabellutdrag över sammanhörande $\underline{w}$- och $\underline{h_t}$-värden:

h_t m v.p.	0	0,05	1,0	3,0	6,0	10,0	150	400	1000	10000	100000
w vol-proc.	52,0	51,3	50,2	47,8	29,6	27,6	8,6	3,0	2,3	0,8	0

a) Konstruera på bilagda diagramunderlag bindningskarakteristikan för detta lager!

b) Bestäm sedan, hur stor del av totala porvolymen, som ligger i porstorleksintervallet 0,01 mm $\leq \underline{d_v} \leq$ 0,005 mm!

8. Beskriv makrostrukturens utbildning och variation med djupet i en gyttjelera! Ange speciellt den existerande strukturens betydelse för genomsläppligheten!


h_t, m v.p.
pF
100 000
10 000
d_v
0,001
mm
(µ)
0,03 1 000
0,04 700
0,06 500
0,08 400
0,10 300
0,15 200
0,20 150
0,30 100
0,43 70
0,60 50
0,75 40
1,0 30
1,5 20
3,0 10
4,3 7
6,0 5
7,5 4
10 3
15 2
30 1
43 0,7
60 0,5
75 0,4
100 0,3
150 0,2
300 0,1
430 0,07
600 0,05
750 0,04
1 000 0,03
1 500 0,02
0
7,0 6,8 6,6 6,4 6,2 6,0 5,8 5,6 5,4 5,2 5,0 4,8 4,6 4,4 4,2 4,0 3,8 3,6 3,4 3,2 3,0 2,8 2,6 2,4 2,2 2,0 1,8 1,6 1,4 1,2 1,0 0,8 0,6 0,4
∞
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54
Volymprocent vatten, w

Skrivning i Lantbrukets hydroteknik

Agrohydrologi

Fredagen den 19 maj 1972

För 5 poäng

Svar, lösningar och kommentarer

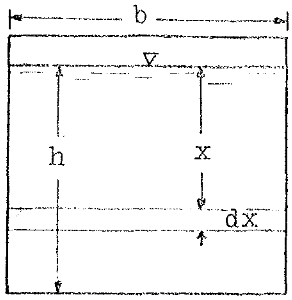
1. a) Minnesformeln lyder i ord: den hydrostatiska tryckkraften F mot en plan yta är lika med tyngden av en vätskepelare, som har den givna ytan A till bas och ytans tyngdpunktsavstånd z_o till den fria vätskeytan som höjd, dvs. i formel

$$F = \rho g z_o A$$

I detta fall således

$$F = \rho g \frac{h}{2} hb = \rho gbh^2/2$$

b) Vi ritar en enkel figur och inför beteckningar, vilkas betydelse torde framgå av figuren



$$dF = \rho g x bdx$$

$$F = \rho gb \int_0^h xdx = \rho gb \left| \frac{x^2}{2} \right._0^h = \rho gbh^2/2$$

c) $F = 1000 \cdot g \cdot 5 \cdot 9/2 = 22500 \cdot g$ N $= 22500$ kp

Svar: a) och b) $F = \rho gbh^2/2$, c) $F =$
$= 22500$ kp

2. Hastigheten beräknas med hjälp av Toricellis lag

$$v = \alpha \sqrt{2gh}$$

där α = hastighetskoefficienten sättes = 1, eftersom ingenting sägs om förlusterna vid utströmningen.

Vi omräknar det rådande övertrycket till ekvivalent vätskepelare. Alltså

$$h = 1 \text{ m} + \frac{p}{\rho g} \text{ m} = 1 + \frac{2{,}5 \cdot g \cdot 10000}{1000 \cdot g}$$

ty $2{,}5 \text{ kp/cm}^2 = 2{,}5 \, g \text{ N/cm}^2 = 2{,}5 \, g \cdot 100 \cdot 100 \text{ N/m}^2$

$$h = 1 + 25 = 26 \text{ m vattenpelare}$$

$$v = \sqrt{2g \cdot 26} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{52} = 3{,}132 \cdot 7{,}211 = 22{,}58 \text{ m/s}$$

Svar: 22,6 m/s

3. Torra volymvikten är definierad som vikten av torrsubstansen $\underline{G_s}$ dividerad med volymen $\underline{V}$ dvs.

$$\gamma_t = \frac{G_s}{V}$$

Vi skriver

$$\gamma_t = \frac{G_s}{V} = \frac{\rho V_s}{V} = \frac{\rho V_s}{V_s + V_n} = \frac{\rho}{1 + V_n/V_s}$$

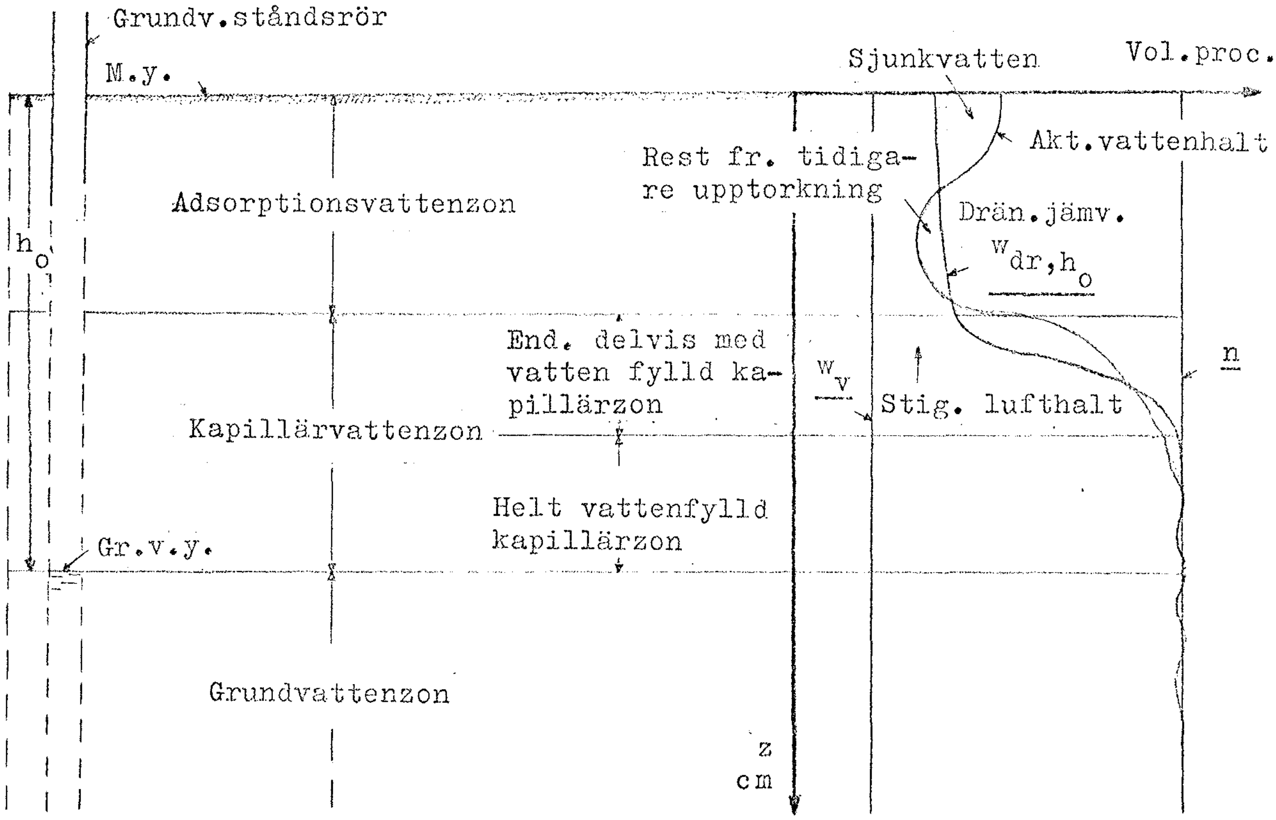
men definitionsmässigt är portalet $\underline{e} = V_n/V_s$. Således

$$\gamma_t = \frac{\rho}{1 + e}$$

V.S.V.

4. Vi tänker oss en vertikal skärning genom de övre mark- eller jordlagren. I nedanstående schematiska figur tänkes denna skärning, den vänstra figurdelen, lagd i papperets plan. De olika zonernas namn har direkt inskrivits i figuren.

I den högra figurdelen har ett schematiskt volymsdiagram uppritats. Närmast motsvarar den i figuren angivna vattenhaltsfördelningen och häremot svarande zoner en tänkt dräneringsjämvikt, som utan "störningar" fått utbildas mot en på konstant djup $\underline{h_o}$ stående grundvattenyta i en homogen profil.



I verkligheten är nu profilerna icke homogena utan textur och struktur varierar med djupet. Vidare överlagras dräneringsprocesserna av slumpvis fallande regn, som leder till mer eller mindre djupt gående sjunkvattenvågor, av vattenupptagning från växterna, direkt avdunstning, tjälbildning m.m.

Allt detta leder till att den ideala dräneringsjämvikten är mer eller mindre "störd". Den aktuella vattenhaltskurvan är resultatet av många samverkande och samtidigt pågående processer.

De språkliga definitionerna av de olika vattenhaltszonerna utformas ej här. Delvis är termerna så språkligt konstruerade, att deras innebörd härav framgår. Deras läge och inordning i figuren ger också vissa direkta förklaringar över innebörden.

5. Se föreläsningarna och angiven litteratur!

6. Enligt P. Wiklerts dissertationsavhandling (1964) s. 35 gäller för sambandet mellan den texturella vissningsgränsen $\underline{w_{v,t}}$ i viktsprocent av torrsubstansen och kornstorleksfördelningen ekv.

$$w_{v,t} = 0{,}32\ L + 0{,}10\ FMj + 0{,}02\ Rest$$

där $\underline{L}$ anger viktsprocenten ler och $\underline{FMj}$ anger viktsprocenten finmjäla.

Insättning ger

$$w_{v,t} = 0,32 \cdot 33 + 0,10 \cdot 38 + 0,02 \cdot 26 = 10,56 + 3,8 + 0,52 = 14,88$$

$$w_{v,t} = 14,9 \text{ viktsproc.} = 1,52 \cdot 14,9 = 22,6 \text{ volymproc.}$$

<u>Svar</u>: $w_{v,t} = 14,9$ viktsproc. $= 22,6$ volymproc

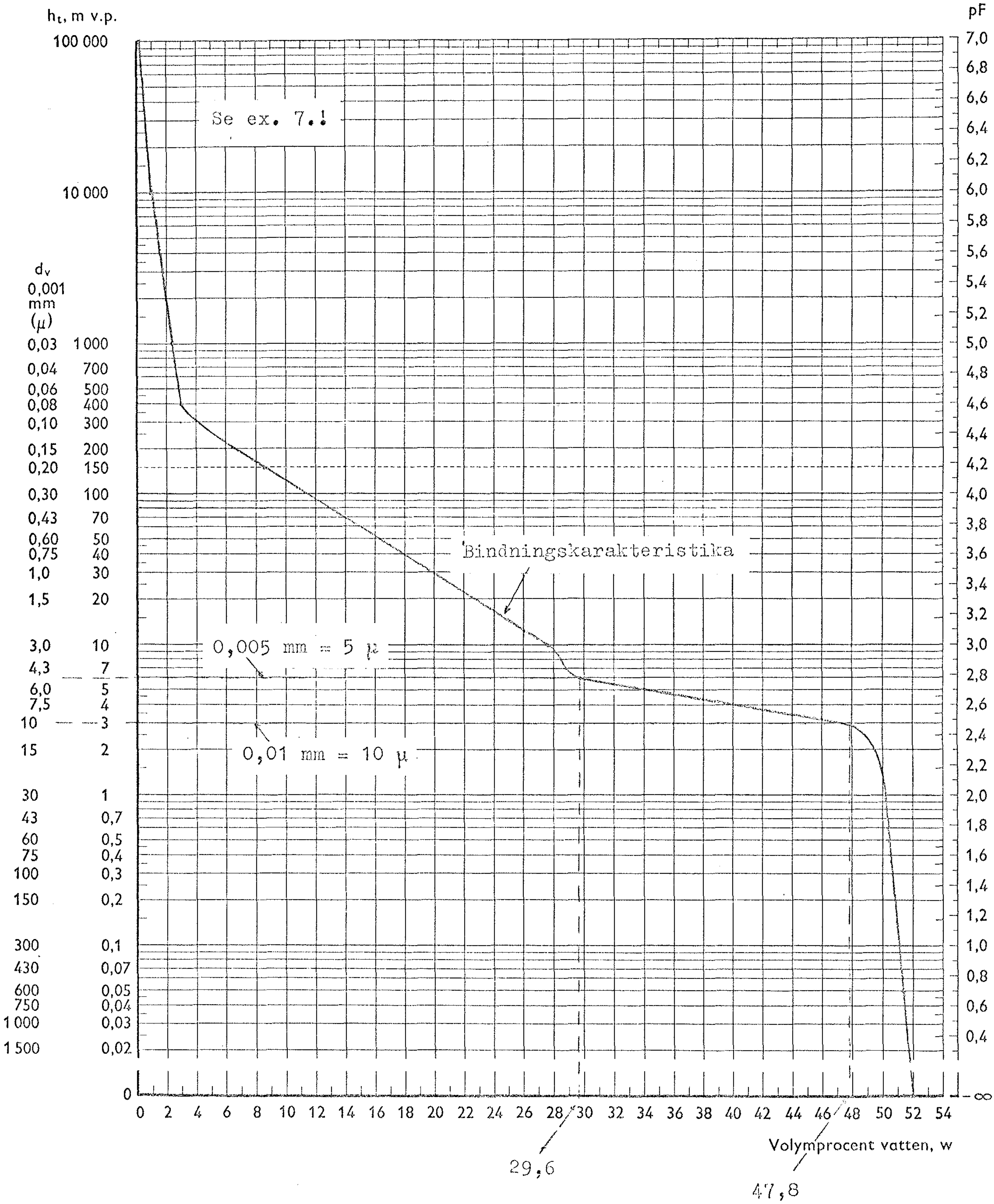
7. a) Angivna värdepar inprickas i diagrammet och punkterna förenas med varandra till en mjukt förlöpande kontinuerlig kurva. Det undersökta lagrets bindningskarakteristika är därmed uppritad.

Kurvan kan grovt uppfattas som bestående av fyra räta linjeelement, vilka förbundits med varandra genom mjuka böjningar. Särskilt iögonfallande är "knixen" i bindningsområdet 6 till 10 m v.p., svarande mot partikelintervallet 0,01-0,006 mm (enligt formeln $h_t = 0,6/d_p$ cm).

b) Mot porstorleken 0,01 mm = 10 µ svarar enl. diagrammet 47,8 volymproc. och mot porstorleken 0,005 mm = 5 µ svarar 29,6 volymprocent. Totala porvolymen är 52,0 volymprocent. Härur beräknas den sökta andelen till

$$100 \frac{47,8 - 29,6}{52,0} = \frac{100 \cdot 18,2}{52,0} = 35,0 \text{ proc.}$$

8. Beträffande denna fråga hänvisas till föreläsningarna, laboratorie- och fältdemonstrationer samt till M.F.U. IX.



h_t, m v.p.
pF
Se ex. 7.!
d_v 0,001 mm (μ)
Bindningskarakteristika
0,005 mm = 5 μ
0,01 mm = 10 μ
Volymprocent vatten, w
29,6
47,8

Några blandade exempel med svar, lösningar och kommentarer

För 5 poäng

1. Visa, att om i ett jordprov samtliga porer är fyllda med vatten, så gäller för porositeten n formeln

$$n = \frac{100\varphi w_1}{100 + \varphi w_1}$$

Num. ex. $\varphi = 2{,}70$ g/cm^3 och $w_1 = 60{,}0$ viktsprocent.

Lösning:

Formeln kan härledas på olika sätt. Enklast torde vara att betrakta 100 g torr jord. Vi får då

Vikten av den torra jorden	100 g
Vikten av jord + vikten av vattnet	$(100 + w_1)$ g
Volymen jord	$100/\varphi$ cm^3
Volymen vatten = volymen porer	$w_1/1$ cm^3

Porositeten kan då tecknas

$$n = 100\,\frac{V_n}{V} = 100\,\frac{w_1}{\frac{100}{\varphi} + w_1} = \frac{100\varphi w_1}{100 + \varphi w_1}$$

$$n = \frac{100\varphi w_1}{100 + \varphi w_1}$$

V.S.V.

Annan lösning:

Följande formler gäller generellt

$$\gamma_t = (1 - \frac{n}{100})\varphi \qquad \text{(a)}$$

$$w_2 = \gamma_t \cdot w_1 \qquad \text{(b)}$$

där w_2 är volymprocenten vatten.

Om jorden eller provet är vattenfyllt gäller dessutom villkoret $w_2 = n$.

Vi eliminerar γ_t ur ekvationen (a) genom substitution av

$$\gamma_t = \frac{n}{w_1} \tag{c}$$

Således

$$\frac{n}{w_1} = (1 - \frac{n}{100})\rho \tag{d}$$

som ger

$$n = \frac{100\rho\, w_1}{100 + \rho\, w_1} \tag{e}$$

V.S.V.

Det numeriska exemplet ger $n = 61,8$.

2. Härled formeln

$$\gamma = (1 - \frac{n}{100})(1 + \frac{w_1}{100})\rho$$

samt bestäm γ_t för $n = 50$ procent och $\rho = 2,70$ g/cm^3!

Lösning:
Vi skriver

$$\gamma = \gamma_t + \frac{w_1\,\gamma_t}{100} = (1 + \frac{w_1}{100})\,\gamma_t = (1 + \frac{w_1}{100})(1 - \frac{n}{100})\rho$$

dvs.

$$\gamma = (1 - \frac{n}{100})(1 + \frac{w_1}{100})\rho$$

V.S.V.

Torra volymvikten γ_t erhålles för $w_1 = 0$ dvs. helt torrt prov. För $n = 50$ proc. och $\rho = 2,70$ g/cm^3, erhålles då

$$\gamma_t = (1 - \frac{50}{100})(1 + \frac{0}{100})\ 2,70 = 1,35 \text{ kg/dm}^3$$

3. Beräkna, hur hög viktsprocenten vatten maximalt kan bli i en jord med porositeten $n = 45$ procent, om tätheten kan sättas $= 2,60$ g/cm^3.

Lösning:
Betrakta 100 g torr jord! Då får vi

Volymen fast material $100/2,60$ cm^3
Volymen vatten (antagande) w_1 cm^3

Då gäller

$$n = 45 = 100\,\frac{V_n}{V} = 100\,\frac{w_1}{\frac{100}{2,60} + w_1} = \frac{260\ w_1}{100 + 2,60\ w_1}$$

$$w_1 = 4500/143 = 31,5$$

<u>Svar</u>: 31,5 viktsprocent

<u>Annan lösning</u>:

Torra volymvikten γ_t blir

$$\gamma_t = (1 - \frac{45}{100})\ 2,60 = 0,55 \cdot 2,60 \text{ kg/dm}^3$$

$$w_2 = \gamma_t \cdot w_1 \quad \text{ger} \quad 45 = 0,55 \cdot 2,60 \cdot w_1$$

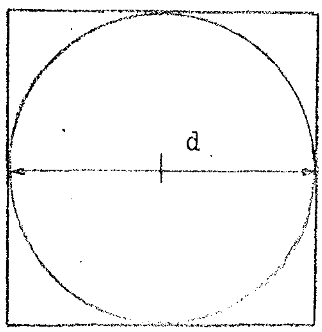
$$w_1 = \frac{45}{1,43} = 31,5 \text{ viktsprocent}$$

4. Beräkna materialvolym och porvolym respektive materialitet och porositet vid kubisk packning (lagring) av likstora sfärer.

<u>Lösning</u>:

Denna packning kan ur angivna frågeställning enklast uppfattas, som om varje sfär vore tilldelad en kub med kantlinjen <u>d</u> = diametern på en av de likstora sfärerna enligt den schematiskt uppritade figuren nedan.

Vi får med lätt insedda beteckningar:



$V = d^3$, $V_s = \pi d^3/6$ och

$V_n = V - V_s = d^3 - \pi d^3/6$

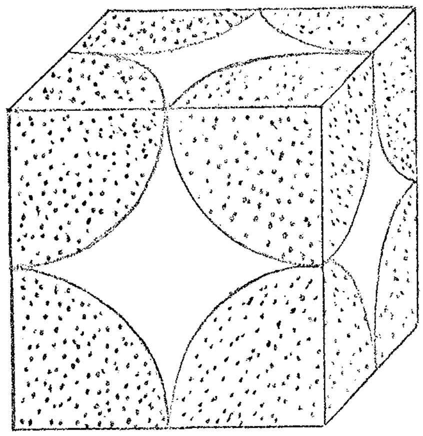
$m = 100\ V_s/V = 100\pi\, d^3/6\ d^3 = 100\pi/6 =$
$= 52,36$

$n = 100\ V_n/V = 100(d^3 - \pi d^3/6)/d^3 =$
$= 100(1 - \pi/6) = 47,64$

<u>Svar</u>: $V_s = \pi d^3/6$, $V_n = (1 - \pi/6)\ d^3$,
$m = 52,36$ proc. och $n = 47,64$ proc.

<u>Anm.</u>:

Man brukar i dessa sammanhang tala om <u>enhetselementet</u> dvs. den minsta enhet, som innehåller den för lagringen karakteristiska geometrien och genom vars upprepning hela massan kan erhållas. En schematisk bild av <u>enhetselementet vid kubisk lagring av likstora partiklar</u> återges i nedanstående figur.



5. Visa, att om man bestämmer viktsprocenten $\underline{w_1}$ vatten i ett helt vattenfyllt prov samt dessutom även bestämmer densiteten (tätheten) $\underline{\varrho}$, så kan volymvikten $\underline{\gamma_t}$ beräknas.

Beräkna sedan $\underline{\gamma_t}$ för $\underline{w_1}$ = 60,0 procent och $\underline{\varrho}$ = 2,70 g/cm^3!

<u>Lösning</u>:

Vi har

$$\gamma_t = (1 - \frac{n}{100})\varrho \qquad (1)$$

$$n = \gamma_t \cdot w_1 \qquad (2)$$

Vi eliminerar $\underline{n}$. Således

$$\gamma_t = (1 - \frac{\gamma_t \cdot w_1}{100})\varrho \qquad (a)$$

$$\gamma_t (1 + \frac{w_1 \varrho}{100}) = \varrho \qquad (b)$$

$$\gamma_t = \frac{100\,\varrho}{100 + \varrho\, w_1} \qquad (c)$$

<u>Svar</u>: γ_t = 1,03 kg/dm^3

6. Visa, att om man bestämmer vikten $\underline{G}$ g av ett helt vattenfyllt prov, vars volym är känd, samt dessutom även bestämmer dess torra vikt $\underline{G_s}$, så kan $\underline{n}$ beräknas (jfr med 5.!)

<u>Lösning</u>:

Vi antar att porositeten är $\underline{n}$.

Då gäller:

Volymen vatten $nV/100$ cm^3, vikten $nV/100$ g
Volymen fast material $V - nV/100$ cm^3, vikten G_s g

Härur erhålles ekvationen

$$G = G_s + \frac{nV}{100}$$

eller

$$n = 100\,\frac{G - G_s}{V} = 100(\gamma - \gamma_t)$$

V.S.V.

7. Beräkna hur hög viktsprocenten vatten maximalt kan bli i en jord med porositeten $\underline{n}$ = 55 procent, om tätheten $\underline{\varphi}$ kan sättas = 2,65 g/cm^3.

Lösning:
Vi betraktar 100 g torr jord. Då får vi

Volymen fast material 100/2,65 cm^3
Volymen vatten (antagande) w_1 cm^3 = w_1 g

Definitionsmässigt gäller då

$$n = 100\,\frac{V_n}{V} = 55 = \frac{100\,w_1}{\frac{100}{2,65} + w_1} = \frac{265\,w_1}{100 + 2,65\,w_1}$$

$$w_1 = 46,12$$

Svar: $\underline{w_{1,max}}$ = 46,1 (viktsproc.)

8. Bevisa att sambandet mellan $\underline{pF}$ och porradie $\underline{r_v}$ kan skrivas

$$pF = 3,2 - \log r_v$$

där $\underline{r_v}$ är den s.k. ekvivalentporradien i $\underline{\mu}$.

Bevis:
En kapillär vattenmenisk, vars medelkrökning eller ekvivalentporradie är $\underline{r_v}$ cm, kan ta upp ett vattenavförande tryck av $0,15/\underline{r_v}$ cm v.p. och omvänt ge upphov till ett bindningstryck av samma belopp.
$\underline{pF}$ definieras av ekv.

$$pF = \log h_t \qquad \text{(a)}$$

och h_t i detta fall av

$$h_t = 0{,}15/r_v \quad \text{(med alla mått i cm)} \tag{b}$$

Om r_v anges i $\mu = 0{,}0001$ cm, så gäller tydligen

$$h_t = 0{,}15/0{,}0001\ r_v \tag{c}$$

$$h_t = 1500/r_v \tag{d}$$

Logaritmering ger

$$pF = \log h_t = 3{,}18 - \log r_v \tag{e}$$

eller avrundat

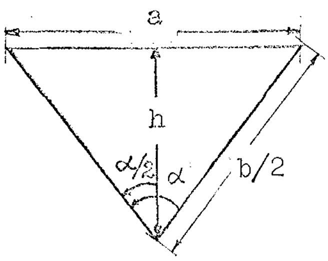
$$pF = 3{,}2 - \log r_v$$

Q.E.D.

9. En given plåt med bredden b skall vikas så, att en ränna med maximal tvärsnittsarea erhålles dvs. använd i strömningssammanhang skall den ge maximal våt area. Bestäm rännans form!

Lösning:

Maximerings- och symmetriskäl ger omedelbart att plåten bör vikas så, att rännans tvärsnitt bildar en likbent triangel enligt vidstående figur. Vi antar att plåten skall vikas så att skänklarna bildar vinkeln α. Vi betecknar vidare den uppkomna triangelns bas med a och höjd med h. Då gäller, om rännans (triangelns) area betecknas med A



$$A = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{b}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{b}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b^2}{4} \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

Derivering och nollsättning av derivatan ger

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{b^2}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\, \alpha/2 = 1; \qquad \alpha/2 = 45^\circ \pm n \cdot 180^\circ; \qquad \alpha = 90^\circ \pm n \cdot 360^\circ$$

Svar: Plåten skall vikas så, att tvärsektionen bildar en halv kvadrat med sidan $b/2$, varvid sektionsytan blir $b^2/8$.

10. Vid vattnets kapillära insugning i ett horisontellt liggande cylindriskt rör, homogent packat med jord, gäller att den kapillärt mättade delen s, växer med tiden t enligt uttrycket

$$s = c\sqrt{t}$$

där c är en konstant.

Visa att accelerationen är $-2\ v^3/c^2$ (el. retardationen $2\ v^3/c^2$)!

Lösning:

Enligt kinematiken är accelerationen d^2s/dt^2, där s är vägen och t tiden. Vi deriverar därför det givna uttrycket två gånger med avseende på tiden.

Således

$$ds/dt = v = c \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2} \qquad \text{(a)}$$

$$d^2s/dt^2 = a = -\ c \cdot \frac{1}{4} \cdot t^{-3/2} \qquad \text{(b)}$$

Ekv. (a) ger

$$2\ v^3 = c^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot t^{-3/2} \qquad \text{(c)}$$

och ekv. (b) ger

$$c^2 a = -\ c^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot t^{-3/2} \qquad \text{(d)}$$

varav följer

$$a = -\ 2\ v^3/c^2$$

V.S.V.

11. Beräkna med hjälp av Hagen-Poiseuilles lag

$$q = \frac{\pi\ \varphi\ g h_f d^4}{128\ \mu l}$$

hur mycket vatten som per timme strömmar genom ett en meter långt kapillärrör med diametern 0,1 mm, då förlusthöjden är en meter vattenpelare!

μ kan sättas = 0,01 pois.

Lösning:

Insättning av givna värden ger (cgs-enheter)

$$q = \frac{3{,}1416 \cdot 1 \cdot 981 \cdot 100 \cdot \overline{0{,}01}^{\,4}}{128 \cdot 0{,}01 \cdot 100} \cdot 3600\ \text{cm}^3/\text{tim}$$

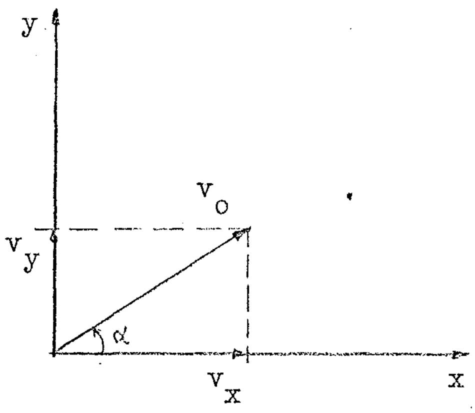
$$q = \frac{3,1416 \cdot 981 \cdot 0,36}{128} = \frac{1109,5}{128} = 86,7 \text{ cm}^3/\text{tim}$$

Svar: 87 cm^3/tim

12. Vatten strömmar ut ur ett munstycke med hastigheten v_o m/s. Hur högt och långt kan det teoretiskt nå?

Lösning:

Vi kan betrakta vattenstrålen som en strömlinje (strömtub). Den teoretiska undersökningen innebär, att vi bortser från luftmotståndet. Vi antar, att vattnets hastighet vid utträdet ur munstycket bildar vinkeln α med horisontalplanet. Då gäller i anslutning till vidstående figur för hastighetskomponenterna i origo



$$v_{x,o} = v_o \cos\alpha$$

$$v_{y,o} = v_o \sin\alpha$$

och t sek. senare

$$v_x = v_o \cos\alpha$$

$$v_y = v_o \sin\alpha - gt$$

enär vattnet börjar falla så fort det utträtt ur munstycket.

För vägen längs axlarna gäller

$$dx = v_x dt = (v_o \cos\alpha)\, dt$$

$$dy = v_y dt = (v_o \sin\alpha)\, dt - gt \cdot dt$$

dvs. efter integrering

$$x = (v_o \cos\alpha)\, t$$

$$y = (v_o \sin\alpha)\, t - gt^2/2$$

I den högsta punkten av strålen (strömlinjen) är $v_y = 0$, dvs.

$$v_y = (v_o \sin\alpha) - gt = 0$$

som ger

$$t = v_o \sin\alpha / g$$

och högsta höjden (för vinkeln α) blir

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot v_0 \sin\alpha / g - v_0^2 \sin^2\alpha / 2g = v_0^2 \sin^2\alpha / 2g$$

$$y = v_0^2 \sin^2\alpha / 2g$$

För $\alpha = 90^o$ blir y för givet v maximalt och antar värdet

$$y = v_0^2 / 2g$$

y antar värdet 0 för $t = 0$ (origo) och

$$t = 2\ v_0 \sin\alpha / g$$

som svarar mot det x-värde, då strålen åter når den horisontella ytan (markytan). Avståndet från origo är då

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot 2\ v_0 \sin\alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g$$

För $\alpha = 45^o$ blir x för givet v_0 maximalt och når värdet v_0^2/g. Mot detta värde svarar en högsta höjd av

$$y = v_0^2 \sin^2 45^o / 2g = v_0^2 / 4g$$

Om strålen utträder ur munstycket under vinkeln $\alpha = 45^o$ träffar den horisontalplanet på ett avstånd från origo (utträdet) som är fyra ggr den högsta höjd, som strålen uppnår.

Svar: Om strålen utträder ur munstycket med hastigheten v_0 och under vinkeln α med horisontalplanet, når den höjden $y = v_0^2 \sin^2\alpha / 2g$ och träffar horisontalplanet på avståndet $x = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ från origo (utträdet).

Anmärkning

Vattenstrålen bildar under de antagna förutsättningarna en parabel. Visa detta!

13. Enligt tabell (se t.ex. Bygg 1!) är 1 bar = 750,1 mm Hg (kvicksilver). $\rho_{Hg} = 13{,}5951$ g/cm^3, $g = 980{,}665$ cm/s^2.

Visa detta!

Lösning:

Antag, att 1 bar svarar mot x mm Hg-pelare.

Då gäller

$$13{,}5951 \cdot 980{,}665 \cdot 0{,}1 \cdot x \cdot 1 = 1 \text{ bar} = 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$x = 10^6/1333{,}224 = 750{,}1$$

V.S.V.

Anm.

1 mbar = 0,001 bar är alltså = 0,750 mm Hg.

14. Enligt internationell överenskommelse har man definierat största lerpartikeln eller minsta mjälapartikeln som den partikel, som faller 10 cm på 8 timmar i vatten av temperaturen +20°C. Bestäm med utgångspunkt härifrån konstanten C i ekvationen

$$v = C\, d^2$$

där v är fallhastigheten i cm/s för en partikel med diametern d cm.

Beräkna därefter falltiden för den minsta mopartikeln!

Lösning:

För besvarandet av frågans första del erhålles lätt

$$v = \frac{10}{8 \cdot 3600}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = C\, d^2 = C \cdot \overline{0{,}0002}^{\,2}$$

$$C = \frac{10 \cdot 10^8}{8 \cdot 3600 \cdot 4} = \frac{10^7}{1152} = 8681 \quad 1/\text{cm, s}$$

Formeln kan då skrivas

$$v = 8681\, d^2 \quad \text{cm/s}$$

För minsta mopartikeln med d = 0,02 mm gäller då

$$10 = v \cdot t = 8681 \cdot \overline{0{,}002}^{\,2} \cdot t$$

$$t = \frac{10^7}{4 \cdot 8681} = \frac{10^7}{34724} = 288{,}0 \text{ sek} = 4 \text{ min } 48 \text{ sek.}$$

Svar: C = 8681 $cm^{-1}s^{-1}$. Minsta mopartikeln faller 10 cm på 4 min och 48 sek.

Anm.

Av formeln framgår, att förhållandet mellan fallhastigheterna v_1 och v_2 för två olika stora partiklar med diametrarna d_1 och d_2 är

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Om partiklarna skall falla lika långt, säg sträckan s, så gäller att de erforderliga tiderna t_1 och t_2 bestäms av ekvationerna

$$t_1 = s/v_1 \quad \text{och} \quad t_2 = s/v_2$$

Härur erhålles

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

dvs. falltiden är omvänt proportionell mot kvadraten på partikeldiametern.

För minsta mopartikeln erhålles då

$$\frac{t}{8 \cdot 3600} = \frac{\overline{0,0002}^2}{\overline{0,002}^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$t = 8 \cdot 36 = 288 \text{ sek} = 4 \text{ min och } 48 \text{ sek.}$$

15. Om grundvattenytan står på 1 m djup i en åkerjord, där matjorden har ett djup av 20 cm. Mellan vilka gränser ligger då de porstorlekar, som genom dräneringen tenderar att hållas luftförande i matjorden.

Lösning:

På djupet z cm i en profil, där grundvattenytan står på h_o cm djup gäller, att det av dräneringen bestämda vattenavförande trycket är bestämt av ekv.

$$h_t = h_o - z$$

där

$$h_t = 0,3/d_v$$

varav

$$d_v = 0,3/h_o - z$$

Om h_o nu är 100 cm, så gäller att i själva markytan är $z = 0$, varav

$$d_v = 0,3/100 - 0 = 0,003 \text{ cm} = 0,03 \text{ mm}$$

och på djupet $\underline{z}$ = 20 cm, gäller

$$d_v = 0,3/100 - 20 = 0,00375 \approx 0,04 \text{ mm}$$

Svar: I själva markytan blir alla porer $\gtrsim$ 0,03 mm luftförande och i matjordens botten blir alla porer $\gtrsim$ 0,04 mm luftförande (vid dräneringsjämvikt).

16. Visa att mellan viktsprocenten vatten w_1 av torrsubstansen och volymprocenten vatten $\underline{w_2}$ gäller sambandet ($\underline{\gamma_t}$ = torra volymvikten)

$$w_2 = \gamma_t \cdot w_1$$

och skatta volymprocenten vatten i a) en lera och b) en torv, om viktsprocenten vatten i båda fallen är 10 procent.

Lösning:

Den första deluppgiften kan lösas på olika sätt. Enklast är att betrakta volymen 1 dm^3 med torra vikten = volymvikten $\underline{\gamma_t}$ kg/dm^3. Då erhålles omedelbart två uttryck på volymen vatten enligt ekvationen nedan (vattnets täthet = 1 kg/dm^3)

$$\frac{w_2 \cdot 1 \text{ dm}^3}{100} = \frac{w_1 \cdot \gamma_t \text{ kg}}{100 \cdot 1 \text{ kg/dm}^3} = \frac{w_1 \cdot \gamma_t \text{ dm}^3}{100}$$

$$w_2 = \gamma_t \, w_1$$

V.S.V.

a) För leran sätter vi $\underline{n}$ = 50 proc. och $\underline{\rho}$ = 2,70 g/cm^3, som ger $\underline{\gamma_t}$ = 1,35 kg/dm^3. Således

$$w_2 = 1,35 \cdot 10 = 13,5 \text{ volymprocent}$$

b) För torven sätter vi $\underline{n}$ = 95 proc. och $\underline{\rho}$ = 1,60 g/cm^3 (se föreläsningarna och uppgift 3. 13.10.71!). Således

$$\gamma_t = (1 - \frac{95}{100})\, 1,60 = 0,08 \text{ kg/dm}^3$$

$$w_2 = 0,08 \cdot 10 = 0,8 \text{ volymprocent}$$

Observera, att viktsprocenten vatten i torven (vid helt vattenfylld torv) kan stiga till 1188 procent!

17. Definiera begreppet pF! Beräkna sedan det pF som vattenhalten i ett jordprov svarar mot, då provet bringats i fuktighetsjämvikt med en 0,1-molar sockerlösning vid den isoterma temperaturen $+20^{\circ}C$.

Lösning:

R.K. Schofield (1935) införde begreppet pF "as an expression of free energy differences" mellan vattnet i ett komplicerat kapillärsystem såsom jordens, innehållande större eller mindre mängder osmotiskt verksamma substanser, och vattnet i en plan, ren och fri vattenyta.

Vi definierar pF närmast som en "operationssymbol" utmärkande att tiologaritmen för det aktuella bindningstrycket h_t angivet i cm v.p. blivit tagen.

Således

$$pF = \log h_t \qquad (h_t \text{ i cm v.p.})$$

Sockerlösningens osmotiska värde (el. tryck) beräknas med hjälp av den från fysikaliska kemin bekanta formeln

$$\pi = 0{,}082\, c(t + 273)$$

där π är osmotiska trycket i atm., c den molära koncentrationen (moler/l lösning) av osmotiskt verksam substans och t temperaturen i $^{\circ}C$.

Vi får

$$\pi = 0{,}082 \cdot 0{,}1(20 + 273) = 2{,}4026 \approx 2{,}40 \text{ atm}$$

pF beräknas härur till

$$pF = \log h_t = \log 1033\,\pi = 3{,}0141 + 0{,}3807 = $$
$$= 3{,}3948$$
$$pF = 3{,}40$$

Svar: Vattenhalten i jordprovet svarar vid jämvikt mot pF = 3,40

18. Bevisa, att om sfäriska partiklar får falla i vatten, så gäller relationen

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_1 - 1}{\rho_2 - 1}$$

där $\underline{v_1}$ är fallhastigheten för en partikel med tätheten $\underline{\rho_1}$ och $\underline{v_2}$ fallhastigheten för en partikel med tätheten $\underline{\rho_2}$.

Bevis:

Stokès lag för en sfärisk partikel, som får falla i vatten lyder

$$v = \frac{g(\rho_p - \rho_v)}{18\ \mu}\ d^2 = C\ d^2$$

där $\underline{v}$ = fallhastigheten i cm/s, $\underline{g}$ = acc. konst., $\underline{\rho_p}$ och $\underline{\rho_v}$ partikelns respektive vattnets täthet i g/cm^3 samt $\underline{d}$ partikelns diameter i cm.

Här gäller $\underline{\rho_{p,1}} = \underline{\rho_1}$ g/cm^3, $\underline{\rho_{p,2}} = \underline{\rho_2}$ g/cm^3 samt $\underline{\rho_v} = 1$ g/cm^3. Insättning och kvotbildning ger

$$v_1/v_2 = \frac{g(\rho_1 - 1)\ d^2}{18\ \mu} \Big/ \frac{g(\rho_2 - 1)\ d^2}{18\ \mu}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_1 - 1}{\rho_2 - 1}$$

V.S.B.

19. Vid +20°C gäller för vatten $\underline{\mu}$ = 0,0101 pois och $\underline{\rho_v}$ = 1,00 g/cm^3. Beräkna med utgångspunkt härifrån konstanten $\underline{C}$ i ekvationen (Stokès lag)

$$v = \frac{g(\rho_p - \rho_v)}{18\ \mu}\ d^2 = C\ d^2$$

om $\underline{\rho_p}$ ($\underline{\rho}$-partikel) sättes = 2,65 g/cm^3. Jämför sedan det funna värdet med det tidigare (ex. 14) beräknade 8681 och försök att förklara varför de avviker från varandra!

Lösning:

Direkt insättning ger

$$v = \frac{981(2{,}65 - 1{,}00)\ d^2}{18 \cdot 0{,}0101} = \frac{1618{,}65}{0{,}1818}\ d^2 = 8903\ d^2\ \text{cm/s}$$

dvs. $\underline{C}$ = 8903 cm^{-1}s^{-1}.

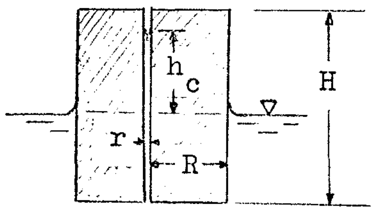
Det tidigare beräknade värdet på konstanten C = 8681 har framkommit som ett resultat av tillämpningen av Stokès lag på en utifrån andra experimentella synpunkter definierad gräns på största lerpartikeln $d = 2\ \mu$, medan det här beräknade värdet är ett mera rent teoretiskt värde.

Om man vid uträkningen av C istället för här antagna värde på $\rho_p = 2{,}65$ sätter $\rho_p = 2{,}609$, får man

$$C = \frac{981(2{,}609 - 1)}{0{,}1818} = \frac{1578{,}43}{0{,}1818} = 8682$$

20. En homogen rät, cirkulär cylinder med radien R, höjden H och tätheten ρ_c flyter upprätt i vatten, vars täthet betecknas med $\rho_v > \rho_c$. Längs den geometriska axeln av denna cylinder tänkes en kapillär med radien r uppborrad. I vilken riktning skulle cylinderns nedsjunkning påverkas av denna kapillär och beräkna cylinderns nya jämvikt!

Lösning:



Jämvikten innan någon urborrning gjorts bestäms enligt Arkimedes princip av ekv.

$$\rho_v\, g\pi R^2 x = \rho_c\, g\pi R^2 H$$

där x är nedsjunkningen. Härur erhålles

$$x = \rho_c H/\rho_v$$

Efter urborrningen fordrar jämvikten, att

$$\rho_v\, g\pi(R^2 - r^2)\, x = \rho_c\, g\pi(R^2 - r^2)\, H + \rho_v\, g\pi r^2 h_c$$

där h_c enligt den kapillära stighöjdsformeln är

$$h_c = \frac{2\alpha\cos\beta}{\rho_v\, g\, r}$$

och beteckningarna har i föreläsningarna given innebörd.

Vi får

$$x = \rho_c H/\rho_v + r^2 \cdot 2\alpha\cos\beta\ /(R^2 - r^2)\,\rho_v\, g\, r$$

Svar: Cylinderns nedsjunkning ökar med beloppet $2\, r^2 \alpha\, \cos\beta/(R^2 - r^2)\rho_v g\, r$, där beteckningarnas innebörd ges i utredningen.

21. Visa, att om n vattendroppar övergår till en enda vattendroppe, så minskar ytenergin i förhållamdet $\sqrt[3]{n}:1$!

Lösning:

Om volymen vatten betecknas med V, så gäller för n

$$V = 4\pi n r^3/3$$

där r är de ursprungliga dropparnas radie. Således är den ursprungliga ytenergin E_i (α = ytspänningen)

$$E_i = n \cdot 4\pi r^2 \alpha$$

För den kondenserade droppen gäller, om R betecknar dess radie

$$4\pi n r^3/3 = 4\pi R^3/3$$

dvs.

$$R = r\sqrt[3]{n}$$

och ytenergin E_f är

$$E_f = 4\pi R^2 \alpha$$

Förhållandet mellan den ursprungliga ytenergin och den slutliga blir då

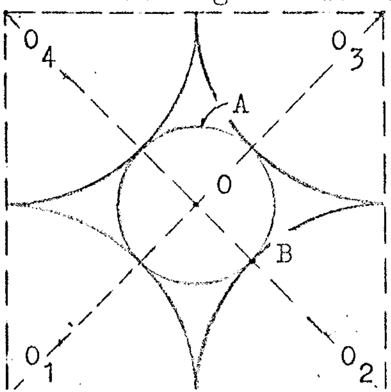
$$E_i/E_f = n\, r^2/R^2 = n\, r^2/r^2\sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n}/1$$

V.S. V.

22. Om vid kubisk lagring av likstora sfärer med diametern d_p det maximala kapillära bindningstrycket $h_{t,c}$ kan anses vara bestämt av den ekvivalentpor, vars radie är definierad av den sfär, som kan tänkas inskriven i en porhals, vad blir då uttrycket för $h_{t,c}$ angivet i d_p?

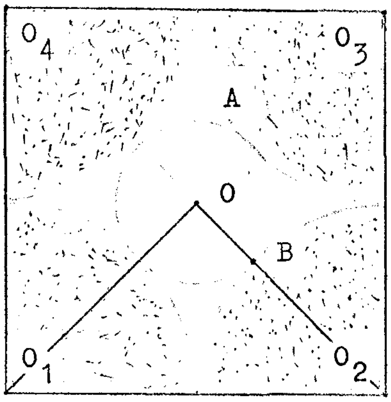
Lösning:

Ett tänkt snitt genom de kubiskt lagrade sfärernas diameterplan ger formen för en porhals (porhalsarna), så som figuren visar.



Radien på den i porhalsen inskrivbara sfären blir då = radien i cirkeln A. Vi betecknar den med x dvs. $\overline{OB}$ = x.

Vi får



$$\overline{2\,r_p}^{\,2} = 2(r_p + x)^2$$

som ger

$$2\,r_p = \sqrt{2}(r_p + x) = r_p\sqrt{2} + x\sqrt{2}$$

$$x = r_p(\sqrt{2} - 1) = 0{,}414\ r_p$$

$$x = 0{,}207\ d_p$$

Det kapillära bindningstrycket $\underline{h_{t,c}}$ i en por med radien $\underline{r}$ är bestämt av formeln

$$h_{t,c} = \frac{0{,}15}{r}\ \text{cm v.p.}$$

Insätter vi det funna uttrycket på $\underline{x}$, får vi

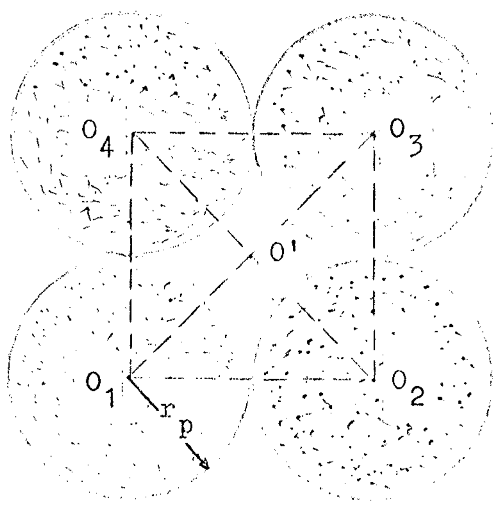
$$h_{t,c} = \frac{0{,}15}{0{,}207\ d_p} = \frac{0{,}72}{d_p}$$

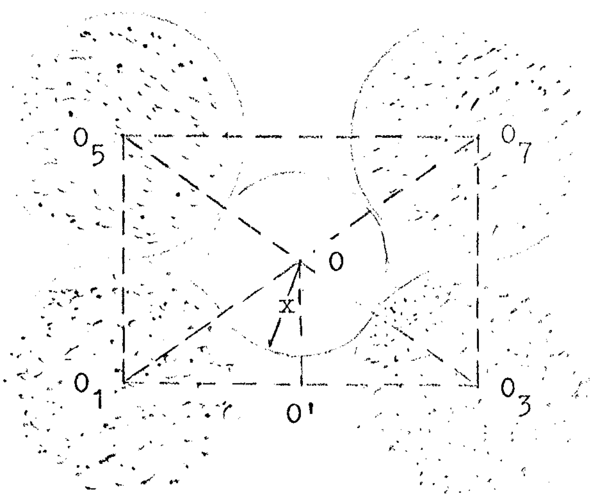
<u>Svar</u>: $h_{t,c} = 0{,}72/d_p$ cm v.p.

23. Beräkna a) i anslutning till föregående exempel radien i den maximala blåsa (sfär), som kan tänkas utbildas inne i enhetselementets por vid kubisk lagring av likstora partiklar. b) Ange det mot denna ekvivalentporradie svarande kapillära bindningstrycket!

<u>Lösning</u>:

a) Vi tänker oss enhetselementet skuret dels i ett diameterplan





dels i ett diagonalplan. Detta åskådliggöres schematiskt i den uppritade figuren.

Vi antar, att blåsans radie är $\underline{x}$ cm. Vi får då ur vänstra delfiguren

$$\overline{O_1O_3}^2 = 2\,\overline{O_1O'}^2 = \overline{2r_p}^2 + \overline{2r_p}^2 = 8r_p^2$$

eller

$$\overline{O_1O'}^2 = 2r_p^2$$

och ur högra delfiguren får vi

$$\overline{O_1O'}^2 = (x + r_p)^2 - r_p^2$$

Kombineras dessa två uttryck på sträckan $\overline{O_1O'}$ får vi

$$(x + r_p)^2 - r_p^2 = 2r_p^2$$

$$x = r_p(\sqrt{3} - 1) = 0,732\ r_p$$

eller uttryckt i $\underline{d_p}$

$$x = 0,366\ d_p$$

b) Insättning av detta uttryck på krökningsradien i ekvationen

$$h_{t,c} = 0,15/r_v$$

ger

$$h_{t,c} = 0,15/0,366\ d_p = 0,41/d_p \text{ cm v.p.}$$

<u>Svar</u>: a) Den sökta radien är $0,366\ d_p$, där $\underline{d_p}$ är partikeldiametern och b) $h_{t,c} = 0,41/d_p$ cm v.p.

<u>Anmärkning:</u>

Tages det aritmetiska medelvärdet av de funna uttrycken på $\underline{h_{t,c}}$, får vi $\underline{h_{t,c}} = 0,57/d_p$. <u>G. Beskow</u> fann för sfäriska hagelkorn det experimentellla värdet 0,53.

24. Bevisa att N mm nederbörd motsvarar $\underline{w}_2$ volymprocent vatten likformigt fördelat i ett jordskikt 10 N/w cm tjockt samt beräkna hur långt ett 25 mm regn tränger ned, om det beräknas likformigt höja vattenhalten 12 volymprocent.

Lösning:

Betrakta ett jordskikt Δz cm tjock och med ytan a cm^2. Då gäller likheten

$$N\, a/10 = w \Delta z\, a/100$$

som ger

$$\Delta z = 10\, n/w$$

V.S.V.

Det numeriska exemplet ger

$$\Delta z = 10 \cdot 25/12 = 20{,}8 \text{ cm}$$

Svar: Nedträngningen blir 20,8 cm

25. En jord antages uttorkad till vissningsgränsen $\underline{w}_v$ = 10 volymprocent ned till 30 cm djup. Efter ett visst regn visar det sig, att vattenhaltsfördelningen approximativt beskrivs av ekv.

$$z = 30 - 2/15(w - 10)^2$$

a) Konstruera på rutat papper ett n-diagram, som visar den uppkomna vattenhaltsfördelningen!

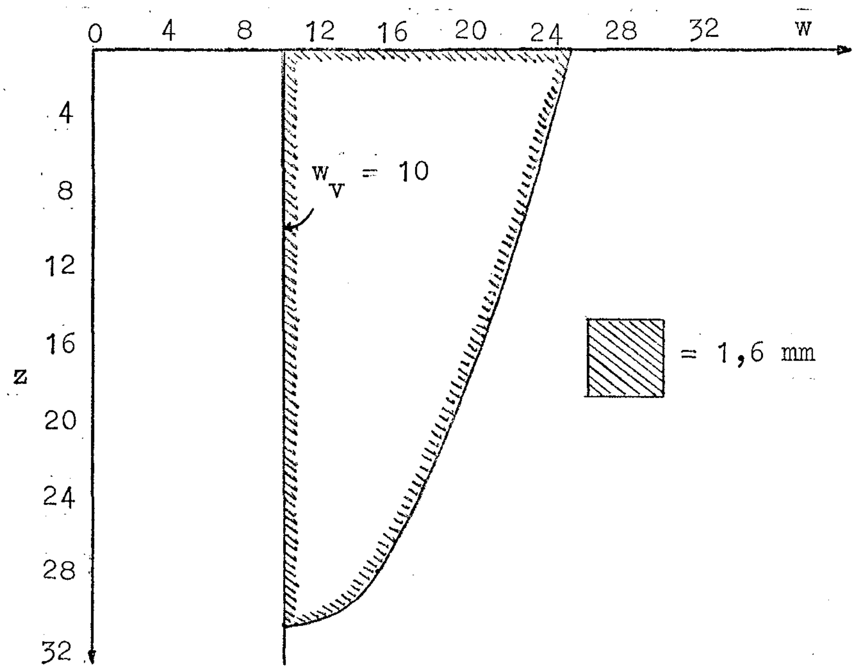
b) Beräkna nederbördsmängden i mm!

Lösning:

Vi uppställer följande beräkningsschema

w	w - 10	$(w - 10)^2$	$2/15(w - 10)^2$	z
10	0	0	00	30,0
11	1	1	0,13	29,9
12	2	4	0,53	29,5
13	3	9	1,20	28,8
15	5	25	3,33	26,7
20	10	100	13,33	16,7
25	15	225	30,00	0,0

Diagrammet konstrueras nu lätt. Se figuren!



b) Grafisk lösning ger 30 mm. Se figuren!

Exakt beräkning dvs. i detta fall integrering av uttrycket

$$N = 1/10 \int w_N \, dz$$

där

$$w_N = w - w_v = 10 + \sqrt{7,5(30 - z)} - 10$$

och

$$w_N = \sqrt{7,5(30 - z)}$$

ger

$$N = \sqrt{7,5}/10 \int_0^{30} (30 - z)^{1/2} \, dz$$

$$N = \sqrt{7,5}/10 \Big|_0^{30} -2/3(30 - z)^{3/2} = 30$$

<u>Svar</u>: b) 30 mm nederbörd

<u>Anmärkning</u>:

Observera, att differentialuttrycket

$$dN = \frac{1}{10} z \, dw$$

också gäller, vilket omedelbart ger

$$N = \frac{1}{10} \int_{10}^{25} [30 - 2/15(w - 10)^2] \, dw$$

eller

$$N = \frac{1}{10} \Big|_{10}^{25} [30 w - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3}(w - 10)^3]$$

$$N = 45 - \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{45} \cdot 15^3 = 30 \text{ mm}$$

26. Vid en viss tidpunkt är den upptagbara mängden vatten i en jord 20 volymprocent. Om man antar, att rötterna måste växa sig fram till vattnet, hur stor volym jord måste då per dygn successivt genomrotas, om transpirationen antas vara 5 mm/dygn.

Lösning:

Den tillämpbara formeln lyder (obs! detta behöver naturligtvis icke vara någon minnesformel, utan formeln framtages i varje enskilt fall)

$$V_{v,u} = \frac{1}{10} \Delta w_u \cdot \Delta z$$

där $V_{v,u}$ är mängden upptagbart vatten i mm i skiktet med tjcokleken Δz och den upptagbara volymprocenten vatten Δw_u.

I detta fall gäller alltså

$$5 = \frac{1}{10} \cdot 20 \cdot \Delta z$$

som ger

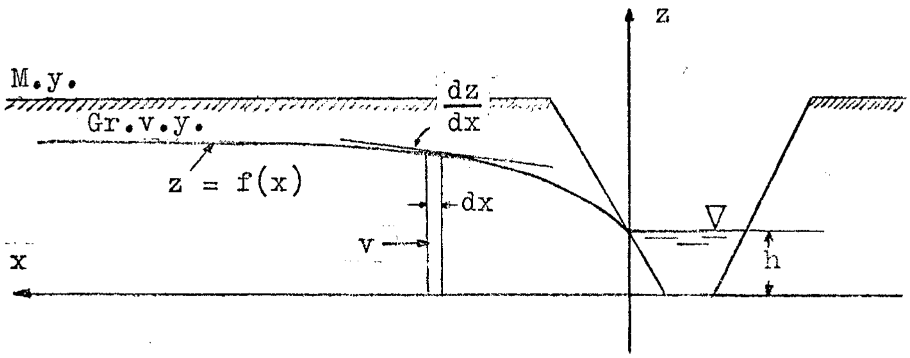
$$\Delta z = 2,5 \text{ cm}$$

Svar: Per dygn måste ett jordskikt 2,5 cm tjockt genomrotas dvs. den nödvändiga medelrotfördjupningen blir 2,5 cm

27. Visa, att grundvattenytan vid stationär utrinning till ett öppet dike under vissa antaganden antar formen av en parabel!

Lösning:

Vi ritar en enkel skiss och inför lämpliga beteckningar.



Enl. Darcys sats gäller

$$v = k\ I = k\ \frac{dz}{dx}$$

där flödet $\underline{q}$ räknats pos. i neg. x-axelns riktning.

Dessutom måste i varje tänkt vertikalt snitt (per breddenhet vinkelrätt mot figurens plan) gälla

$$q = v\ z$$

och således

$$q = k\ \frac{dz}{dx}\ z$$

$$q\ dx = k\ z\ dz$$

Integration ger

$$q\ x = k\ z^2/2 + C$$

För $\underline{x} = \underline{o}$ är $\underline{z} = h$ = vattendjupet, som ger

$$C = -\ k\ h^2/2$$

och således

$$2\ q\ x = k(z^2 - h^2)$$

Detta uttryck kan även skrivas

$$\frac{2q}{k}(x + \frac{kh^2}{2q}) = z^2$$

Sätter vi dessutom här

$$x' = x + k\,h^2/2q$$

får vi

$$\frac{2q}{k}\,x' = z^2$$

vilket är grundformeln för en parabel med parametern q/k.

28. I ett trädgårdsland har man ned till 20 cm djup en styv lerjord. Genom inblandning av Hasselfors solmull (vitmosstorv) vill man "lätta upp" jorden dvs. a) höja och stabilisera porositeten b) öka smulbarheten vid upptorkning med andra ord förbättra bearbetbarheten.

a) Hur mycket torr torv skall man tillföra per kvadratmeter, om man vill höja porositeten $\underline{\Delta n}$ volymprocent ned till 20 cm djup?

Lerjordens ursprungliga porositet betecknas med $\underline{n_L}$ och torvens porositet betecknas med $\underline{n_T}$. Tätheterna betecknas på motsvarande sätt med $\underline{\rho_L}$ och $\underline{\rho_T}$.

b) Diskutera torvens inverkan på "smulbarheten", bearbetbarheten!

Lösning:

a) Antag, att man måste tillföra $\underline{x}$ kg torr torv per kvadratmeter. Dessutom antar vi, att torvens liksom lerans porositet verkar additivt eller att porositeterna överlagrar varandra.

Porvolymen $\underline{V_{n,L}}$ dm^3 i lerjorden per dm^2 och 20 cm = 2dm djup blir

$$V_{n,L} = n_L \ 2/100 = 0{,}02\ n_L \ dm^3$$

Volymen porfri torr torv per dm^2 blir

$$0{,}01\ x/\rho_T \ dm^3$$

vilket svarar mot

$$\frac{100}{100 - n_T} \cdot \frac{0{,}01\ x}{\rho_T} = \frac{x}{(100 - n_T)\,\rho_T} \ dm^3$$

torv med porositeten $\underline{n_T}$.

Höjden (djupet) efter inblandningen blir då

$$2 + x/(100 - n_T)\,\rho_T \ dm$$

Den sammanlagda höjden av alla porer blir

$$0{,}02\ n_L + n_T\ x/100(100 - n_T)\rho_T$$

För bestämning av x erhålles då ekvationen

$$0{,}01(n_L + \Delta n)\left[2 + x/(100 - n_T)\rho_T\right] =$$

$$= 0{,}02\ n_L + n_T\ x/100(100 - n_T)\rho_T$$

vilken bygger på att två uttryck för totala porvolymen erhålles. Efter förenkling får vi

$$x = \frac{2(100 - n_T)\rho_T \Delta n}{n_T - n_L - \Delta n}$$

Anm. Om vi istället för 20 cm antagit inblandningsdjupet vara H cm, hade vi fått den generella formeln

$$x = \frac{H(100 - n_T)\rho_T \Delta n}{10(n_T - n_i - \Delta n)}$$

där n_i betecknar den initiala (före inblandningen gällande) porositeten.

b) Utan att här ingå på någon detaljerad analys av den uppställda frågan anföres endast, att tillförsel och inblandning av torv i leran ökar antalet diskontinuitetsytor, längs vilka av olika orsaker uppkommande spänningar kan utlösas och ge upphov till brott.

Svar: Det behövs $2(100 - n_T)\rho_T \Delta n/n_T - n_L - \Delta n$ kg torr torv per m^2 för att höja porositeten Δn procent

29. Beräkna med hjälp av svaret i närmast föregående exempel hur mycket torr torv, som per m^2 skulle behöva tillföras en sandjord med porositeten n_s = 46,6 procent, om man vill höja porositeten med 12,8 proc. ned till 1 dm djup och om man vet att torvens porositet n_T är 94,9 procent och dess täthet ρ_T är 1,60 g/cm^3.

Jämför här med M.F.U. XVII, material nr 5!

Lösning:
Den gällande formeln kan skrivas

$$x = H(100 - n_T)\rho_T \Delta n/10(H_T - H_S - \Delta n) \quad \text{kg torv/m}^2$$

som med de givna värdena insatta ger

$$x = \frac{10(100 - 94,9)\ 1,60 \cdot 12,8}{10(94,9 - 46,6\ - 12,8)} = \frac{5,1 \cdot 1,60 \cdot 12,8}{48,3 - 12,8}$$

$$x = 104,45/35,5 = 2,94\ \text{kg/m}^2$$

Svar: 2,94 kg/m^2

30. De vid avd. för Lantbrukets hydroteknik använda provtagningscylindrarna (standardcylindrarna) har en inre diameter av 70 mm och en höjd av 100 mm. Detta ger en provtagningsvolym av 385 cm^3.

Om en sådan cylinder väger 383 g tom och fylld med naturfuktigt prov 1055 g, med vattenmättat prov 1102 g samt med prov efter torkning vid +105°C 925 g, så begäres att akt. vattenhalten och att vattenmättade vattenhalten i volymprocent skall beräknas. Vidare skall porositeten n och materialiteten m beräknas samt torra volymvikten γ_t och vattenmättade volymvikten $\gamma_{v,m}$ bestämmas.

Tätheten ρ är 2,65 g/cm^3.

Lösning:

Aktuella vattenhalten w_a är vattenhalten vid provtagningen. Vi får

$$w_a = 100\ \frac{1055 - 925}{385} = \frac{13000}{385} = 33,8\ \text{volymprocent}$$

Vattenmättade vattenhalten w_m blir

$$w_m = 100\ \frac{1102 - 925}{385} = \frac{17700}{385} = 46,0\ \text{volymprocent}$$

Materialiteten m blir

$$m = 100\ \frac{V_s}{V} = 100\ \frac{925 - 383}{2,65 \cdot 385} = \frac{54200}{1020,0} = 53,1\ \text{volymproc.}$$

Torra volymvikten γ_t blir

$$\gamma_t = \frac{G_s}{V} = \frac{925 - 383}{385} = \frac{542}{385} = 1,41\ \text{kg/dm}^3$$

Vattenmättade volymvikten $\gamma_{v,m}$ blir

$$\gamma_{v,m} = \frac{G_{v,m}}{V} = \frac{1102 - 383}{385} = \frac{719}{385} = 1,87\ \text{kg/dm}^3$$

Materialiteten m blir

$$m = 100\,\frac{\gamma_t}{\rho} = \frac{141}{2,65} = 53,2 \text{ volymprocent}$$

och porositeten n blir

$$n = 100(1 - \frac{\gamma_t}{\rho}) = 100 - m = 46,8 \text{ volymprocent}$$

Svar: w_a = 33,8 volymproc., w_m = 46,0 volymproc.,
n = 46,8 volymproc., m = 53,2 volymproc.,
γ_t = 1,41 kg/dm^3 och $\gamma_{v,m}$ = 1,87 kg/dm^3.

31. Viktsprocenten sten i en morän har genom vägning befunnits vara p. Porositeten hos den övriga jorden har bestämts och betecknas med n_f. Tätheten ρ anses vara densamma hos stenmaterialet och hos det övriga materialet.

Bestäm moränens medelporositet n, om stenen anses icke bidraga med någon porositet dvs. ha porositeten 0.

Numeriskt ex. p = 20 viktsproc., n_f = 45 volymproc. och ρ = = 2,65 g/cm^3.

Lösning: Vi betraktar volymen V dm^3 med vikten G kg. Då gäller

Vikten av sten	$p\,G/100$ kg
Volymen sten	$p\,G/100\rho$ dm^3
Volymen porer i stenen	0
Volymen porer i övr. mat.	$n_f(V - p\,G/100\rho)/100$ dm^3

Följaktligen gäller

$$n\,V/100 = n_f(V - p\,G/100\rho)/100 + 0$$

$$n = n_f(1 - p\,\gamma_t/100\rho)$$

Dessutom gäller

$$\gamma_t = (1 - \frac{n}{100})\rho$$

och efter elimination av γ_t

$$n = \frac{100\,n_f(100 - p)}{100^2 - p\,n_f}$$

Det numeriska exemplet ger

$$n = \frac{100 \cdot 45(100 - 20)}{100^2 - 20 \cdot 45} = \frac{45 \cdot 80}{91} = 39,56$$

Svar: $n = 100n_f(100 - p)/100^2 - p\, n_f$

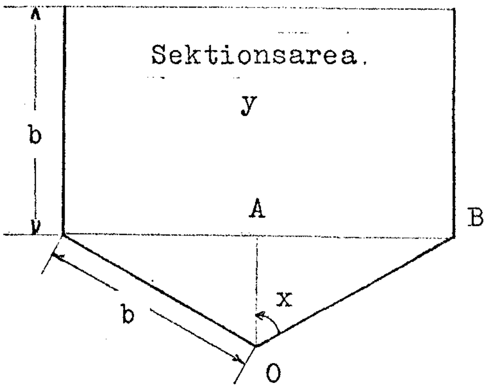
Sifferexemplet ger n = 39,6 volymproc.

32. Av fyra bräder med bredden b cm skall man förfärdiga en ränna med sidobräderna lodräta och de två bottenbräderna bildande en vinkel med vinkelbenen (bräderna) uppåt.

Beräkna denna vinkel, så att rännans tvärsnitt blir så stor som möjligt!

Lösning:

Rännans tvärsnitt återges schematiskt i vidstående figur, där halva den sökta vinkeln bet. med x . Vi får



$\overline{AB} = b \sin x$ och $\overline{OA} = b \cos x$

$y = 2\,b^2 \sin x + b^2 \sin x \cos x$

$y' = 2\,b^2 \cos x + b^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x = 0$

$2 \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0$

$2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

1. $\cos x = 0,3661$ 2. $\cos x = -1,3661$ förkastas!

$x = 68,525^\circ$

$2x = 137,1^\circ$

Svar: Vinkeln skall göras $137,1^\circ$

33. Hur många vattenmolekyler kan tänkas bli lagda sida vid sida tvärs över en lerpartikel med bredden 1 µ? Med andra ord jämför storleken av en vattenmolekyl med storleken av en lerpartikel!

Lösning:

Uppgifterna om vattenmolekylens storlek varierar något i litteraturen men 2,76 Å(1 Å = 10^{-8} cm) tycks vara ett relativt accepterat värde. Vi sätter vattenmolekylens diameter = 3 Å. Då får vi, om x betecknar det sökta antalet

$$x = 1\ \mu/3\ \text{Å} = 10^{-4}\ \text{cm}/3 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} = 3333$$

Trots lerpartikelns litenhet ryms icke mindre än ca 3300 vattenmolekyler i ett band tvärs över densamma!

Svar: 3300 vattenmolekyler

34. Försök att göra en skattning av vattenmolekylens storlek utifrån uppgiften om att Avagadros tal är $60{,}2 \cdot 10^{22}$!

Lösning:

Avagadros tal anger antalet molekyler hos en grammolekyl av ett ämne. En grammolekyl vatten är 18 g. Vi tänker oss varje molekyl tilldelad en kub, vars kantlinje är lika med vattenmolekylens diameter d. Volymen på en sådan kub blir då

$$d^3 = 18/60{,}2 \cdot 10^{22} \text{ cm}^3$$

och kubsidan följaktligen

$$d = \sqrt[3]{\frac{1800}{60{,}2} \cdot 10^{-24}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 3 \text{ Å}$$

Svar: Vattenmolekylens diameter skattas till 3 Å (= $3 \cdot 10^{-8}$ cm)

35. Skatta vissningsgränsen i en mineraljord, där lerhalten är 50 viktsprocent, halten finmjäla 30 viktsprocent och resten utgöres av grövre kornfraktioner.

Lösning:

Vi tillämpar formeln (närmare om formeln, se föreläsningarna och arbeten av P. Wiklert!)

$$w_{v,t} = 0{,}32 \text{ L} + 0{,}10 \text{ FMj} + 0{,}02 \text{ Rest}$$

Insättning ger

$$w_{v,t} = 0{,}32 \cdot 50 + 0{,}10 \cdot 30 + 0{,}02(100 - 80)$$

$$w_{v,t} = 16 + 3 + 0{,}4 = 19{,}4$$

Svar: Texturella vissningsgränsen skattas till 19,4 viktsprocent

36. De torra volymvikterna hos på bestämt sätt packade provproppar av sand, lera och torv har vid en viss undersökning befunnits vara γ_S, γ_L och γ_T. Av denna sand, lera och torv gör man en blandning, där viktsprocenten sand är p_S, viktsprocenten lera är p_L och viktsprocenten torv är p_T. Av det så erhållna blandmaterialet gör man också provproppar, som packas på samma sätt som de av rena material framställda provpropparna. Vilken volymvikt får dessa provproppar, om man antar, att sandens, lerans och torvens specifika volym är densamma i de rena materialen och i blandningarna (se äv. M.F.U. XVII!).

Num. ex. $p_S = 84$, $p_L = 13{,}55$ och $p_T = 2{,}45$ viktsproc. samt $\gamma_S = 1{,}43$, $\gamma_L = 1{,}06$ och $\gamma_T = 0{,}081$ kg/dm^3.

Lösning: Vi betecknar blandmaterialets volymvikt med $\gamma_{bl.}$ och betraktar 100 g torrt blandmaterial i angiven packning. Då måste gälla

$$\frac{100}{\gamma_{bl.}} = \frac{p_S}{\gamma_S} + \frac{p_L}{\gamma_L} + \frac{p_T}{\gamma_T}$$

där volymerna hos de rena materialen enligt förutsättningarna antagits verka rent additivt i blandningen.

Det num. ex. ger

$$\frac{100}{\gamma_{bl.}} = \frac{84{,}00}{1{,}43} + \frac{13{,}55}{1{,}06} + \frac{2{,}45}{0{,}081}$$

$$\frac{100}{\gamma_{bl.}} = 58{,}74 + 12{,}78 + 30{,}25 = 101{,}77$$

$$\gamma_{bl.} = 0{,}98 \text{ kg/dm}^3$$

Enligt M.F.U. XVII, s. 11, var det exp. funna värdet 1,01 dvs. avvikelsen $\gamma_{exp.} - \gamma_{ber.} = 1{,}01 - 0{,}98 = 0{,}03$ eller relativt ca 3 proc.

Svar: $\dfrac{100}{\gamma_{bl.}} = \dfrac{p_S}{\gamma_S} + \dfrac{p_L}{\gamma_L} + \dfrac{p_T}{\gamma_T}$

Num. ex. $\gamma_{bl.} = 0{,}98$ kg/dm^3

37. Lös föregående exempel, om istället för viktsprocenten volymprocenten är given med beteckningarna V_S, V_L och V_T !

Num. ex. $\gamma_S = 1,360$, $\gamma_L = 0,967$ och $\gamma_T = 0,0874$ kg/dm^3 samt

$V_S = 59,5$, $V_L = 13,5$ och $V_T = 27,0$ volymprocent.

Lösning:

Låt oss betrakta V cm^3 blandmaterial. Då måste gälla

$$V \cdot \gamma_{bl.} = \frac{V_S \cdot V}{100} \cdot \gamma_S + \frac{V_L \cdot V}{100} \cdot \gamma_L + \frac{V_T \cdot V}{100} \cdot \gamma_T$$

ty en godtycklig volym av blandningen måste väga lika mycket som summan av blandningsdelarnas vikter, varvid samtidigt additiviteten i volymerna beaktats.

Vi får

$$\gamma_{bl.} = 0,01(V_S \cdot \gamma_S + V_L \cdot \gamma_L + V_T \cdot \gamma_T)$$

och det num. ex. ger

$$\gamma_{bl.} = 0,01(59,5 \cdot 1,360 + 13,5 \cdot 0,967 + 27,0 \cdot 0,0874)$$
$$\gamma_{bl.} = 0,8092 + 0,1305 + 0,0236 = 0,96 \text{ kg/dm}^3$$

Experimentellt funnen volymvikt enl. M.F.U. XVII, s. 11, 1,01 kg/dm^3. Avvikelse alltså ca 5 procent.

Svar: $\gamma_{bl.} = 0,01(V_S \cdot \gamma_S + V_L \cdot \gamma_L + V_T \cdot \gamma_T)$

Num. ex. $\gamma_{bl.} = 0,96$ kg/dm^3

38. Matjordens djup på en bestämd plats vid en bestämd tidpunkt är H cm. Den genomsnittliga porositeten är n procent, jordmaterialets täthet är ρ (g/cm^3) och vissningsgränsen i viktsprocent är $w_{v,vikt}$.

a) Vid vilken porositet n_{min} skulle denna matjord sakna möjligheter att magasinera något upptagbart vatten, om vissningsgränsen i viktsprocent antages vara oberoende av matjordens aktuella struktur dvs. vara entydigt texturellt bestämd.

b) Beräkna även under samma förutsättningar det mot denna minimiporositet n_{min} svarande minimidjupet H_{min}!

c) Beräkna n_{min} och H_{min}, om H = 25 cm, n = 50 procent, ρ = 2,7 g/cm^3 och $w_{v,vikt}$ = 15,0 procent!

Lösning:

a) Matjordens torra vikt G_S per ytenhet, cm^2, blir

$$G_s = (1 - n/100)\ H \cdot 1 \cdot \rho = (1 - n/100)\ H\rho \quad g$$

Dess innehåll av ej upptagbart vatten, $V_{v,w}$, är då

$$V_{v,w} = w_{v,vikt}/100 \cdot (1 - n/100)\ H\rho \quad cm^3$$

Detta svarar mot en minimiporositet av

$$n_{min} = 100\ \frac{V_{v,w}}{V_{min}} = 100\ \frac{V_{v,w}}{V_s + V_{v,n}} = \frac{100\ w_{v,vikt}}{100 + w_{v,vikt}\rho}$$

b) Matjordens höjd H_{min} är då

$$H_{min} = H_s + H_{v,w} = (1 - \frac{n}{100})\ H + \frac{w_{v,vikt}}{100}\ (1 - \frac{n}{100})\ H\rho$$

$$H_{min} = (1 - \frac{n}{100})(1 + \frac{w_{v,vikt}\cdot\rho}{100})\ H$$

c) Det num. ex. ger

$$n_{min} = \frac{100 \cdot 15 \cdot 2{,}7}{100 + 15 \cdot 2{,}7} = \frac{4050}{140{,}5} = 28{,}8 \text{ proc.}$$

$$H_{min} = 0{,}5(1 + \frac{15 \cdot 2{,}7}{100})\ 25 = \frac{0{,}5 \cdot 140{,}5 \cdot 25}{100} = 17{,}6 \text{ cm}$$

Svar: a) $n_{min} = 100\ w_{v,vikt}/(100 + w_{v,vikt}\rho)$ proc.

b) $H_{min} = (1 - n/100)(1 + w_{v,vikt}\rho/100)\ H$ cm

c) $n_{min} = 28{,}8$ proc.

$H_{min} = 17{,}6$ cm

39. För vertikal kapillär strömning i helt vattenfylld profil från en grundvattenyta på djupet h_o till en zon, där vatten förbrukas (ex. direkt avdunstning, vattenupptagning av rötter etc.), gäller formeln

$$v_c = k\ \frac{h_c - h_o}{h_o} \quad cm/s$$

Skatta med hjälp av denna formel och övrig aktuell kunskap v_c för $h_o = 100$ cm i en finmofraktion! Svaret skall anges i mm/tim.!

Lösning:

För finmon gäller $\underline{d_M} = 0{,}06$ mm $= 6 \cdot 10^{-3}$ cm och $\underline{d_m} = 0{,}02$ mm $= 2 \cdot 10^{-3}$ cm.

För $\underline{k}$ gäller formeln

$$k = 5\ d^2 \text{ cm/s}$$

och vi får

$$k_{max} = 5 \cdot 36 \cdot 10^{-6} = 180 \cdot 10^{-6} \text{ cm/s}$$

samt

$$k_{min} = 5 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ cm/s}$$

För $\underline{h_c}$ gäller

$$h_c = 0{,}6/d$$

och vi får

$$h_{c,max} = 0{,}6/2 \cdot 10^{-3} = 300 \text{ cm}$$

samt

$$h_{c,min} = 0{,}6/6 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ cm}$$

Geometriska medelvärdet för $\underline{k}$ blir

$$k_m = \sqrt{20 \cdot 10^{-6} \cdot 180 \cdot 10^{-6}} = 60 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$$

och harmoniska medelvärdet för $\underline{h_c}$ blir

$$\frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{100}\right) = \frac{200}{300 \cdot 100} = \frac{2}{300}$$

$$h_c = 150 \text{ cm}$$

Insättning av dessa värden ger

$$v_c = 6 \cdot 10^{-5}\ \frac{150 - 100}{100}\ 3600 \cdot 10 \text{ mm/tim}$$

$$v_c = 10{,}8 \text{ mm/tim}$$

Svar: $v_c = 10{,}8$ mm/tim

Anmärkning:

Med hänsyn till att finmons nedre kapillära gräns är 100 cm saknar en del porer (antalet bestäms av porstorleksfördelningen) möjlighet att utveckla någon aktiv drivande kapillärspänning vid 100 cm höjd över en grundvattenyta. Om vatten avdunstar eller på annat sätt avlägsnas från de finare porerna töms de grövre kapillärerna, luft inkommer, horisonten ljusnar och den kapillära transporten nedsättes. Vårt skattade värde är därför säkert för högt, men hur mycket, beror av faktorer, som i så fall närmare måste specificeras Närmare se arbetet Kapillaritet!

40. Om sambandet mellan bindningstryck $\underline{h_t}$ cm v.p. och vattenhalt $\underline{w}$ volymprocent för en viss jord är definierat av uttrycket

$$h_t = 332 - 8\ w$$

i intervallet $4 \leq w \leq 41{,}5$ volymprocent, hur lyder då uttrycket för sambandet mellan grundvattenytans djup $\underline{h_o}$ och vattenhalten $\underline{w}$? Beräkna med hjälp av det funna uttrycket, mängden fritt vatten i profilens övre meter för $\underline{h_o} = 200$ cm.

För profilen gäller dessutom $\underline{w_v} = 2{,}0$ proc. och $\underline{n} = 45$ proc.

Lösning:

För bindningstryckets tillväxt vid dräneringsjämvikt i en profil gäller formeln

$$h_t = h_o - z$$

där $\underline{h_t}$ är bindningstrycket i cm v.p. på $\underline{z}$ cm djup i profilen, då gr.v.-ytan står på $\underline{h_o}$ cm djup.

Följaktligen måste i detta fall då gälla

$$h_t = 332 - 8\ w = h_o - z$$

vilket i ord innebär, att vattenhalten ställer in sig så att det rådande vattenavförande trycket kan upptas.

Ekvationen för vattenhaltskurvan vid dräneringsjämvikt blir alltså ($\underline{w}$ löses ut!)

$$w_{dr,h_o} = 0{,}125\ z + (41{,}5 - 0{,}125\ h_o)$$

där $\underline{h_o}$ kan uppfattas som en parameter, vilken antar olika värden alltefter grundvattenytans djup under markytan.

För mängden fritt vatten $\underline{dV_{v,fr}}$ i en horisont $\underline{dz}$ gäller (se äv. tidigare ex.!)

$$dV_{v,fr} = \frac{1}{10}\ (n - w_{dr,h_o})\ dz\ \text{mm}$$

dvs. i detta fall med $\underline{h_o}$ = 200 cm

$$dV_{v,fr} = \frac{1}{10}(45 - 0{,}125\ z - 16{,}5)\ dz$$

$$V_{v,fr} = \frac{1}{10}\int_0^{100}(28{,}5 - 0{,}125z)dz = \frac{1}{10}\Big|_0^{100}\ 28{,}5\ z - \frac{0{,}125}{2}\ z^2$$

$$V_{v,fr} = 285 - 62{,}5 = 222{,}5\ \text{mm}$$

Svar: Vattenhaltskurvan vid dräneringsjämvikt bestäms av ekv.

$$w_{dr,h_o} = 0{,}125\ z + (41{,}5 - 0{,}125\ h_o)$$

och mängden fritt vatten vid ett grundvattenstånd av 200 cm djup blir 222,5 mm.

41. Beräkna med hjälp av formeln

$$\pi\,(\text{atm}) = 3068\ \log \frac{100}{\varphi}$$

där $\underline{\varphi}$ är relativa fuktigheten i procent, vilken relativ fuktighet, som svarar mot det vattenbindande trycket vid vissningsgränsen!

Lösning:

Vissningsgränsen svarar mot bindningstrycket 15 atm, vilket ger

$$15 = 3068\ \log 100/\varphi$$

eller

$$\log \frac{100}{\varphi} = \frac{15}{3068} = 0{,}004889$$

Med 6-ställig logaritmtabell erhålles:

	log 1,0114 = 0,004923	log 100/φ = 0,004889
	log 1,0113 = 0,004880	log 1,0113 = 0,004880
Diff.	0,00010 - 0,000043	x - 0,000009

$$100/\varphi = 1{,}0113 + \frac{0{,}00010}{0{,}000043}\cdot 0{,}000009 = 1{,}0113 + 0{,}00002$$

$$\varphi = 100/1{,}01132; \qquad \varphi = 98{,}88$$

Svar: Mot bindningstrycket $\underline{h_t}$ = 15 atm svarar rel. fuktigheten $\underline{\varphi}$ = 98,9 proc.

42. Hur mycket vatten innehåller 1 m^3 luft, som är mättad på vattenånga vid $+25^\circ C$?

Vattenångans mättnadstryck vid $+25^\circ C$ är 31,66 mbar. Vattnets molekylvikt är 18,02 och molvolymen är 22,414 l vid NTP.

Lösning:

Vi tillämpar gasernas allmänna tillståndslag och får

$$\frac{31{,}66 \cdot 1000}{298} = \frac{1013 \cdot V_o}{273}$$

som ger

$$V_o = \frac{273 \cdot 31660}{298 \cdot 1013} = 28{,}63$$

Nu vet vi dessutom, att 22,414 l vid NTP svarar mot 18,02 g vattenånga dvs. mängden vattenånga (bet. x) i g blir då

$$x = \frac{18{,}02}{22{,}414} V_o = 23{,}0 \text{ g}$$

Svar: 23,0 g vatten

43. Vad är daggpunkten för $30^\circ C$ varm luft med relativa fuktigheten 60 procent?

Lösning:

Enligt tabell är vattenångans mättnadstryck e_m vid $+30^\circ C$ 42,42 mbar

Detta innebär, att ångtrycket e är

$$e = \frac{\varphi}{100} e_m = \frac{60}{100} \cdot 42{,}42 = 25{,}45 \text{ mbar}$$

Enligt tabell är mättnadstrycket vid $22^\circ C$ 26,44 mbar och vid $23^\circ C$ 28,09 mbar. Interpolation häremellan ger $22{,}0^\circ C$

Svar: Daggpunkten är $22{,}0^\circ C$

44. Lufttemperaturen har en dag varit $+20^\circ C$ och relativa fuktigheten 70 procent. Under natten sjunker temperaturen till $+2^\circ C$. Påföljande morgon uppmäter man en daggmängd av 0,5 mm. Beräkna hur många m^3 luft som per m^2 avgivit sin fukt!

Lösning:

Enligt tabell är innehållet av vattenånga vid temp. $+20^\circ C$

$17,34 \cdot 10^{-3}$ kg/m^3 och vid temp. +2°C $5,55 \cdot 10^{-3}$ kg/m^3.

0,5 mm utfälld dagg svarar mot 0,5 kg vatten per m^2. Den volym luft $\underline{x}$ i m^3, som avgivit sin fukt bestäms då av ekv.

$$0,5 = x(17,34 - 5,55)\ 10^{-3}$$

$$x = \frac{5 \cdot 10^2}{11,79} = 42,4 \text{ m}^3$$

För att denna daggbildning skall åstadkommas måste all överskottsfukt fällas ut ur en 42,4 m hög luftpelare.

<u>Svar</u>: 42,4 m^3

43. Enligt W. Johansson (Grundförbättring, 1969) gäller för Anderssons evaporimeter (M.F.U. XVIII) formeln

$$E_p = 0,14 + 3,7 \cdot 10^{-3}\ Q + 0,13\ v(e_m - e)$$

där beteckningarna har följande innebörd

E_p = evaporationen från mätaren i mm/dygn
Q = insolationen i cal/dygn
v = medelvindhastighet per dygn på 1,5 m höjd över markytan i m/s
e_m = vattenångans mättningstryck i mm Hg i luften på 1,5 m höjd vid en temperatur = dygnets medeltemperatur
e = vattenångans motsvarande medeltryck under dygnet

Beräkna $\underline{E_p}$ för $\underline{Q}$ = 300 cal/dygn, $\underline{v}$ = 5 m/s, e_m = 13,6 mm Hg och $\underline{e}$ = 7,0 mm Hg.

Lösning:
Direkt insättning ger

$$E_p = 0,14 + 3,7 \cdot 10^{-3} \cdot 300 + 0,13 \cdot 5 \cdot (13,6 - 7,0)$$
$$E_p = 0,14 + 1,11 + 4,29 = 5,54 \text{ mm}$$

<u>Svar</u>: Avdunstningen $\underline{E_p}$ är 5,5 mm

44. Vid experimentella undersökningar av vattnets strömning i omättad jord vill man ha möjlighet att mäta genomströmningen vid så låga $\underline{k}$-värden som $k = 10^{-10}$ cm/s. Vid den konstruktiva utformningen av mätapparaturen har man valt en genomströmningsarea av 67,2 cm^2. Med hjälp av en på utströmningssidan inkopplad byrett kan man mäta en minsta utrinnande mängd av 0,05 cm^3/dygn.

Bestäm den tryckskillnad i cm v.p., som måste råda mellan ett 3 cm långt (högt) prov, om ovan angivna värden antas gälla för ett visst mycket svårgenomsläppligt prov.

Lösning:

Vi antar, att en med Darcys lag formellt likartad lag gäller vid omättad strömning dvs.

$$Q = k \cdot A \cdot I \cdot t$$

där bokstäverna har i föreläsningarna (se äv. M.F.U. XX!) given betydelse.

Insättning ger

$$0,05 = 10^{-10} \cdot 67,2 \frac{x}{3} \cdot 24 \cdot 3600$$

där x bet. tryckdiff. i cm v.p.

Vi får

$$x = 258 \text{ cm v.p.}$$

45. I vissa populära framställningar om växternas vattenförbrukning anföres, att en björk kan transpirera upp till 500 l vatten på en dag.

Genomför någon enkel kalkyl för att visa om detta är en rimlig eller helt orimlig storleksordning på transpirationen hos ett träd!

Lösning:

Vi vet, att som medelvärde för transpirationen hos en gräsmatta i god trim och med god vattenförsörjning kan vi sätta transpirationen = 3 mm/dag. Extremvärden på 7 à 8 mm/dag är ej ovanliga. Extremvärden för t.ex. en björk som solitärträd bör kunna ligga högre räknat på samma sätt dvs. i mm/dag och hänförd till den horisontella utbredningen av rotsystemet.

Vi antar, att björkens rotsystem horisontellt svarar mot en yta med radien r m och att dess transpiration är Q l/dag eller N mm/dag. Då gäller

$$Q = \pi r^2 N$$

eller

$$r = \sqrt{Q/\pi N}$$

För Q = 500 l/dag och N t.ex. (se ovan!) 8 mm/dag, får vi den nödv. radiella utbredningen av rotsystemet till

$$r = \sqrt{500/8\pi} = 4,5 \text{ m}$$

vilket är helt plausibelt.

46. Beräkna i anslutning till nedanstående diagram (fig. 8!) ur M.F.U. XI den mot upptorkningen i profilens övre meter svarande genomsnittliga evapotraspirationen i mm/dag från vetebeståndet på profilplatsen under tiden 23.5-13.6!

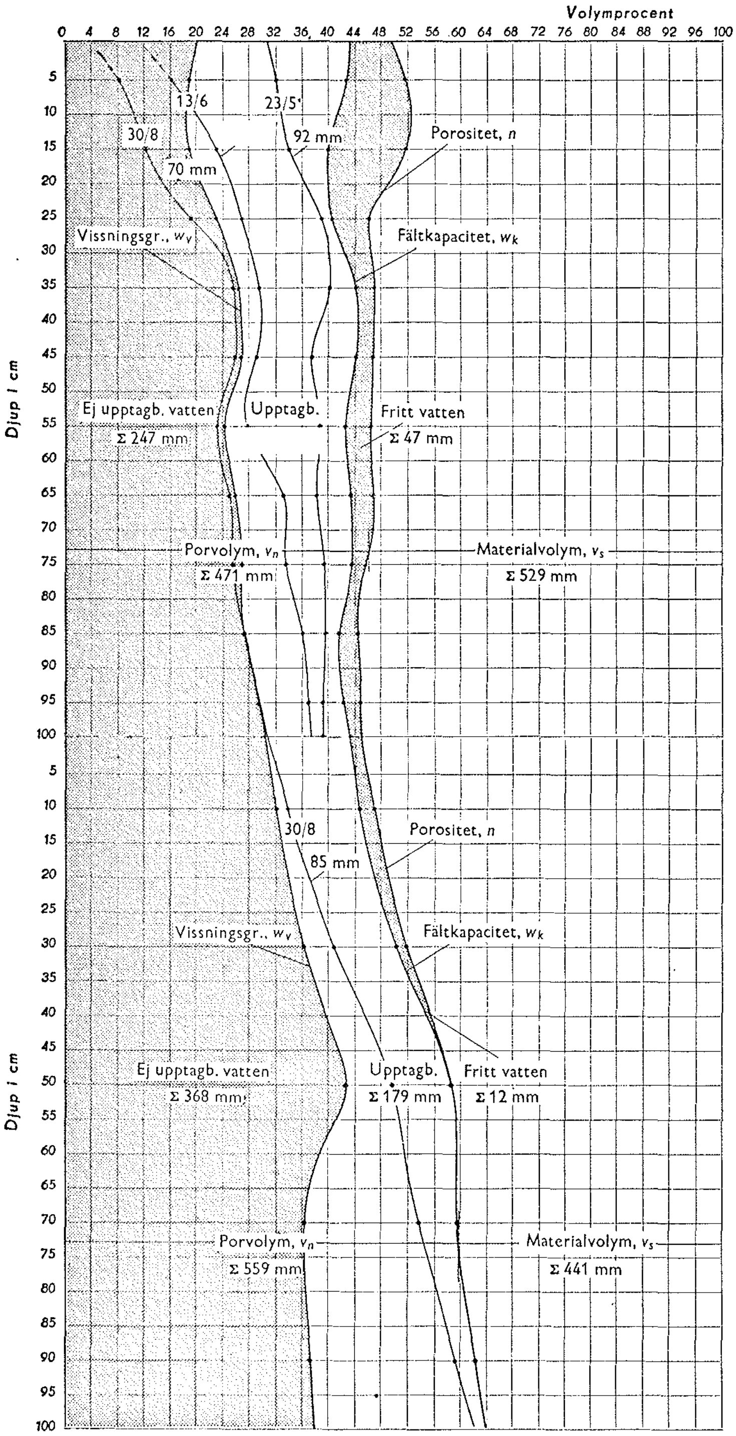


Fig. 8.

Lösning:

Vi lägger med hjälp av en pappersremsa (eller kanten av ett pappersark) grafiskt ihop vattenhaltsdifferenserna emellan vattenhaltskurvorna för den 23.5 och 13.6. Vi börjar på djupet 5 cm går till 15 cm, 25 cm osv. ned till 95 cm djup.

Avståndet mellan begynnelsepunkten och slutpunkten efter genomförd summering visar sig (inom felgränsen för summeringsmetoden ca 1 volymproc.) svara mot 86 volymprocent och således då också mot 86 mm.

Antalet dagar emellan d. 23.5 och d. 13.6 är 8 + 13 = 21. Detta ger en genomsnittlig evapotranspiration av 86/21 = 4,1 mm/dag.

Svar: Evapotranspirationen var
4,1 mm/dag

47. Beräkna i anslutning till föregående exempel mängden upptagbart vatten i profilen (U.1.55, M.F.U. XI) ned till 1 m djup!

Lösning:

Grafisk summering med hjälp av pappersremsa ger 176 volymprocent och således blir den sökta mängden 176 mm.

Svar: 176 mm

48. Visa att

$$\gamma = \gamma_t + \frac{w_2}{100}$$

och speciellt

$$\gamma_{v,m} = \gamma_t + \frac{n}{100}$$

samt beräkna i anslutning till diagrammet (fig. 8) mellan vilka gränser volymvikten γ kan svänga i matjordens övre 10-cm lager under rådande struktur och om nedre vattenhaltsgränsen sätts lika med vissningsgränsen w_v och ϱ är 2,65 g/cm^3.

Lösning:

Vi får omedelbart, om vi betraktar volymen 1 dm^3 jord, att den aktuella volymvikten γ kg/dm^3 då måste vara

$$\gamma = \gamma_t + \frac{w_2 \cdot 1}{100}$$

där γ_t är vikten av torrsubstansen jord i en kubikdecimeter och w_2

är volymprocenten vatten.

Således

$$\gamma = \gamma_t + \frac{w_2}{100}$$

som för $w_2 = n$ helt vattenfylld jord ger

$$\gamma_{v,m} = \gamma_t + \frac{n}{100}$$

Ur diagrammet (fig. 8) avläses: w_v = 19,1 volymproc. och n = 51,7 volymproc., varav

$$\gamma_t = (1 - \frac{51,7}{100})\ 2,65 = 1,28\ \text{kg/dm}^3$$

och

$$\gamma_{v,m} = 1,28 + \frac{51,7}{100} = 1,80\ \text{kg/dm}^3$$

Svar: För volymvikten γ gäller

$$\gamma_t = 1,28 \leq \gamma \leq \gamma_{v,m} = 1,80\ \text{kg/dm}^3$$

49. Den av vätsketrycket p mot en plan yta förorsakade totala kraften, tryckkraften F, kan såsom i olika sammanhang framkommit uppfattas som resultanten till alla elementartryckkrafterna dF mot elementarytorna dA dvs.

$$dF = p\ dA = \rho\ g\ z\ dA$$

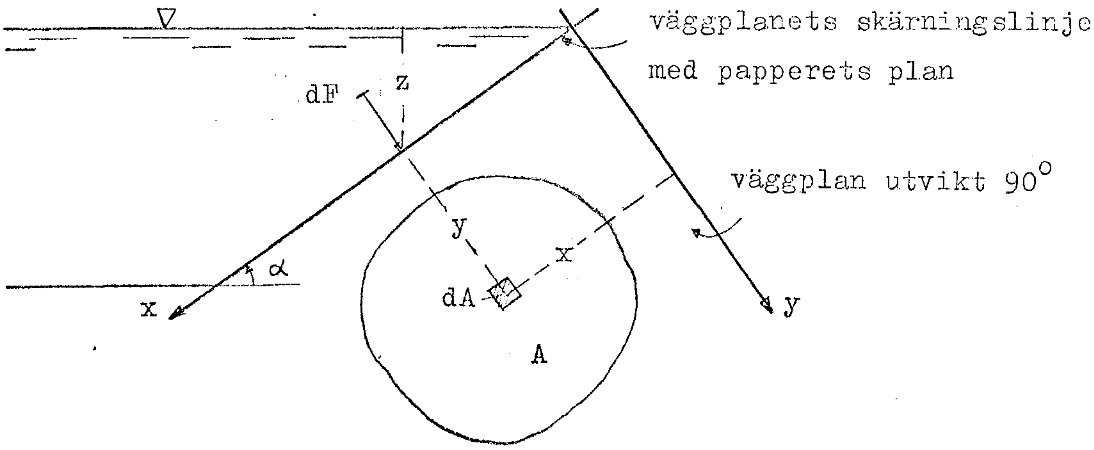
där z är vätskedjupet över ytan dA.

Det resulterade vätsketryckets anbringningspunkt, tryckkraftens anbringningspunkt z_c, benämnes tryckcentrum.

Försök att bestämma dess djupläge för en plan yta!

Lösning:

Låt oss betrakta en godtyckligt begränsad del av en snedställd plan yta, utgörande vägg i en behållare för vätska (vatten) enligt nedanstående schematiska figur, i vilken även beteckningar blivit införda.



Tryckkraften $\underline{dF}$ mot ytan $\underline{dA}$ blir (ρ = vätskans täthet)

$$dF = \rho\, g\, z\, dA$$

Tryckkraftens $\underline{dF}$ moment $\underline{dM}$ med avs. på $\underline{y}$-axeln blir

$$dM = dF \cdot x = \rho\, g\, z\, x\, dA$$

men

$$z = x \sin\alpha$$

varför

$$dM = \rho\, g \sin\alpha\, x^2\, dA$$

och således

$$M = \rho\, g \sin\alpha \int_A x^2\, dA$$

varvid $\underline{{}_A}$ markerar att integralen skall tas över hela ytan $\underline{A}$.

Om vi nu antar, att tryckcentrum har $\underline{x}$-koordinaten $\underline{x_c}$ och att ytans geometriska tyngdpunkt har $\underline{x}$-koordinaten $\underline{x_o}$, så måste gälla

$$M = F \cdot x_c = \rho\, g\, z_o A \cdot x_c = \rho\, g\, x_o \sin\alpha \cdot A\, x_c = \rho\, g \sin\alpha \int_A x^2\, dA$$

eller efter förenkling

$$x_c = \frac{\int_A x^2\, dA}{x_o A}$$

med tryckcentrums djupläge bestämt av relationen

$$z_c = x_c \sin\alpha$$

Är $\underline{\alpha} = 90^\circ$ dvs. ytan vertikal gäller $\underline{z} = \underline{x}$ och således

$$z_c = \frac{\int_A z^2\, dA}{z_o A}$$

Svar: Tryckcentrums djupläge z_c är bestämt av formeln

$$x_c = \oint_A x^2 \, dA / x_o A$$

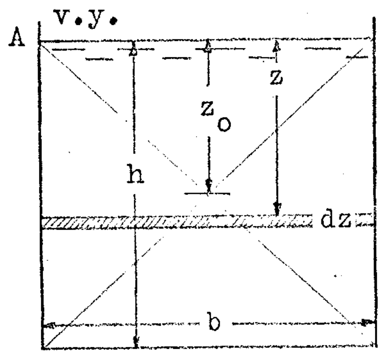
där $z_c = x_c \sin\alpha$

och beteckningarna har den betydelse, som framgår av lösningen.

50. Bestäm tryckcentrums djupläge för en vertikalt ställd rektangulär yta, som utgör vägg i en behållare för vätska och vars ena kantlinje sammanfaller med vätskeytan.

Lösning:

Vi ritar en enkel figur och inför beteckningar. I anslutning till närmast föreg. ex. får vi då



$$z_c = \oint_A z^2 \, dA / z_o A = \int_0^h z^2 \, b \, dz / \frac{h}{2} \cdot bh$$

$$z_c = \Big|_0^h \frac{z^3 b}{3} / \frac{h}{2} \cdot bh = \frac{h^3 b}{3} / \frac{h^2 b}{2} = \frac{2}{3} h$$

Annan lösning:

Om vi i anslutning till fig. direkt utgår från definitionen på tryckcentrum såsom den punkt, där resultanten till alla deltrycken kan tänkas angripa, får vi med momentaxeln AB

$$z_c \int_0^h \rho \, g \, z \, bdz = \int_0^h \rho \, g \, z \, bdz \cdot z$$

enligt satsen det helas moment = delarnas moment

$$z_c \, \rho \, g \, b \Big|_0^h \frac{z^2}{2} = \rho \, g \, b \Big|_0^h \frac{z^3}{3}$$

$$z_c = \frac{2}{3} h$$

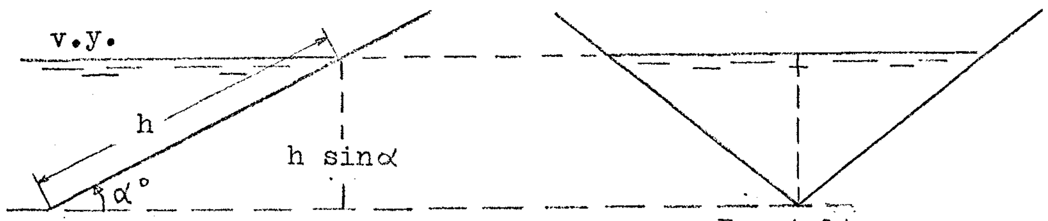
Svar: Om den rektangulära ytans vertikala sida har längden h ligger tryckcentrum på djupet 2h/3

51. En liksidig triangel med sidan 400 mm utgör vägg i en behållare för vatten. Dess höjd bildar vinkeln 30° med horisontalplanet och en av dess sidor sammanfaller med vattenytan.

Bestäm tryckkraftens storlek!

Lösning:

Vi ritar en schematisk figur och löser först det allmänna fallet att sidan är s och lutningen α°, varefter vi sätter in givna värden och löser det numeriska, givna exemplet.



Höjden h i en liksidig triangel med sidan s är $s\sqrt{3}/2$ och ytan är $s^2\sqrt{3}/4$. Tyngdpunkten ligger i medianernas skärningspunkt dvs. $s\sqrt{3}/6$ enheter från basen. Om höjden dessutom bildar vinkeln α° med horisontalplanet får vi således helt allmänt för tryckkraften F

$$F = \rho g z_0 A = \rho g \frac{s\sqrt{3}}{6} \sin\alpha \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$$

$$F = \rho g s^3 \sin\alpha /8$$

I detta fall gäller $\rho = 1000$ kg/m^3. $s = 0,4$ m och $\alpha = 30^{\circ}$

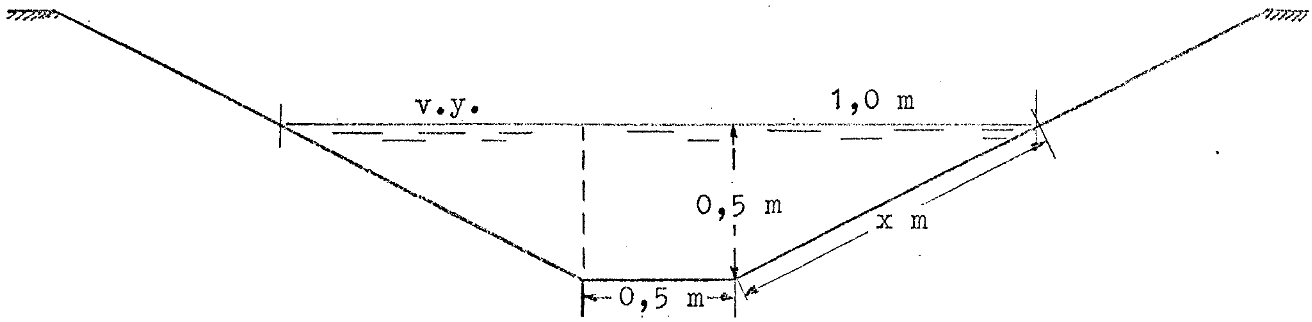
$$F = 1000 g \overline{0,4}^3 \cdot 0,5/8 = 4 g N = 4 kp$$

Svar: 4 kp

52. Hur mycket vatten framrinner i ett öppet dike, vars släntlutning är 1:2, bottenbredd 0,5 m och som ligger i fallet 2:1000, om vattendjupet är 0,5 m.

Lösning:

Vi ritar en schematisk skiss av dikets tvärsektion, varvid 0,5 m sättes = 2 cm



$$x = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}0^2} = \sqrt{1{,}25} = 1{,}12 \text{ m}$$

$$R_h = A/p \; ; \quad A = 0{,}5(0{,}5 + 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}0)/2 = 0{,}75 \text{ m}$$

$$p = 0{,}5 + 2\sqrt{1{,}25} = 2{,}74 \text{ m}; \quad R_h = 0{,}75/2{,}74 = 0{,}274 \text{ m}$$

Vi sätter C i de Chezys formel = 30 (Se Kompendiet!)

$$v = 30\sqrt{0{,}274 \cdot 0{,}002} = 30 \cdot 0{,}001\sqrt{548} = 0{,}030 \cdot 23{,}41$$

$$v = 0{,}702 \text{ m/s}$$

$$Q = 0{,}702 \cdot 0{,}75 = 0{,}527 \text{ m}^3/\text{s}$$

<u>Svar</u>: $0{,}53 \text{ m}^3/\text{s}$

Forts. från omslagets andra sida

Nr	År	Författare och titel
41	1969	Nils Brink. Kväve och fosfor i Sävjaån
42	1969	Nils Brink. Sagåns vatten
43	1970	Waldemar Johansson. Anvisning för projektering och dimensionering av bevattningsanläggningar
44	1970	Gunnar Hallgren. Dränering av tomtmark, vägar, trädgårdar, kyrkogårdar, idrottsplatser, flygfält m.m.
45	1970	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1969 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök
46	1971	Gösta Berglund. Kalkens inverkan på jordens struktur
47	1971	Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av 1970 års täckdikningsförsök och bevattningsförsök
48	1971	John Sandsborg. Exempelsamling i hydromekanik
49	1971	Janne Eriksson. Bevattning. Tropiskt lantbruk
50	1971	Janne Eriksson. Erosion. Tropiskt lantbruk
51	1972	Aug. Håkansson, Waldemar Johansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Resultat av 1971 års täckdiknings-, bevattnings- och kalkningsförsök
52	1972	Sigvard Andersson. Agrohydrologi. Skrivningar för 5 poäng, med svar, lösningar och kommentarer