

KAPILLARITET

SIGVARD ANDERSSON

STENCILTRYCK NR 21

**INSTITUTIONEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK
UPPSALA 1960**

Institutionen för lantbrukets hydroteknik delger bl. a. i sin tidskrift *Grundförbättring* resultat från institutionens olika verksamhetsgrenar. Allt material blir emellertid inte föremål för tryckning. Undersökningsresultat av preliminär natur och annat material som av olika anledningar ej ges ut i tryck delges ofta i stencilerad form. Institutionen har ansett det lämpligt att redovisa dylikt material i form av en i fri följd utarbetad serie, benämnd stenciltryck. Serien finns endast tillgänglig på institutionen och kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Institutionen för lantbrukets hydroteknik, *Uppsala 7*

Stenciltryck

Nr	År	Författare och titel
1—12		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Redogörelse för resultaten av täckdikningsförsöken åren 1951—1962.
13—15		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av täckdikningsförsök och bevattningsförsök åren 1963—1965.
16	1940	Gunnar Høllgren. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; några hydrotekniska studier.
17	1942	Gunnar Høllgren. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient.
18	1943	Gunnar Høllgren. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning.
19	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydromekanik.
20	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller och kommentarer.
21	1960	Sigvard Andersson. Kapillaritet.

Institutionen för agronomisk hydroteknik
Kungl. lantbrukshögskolan

KAPILLARITET

av

Sigvard Andersson

Uppsala 1960

FÖRORD.

Detta arbete är ett försök att under en relativt enkel och enhetlig synpunkt behandla några av de fenomen, som inrymmes under termen kapillaritet. Den vid arbetets utformning vägledande föreställningen har varit och är, att kapillaritetens vattenfördelande och mekaniska verkningar kan förstås och åtminstone kvalitativt beräknas utifrån hypotesen om ytspänningen eller som K. Therzaghi (1946) skriver: "all its mechanical effects can be accurately computed on the assumption that the locus of the force is the line along which water, air and solid meets".

Det material, som utredningarna i detta arbete bygger på, har vuxit fram som ett resultat av egna experimentella arbeten alltsedan 1953, av litteraturstudier, av egna teoretiska analyser, problemformuleringar och undervisningsverksamhet vid Kungl. lantbrukshögskolan. Ur den rikhaltiga och inom många områden spridda litteraturen har jag hämtat viktiga synpunkter och data. Den i slutet av arbetet anförda litteraturen utgör ingen fullständig förteckning över den använda litteraturen. Emellertid är den så pass utförlig och så utformad, att den kan tjänstgöra såsom en första inkörsport för vidare studier inom här behandlade problem. Problem av fundamental betydelse för vår förståelse av samspelet mellan mark, vatten och gröda.

Arbetet har förelegat såsom ett tämligen färdigt manuskript i ett par års tid. När det nu utges i stencilerad form är det emellertid intet färdigt verk. Det var min avsikt att fullborda detsamma med några kapitler om föreställningarna kring de viktiga begreppen infiltration, kapillär vertikal strömning nedåt, kapillär potential, porstorleksanalys samt kapillaritetens betydelse i fält. Detta har dock icke blivit möjligt, men jag hoppas kunna utge ett komplement, vari dessa frågor kan behandlas.

På grund av besvärlig textuppställning, matematiska tecken och formler, figurer och kurvor har det varit svårt att vid stencileringen undvika oklarheter i typografin. Jag hoppas dock att arbetet skall kunna tjäna sin uppgift att vidga den krets, som med växande insikt håller diskussionen om våra jordars vattenförhållanden vid liv och för vetandet härom vidare.

Uppsala i februari 1960

Sigvard Andersson

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	Sida
<u>1. Inledning.</u>	
11. Begreppet kapillaritet i fysiken.	1
12. Begreppet kapillaritet i markfysiken.	1
13. Vägledande föreställningar; problemställning och disposition.	2
<u>2. Kapillaritetens fysikaliska grund.</u>	
21. Om begreppet ytspänning; några empiriska fakta.	3
211. Definition av begreppet ytspänning; adhesions- vågen.	4
212. Ytspänningen vid krökta ytor.	7
213. Normaltryckets storlek vid krökta ytor; Laplaces formel.	8
214. Några exempel.	10
22. Molekylarteoretisk tolkning av ytspänningen.	12
23. Om våtande och icke våtande betingelser.	15
24. Vattnets stigning i ett kapillärrör.	17
241. Om tryckförhållandena i ett kapillärrör.	19
242. Några exempel.	21
25. Vattnets stigning i en kapillär spalt.	23
251. Några exempel.	24
26. Om sambandet mellan porradie, ytspänning och pF .	28
<u>3. Jordarternas kapillaritet.</u>	
31. Ett grundläggande diagram; några definitioner.	35
311. Inre och yttre variabler.	39
312. Inre variabler.	40
313. Definition av kapillaritetens fyra fundamental- punkter.	42
32. Några exempel.	44
33. Om sambandet mellan korndiameter och kapillaritet.	52
34. Vattnets stigning i en torr jordpelare.	68
341. Härledning av en ekvation för vattnets kapillära stigning i en torr eller nära torr jordpelare.	69
342. Diagram över funktionen $f(z, t, d) = 0$.	72
343. Exempel.	80

	Sida
35. Horisontell kapillär strömning.	87
351. Horisontell kapillär strömning i liggande pelare med konstant tvärsnitt.	88
352. Några exempel.	93
353. Horisontell kapillär rörelse över ett plan med konstant bäddtjocklek.	97
354. Radiell kapillär strömning över ett horisontellt plan.	98
355. Radiell kapillär strömning i ett kornigt system med $d = 0.02$ mm (ett exempel).	103
356. Några exempel.	106
Litteraturförteckning.	113

1. Inledning.

11. Begreppet kapillaritet i fysiken.

I fysiken sammanfattas under termen kapillaritet en grupp av fenomen, som kunna visas bero av en till gränsytorna mellan olika medier (ex. luft-vatten) knuten energiform ytspänningsenergi (ytenergi) och en häremot svarande spänning benämnd ytspänning. Namnet kommer av latinets ord för hår "capilli". Termen syftar i inskränkt mening på de företeelser, hårrörsfenomen, som uppkomma då smala rör (kapillär-rör = hårrör) nedsänkas i en vätska. Vätskenivån inuti röret avviker efter uppnådd jämvikt mer eller mindre från vätskenivån utanför röret. Vätskan kan beroende av rörväggens och vätskans egenskaper ställa sig högre eller lägre inuti röret. Lagen om kommunicerande kärl synes ej gälla. Ställer sig vätskan inuti röret högre än den fria vätskeytan utanför röret, talar man om kapillär elevation ex. vatten-rent glas, och ställer sig vätskan lägre, talar man om kapillär depression ex. kvicksilver - glas. Inom fysiken och den fysikaliska kemien söker man återföra beskrivningen och analysen av kapillariteten på attraktionskrafter av olika slag: koheisionskrafter, som verka mellan molekylerna i ett ämne och adhesionskrafter, som verka emellan molekyler av skilda ämnen.

12. Begreppet kapillaritet i markfysiken.

Inom markfysiken och agrohydrologien (jfr här G. Ekström 1938!) sammanfatta vi under termen kapillaritet de olika yttringarna av den till gränsytorna porvägg (= partikel-yta), luft och vatten knutna ytspänningen. I mera inskränkt mening skulle man också med termen en jordarts kapillaritet kunna beteckna mängden och rörligheten av det vatten i jordarten (marken), vars bindning och rörelse i huvudsak bestämmes eller kan bestämmas av ytspänningskrafter. Jämför här med följande vanliga uttryck: kapillära jordar, icke kapillära och kapillära jordarter, kapillär transport etc.

Enligt G. Ekström (1938) definieras kapillär-vatten på följande sätt: "kapillär-vatten: vatten, som av kapillärtrycket kvarhålls i jordens hålrum; det hydrostatiska trycket i kapillär-vattnet är lägre än jordluftens tryck; kapillär-vattnets yta är sammansatt av konkava menisker". L.J. Briggs (1897) ger i sin klarläggande lilla skrift: The mechanics of soil moisture, följande definition: "The capillary water is that part which would be retained in the capillary spaces under these conditions, and which is capable

of movement through capillary action." Härvid syftar "these conditions" på rådande dräneringsbetingelser. Vid vår preliminära indelning av markvattnet i början av agrohydrologien definierades kapillärvattnet som den del av det bundna vattnet, vars bindning och rörelse i jorden eller marken i huvudsak bestämmes av eller kan bestämmas av ytspänningskrafter (jfr med ovan!). Såsom vi senare skola finna är det också utmärkande för kapillärvattnet, att det hydrostatiska trycket inuti detsamma är lägre än trycket i omgivande mark- eller jordluft (jfr. bl.a. med avd. 241!). Detta förhållande införes också som en särskiljande bestämning i G. Ekströms (1938) i det föregående citerade definition.

De kapillära fenomenen i våra jordar visa sig för den skolade iakttagaren på många olika sätt: jordkokor sprängas sönder av regn, dikesslänten håller sig på ett karakteristiskt sätt fuktig över vattenytan, sanden är lätt formbar inom vissa vattenhaltsgränser, vattnet suges in i en torr jordpelare osv.

13. Vägledande föreställningar; problemställning och disposition.

Under begreppet kapillaritet inrymmer ett stort komplex av frågeställningar, vilka på olika sätt äro inflätade i varandra. Många av dessa frågeställningar gripa djupt in i markfysikens och agrohydrologiens fundamentala frågeställningar. Det kan här räcka att anföra begreppspar: kapillaritet - porsystem, d.v.s. kapillaritetens utforskande fordrar en parallellt förlöpande analys av jordens eller markens porsystem. Litteraturen inom området är mycket omfattande och den har vuxit enormt alltsedan G. Schübler, W. Schumacher och E. Wollny under senare hälften av 1800-talet gjorde sina banbrytande insatser i Tyskland. Andra betydande namn från denna pionjärtid äro E.W. Hilgard, F.H. King och C.S. Slichter. Viktiga insatser utfördes kring sekelskiftet av amerikanerna L.J. Briggs och E. Buckingham. Det är här icke nödvändigt att gå in på de många framstående forskarnamn, som vi möta under 1900-talets första decennier och fram till vår tid och som på olika sätt bidragit att öka vårt vetande om de kapillära fenomenen i marken. Genom sitt arbete: "Om jordarternas kapillaritet" har G. Beskow (1929) givit oss ett viktigt bidrag till vårt vetande om kapillariteten. Han har också i många andra publikationer diskuterat och med hjälp av experimentellt material belyst kapillaritetens betydelse. Se t.ex. G. Beskow (1932)! Den för mera omfattande studier intresserade hänvisar jag för övrigt till i slutet av detta arbete upptagen litteratur. I fortsättningen anföras endast sparsamt litteraturhänvisningar. Detta göres för att ej för mycket tynga framställningen och splittra tankegången.

Detta arbete avser icke att ge en systematiskt uttömmande bild av kapillariteten i våra jordar och ännu mindre beträffande dess detaljer. Härför skulle erfordras uppläggandet av ett helt annat och mera omfattande arbete än vad detta är avsett att bli. Det torde även vara så, att det experimentella materialet, såsom det nu föreligger i litteraturen, fortfarande är rätt ofullständigt och alltför oenhetligt för att tillåta utarbetandet av en logisk, relativt motsägelsefri teori för kapillariteten (jfr här t.ex. K. Terzaghi 1946!). Vi ha på institutionen för Agronomisk hydroteknik alltsedan 1953 experimentellt bearbetat vissa kapillära problem och äro nu i besittning av ett relativt stort material. Det är min förhoppning att det skall bli möjligt att bearbeta och publicera detta inom den närmaste framtiden. Jag kommer emellertid att redan här exemplifiera en del teoretiska utredningar med hjälp av detta material. I övrigt komma också en del hänvisningar att göras till dessa således ännu opublicerade undersökningar.

Vad detta arbete avser att ge, är en introduktion till studiet av ett av markfysikens och agrohydrologiens fundamentala och intressefyllda problemområden. Materialet grupperas härvid kring en kärna av relativt enkla matematiska härledningar och diskussioner. Den vid dessa analyser vägledande föreställningen är, att kapillaritetens vattenfördelande och mekaniska verkningar kan beräknas (åtminstone kvalitativt) utifrån hypotesen om ytspänningen eller som K. Terzaghi (1946) skriver: "all its mechanical effects can be accurately computed on the assumption that the locus of the force is the line along which water air and solid meets". (jfr här också med stycket 12!)

Då såsom ovan påpekats huvudvikten i detta arbete är lagd på ett försök att ge en viss teoretisk och systematisk framställning av kapillariteten, kommer den experimentella tekniken att beröras endast mera sporadiskt. Det blir framför allt i de fall, då klarhetsintresset synes kräva, att vissa experimentella anordningar närmare anföras. Kapillaritetens experimentella utforskande är eljest ett synnerligen besvärligt problem på grund av de i markfysiken uppträdande systemens intrikata natur.

2. Kapillaritetens fysikaliska grund.

21. Om begreppet ytspänning; några empiriska fakta.

Lätt gjorda iakttagelser och enkla experiment visa att i gränssytorna mellan olika materiella medier uppträda vissa egenbmliga fenomen. En svagt infettad synål kan — till synes i strid mot Arkimedes princip — flyta på

en vattenyta, varvid en tydlig nedbuktning av vattenytan kan iakttagas kring nålen. Vissa insekter kunna springa på en vattenyta, som buktar sig under deras tyngd. En vattendroppe på en fet yta antar sfärisk form, lika-så en kvicksilverdroppe på en skiva av glas eller trä osv. Mot bakgrunden av dessa och många liknande (se fysiken!) observationer kunna vi formulera satsen: en vätskas fria yta förhåller sig i flera avseenden som en elastisk spänd hinna, den s.k. ythuden eller ytfilmen, vilken söker att sammandraga sig så mycket som möjligt, d.v.s. anta formen av en minimiyta.

211. Definition av begreppet ytspänning; adhesionsvågen.

Ovan anfördes några lätt gjorda iakttagelser och enkla experiment. De visa här på en till vätskeytan eller helt allmänt gränsytan lokaliserad spänning, som verkar i vätskeytans plan (tangentplan vid krökta ytor) och längs normalen till ytans tänkta eller reella begränsningslinje (-kurva). Denna spänning angiven som kraft per cm av begränsningslinjen är en för varje gränsyta karakteristisk fysikalisk storhet benämnd ytspänning. Den kallas också — företrädesvis i äldre litteratur — kapillaritetskonstant, vilket ord dock oftast har en annan betydelse. Se exempel 2.01!

Begreppet ytspänning belyses bäst med hjälp av den s.k. adhesionsvågen. Denna består i princip av tre ståltrådar (-stavar) a, b och c, som äro fast förbundna med varandra i ett plan enligt figur 2.01. Längs trådarna b och c är en fjärde stav rörlig. Om en vätskelamell anbringas så, som figuren visar, uppträder en till lamellen lokaliserad kraft (= dragkraft, tension) F ,

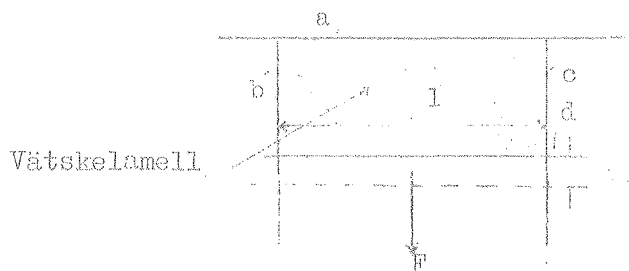


Fig. 2.01.

som strävar att föra staven d mot a. Utförda experiment ge jämviktsvillkoret, d.v.s. villkoret för att d icke skall ändra läge

$$F = 2\alpha l \quad (2.01)$$

där beteckningarnas betydelse torde framgå av figuren och siffran 2 kommer av att lamellen har två gränsytor mot omgivande luft. Konstanten α visar sig bero av vätskelamellens natur och betecknar ytspänningen.

Om kraften F mätes i dyn och trådens längd (mellan b och c) l i cm, erhålles

$$\alpha = \frac{F \text{ (dyn)}}{2 \cdot l \text{ (cm)}} = \frac{F}{2 \cdot l} \text{ dyn/cm} \quad (2.02)$$

Ekvationen (2.02) ger oss den formelmässiga definitionen av ytspänningen α eller i ord: en vätskas ytspänning är den kraft i dyn, varmed vätskan per cm av sin ytas begränsningslinje strävar att sammandraga sig (def. 1).

Multiplieras ekvationens (2.01) båda led med (se också fig. !) Δs , som är en liten förskjutning av tråden d parallellt med sig själv, erhålles

$$F \cdot \Delta s = 2\alpha l \cdot \Delta s \quad (a)$$

Tydligt är $F \cdot \Delta s = \Delta W =$ det uträttade arbetet. Observera att detta dock ej nödvändigtvis är lika med den tillförda energien. Jämför här med exempel 2.03! Ytförstoringen blir $\Delta A = 2 \cdot l \cdot \Delta s$. Införas dessa substitutioner, övergår ekv. (a) till formen

$$\Delta W = \alpha \cdot \Delta A \quad (b)$$

varav vi erhålla

$$\alpha = \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad (2.03)$$

Det uträttade arbetet ΔW har upplagrats i den nybildade ytan ΔA . Det återfinnes där i form av en specifik potentiell energi benämnd ytspänningsenergi (ytenergi). Denna energi är närmast att jämföra med termodynamikens begrepp fri energi, enär den kan återfås som nyttigt arbete, när vätskeytan får sammandra sig. Ekvationen ger oss möjlighet att definiera ytspänningen α på ett från def. 1. något avvikande men egentligen mera generellt och fruktbarande sätt: En vätskas (en kropps) ytspänning är lika med det arbete i erg, som åtgår för att förstora vätskans yta en cm^2 (def. 2.). Något längre fram skola vi göra några korta anmärkningar till denna ytenergi sedd från molekylarteoretisk synpunkt (jfr stycket 22!).

I tabell 2.01 angives vattnets ytspänning för några olika temperaturer och i tabell 2.02 angives ytspänningen hos några vanliga ämnen i kontakt med luft eller något annat ämne.

Tabell 2.01. Vattnets ytspänning mot luft. Ytspänningen anges i dyn/cm (fr. Handb. of Ch. & Ph. 13. uppl. 1946).

Temp. °C	0	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70
α dyn/cm	75,6	74,9	74,22	73,49	72,75	71,97	71,18	69,56	67,91	66,18	64,4

Av tabellen synes, att ytspänningen avtar med temperaturen. Den är lika för alla vätskor vid den kritiska temperaturen, då den är = 0.

Tabell 2.02. Några olika ämnens ytspänning i jämvikt med angivet ämne (fr. Handb. of Ch. & Ph. 13. uppl. 1946).

Ämne	I jämvikt med	t°C	$\alpha \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$
Kvikksilver	Luft	15°	487
Vatten	Kvikksilver	20°	375
"	Eter	20°	10,7
"	Bensol	20°	35
Bensol	Luft	20°	29

De i tabell 2.02 medtagna värdena avse endast att utgöra några exempel på vilka storleksordningar, som kunna förekomma, när även andra vätskor än vatten tagas i betraktande. De ha anförts i den ordning, som följer av det intresse, de synas erbjuda i detta sammanhang.

Ex. 2.01. I G. Beskows (1929) förut omnämnda arbete "Om jordarternas kapillaritet" definieras kapillaritetskonstanten a^2 enligt formeln

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\rho} \quad (a)$$

där α är vätskans ytspänning och ρ dess täthet. För vatten vid +20°C har a^2 värdet 14,833 mg/mm (enl. där anf. uppg.). Huru stor är ytspänningen i dyn/cm vid samma temperatur?

Lösning: Vi sätta $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ och erhålla

$$a^2 \text{ mg/mm} = a^2 \frac{0,981 \text{ dyn}}{0,1 \text{ cm}} = 9,81 a^2 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$$

Enl. ekv. (a) är

$$\alpha = \frac{\rho \cdot a^2}{2} = \frac{14,833 \text{ mg/mm}}{2} = \frac{9,81 \cdot 14,833}{2} \text{ dyn/cm}$$

$$\alpha = 72,76 \text{ dyn/cm}$$

Jfr med tab. 2.01!

Ex. 2.02. a kg vatten sönderdelas per minut av en spridare till droppar, vilkas radie är r cm. Huru stor är den för själva droppbildningen erforderliga effekten uttryckt i watt? Vattnets täthet sättes = 1 kg/dm^3 .

$$\text{Lösning: } a \text{ kg/min} = \frac{1000 \cdot a}{60} \text{ cm}^3/\text{s} = \frac{100 a}{6} \text{ cm}^3/\text{s}$$

Dropparnas volym är $\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ cm}^3$, och antalet bildade droppar per sek.

blir

$$\frac{100 a}{6} \cdot \frac{3}{4\pi r^3} = \frac{25 a}{2\pi r^3}$$

Varje droppe har en yta av $4\pi r^2$ cm². Totala ytförstoringen per sek. blir följaktligen

$$\frac{25 \text{ a}}{2\pi r^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{50 \text{ a}}{r} \text{ cm}^2/\text{s}$$

Effekten P i watt blir följaktligen (obs! 10^7 erg = 1 joule; 1 watt-
sek. = 1 joule)

$$P = \alpha \cdot \frac{50 \text{ a}}{r} \cdot 10^{-7} \text{ watt}$$

Ex. 2.03. Visa att, om en gränsyta (vätskeyta) förändras med dA , så är förändringen i den totala ytenergien dW bestämd av uttrycket

$$dW = \alpha \left(1 - T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right) dA$$

där T betecknar temperaturen.

Lösning: Enligt Gibbs-Helmholtz ekvation gäller

$$\Delta F = \Delta H - T \left[\frac{\partial (\Delta F)}{\partial T} \right] \quad (a)$$

(se t.ex. F. Daniels och R. Alberty 1956).

Vi tänka oss ytan utvidga sig isotermt med beloppet ΔA . Då gäller tydligen $\Delta F = \alpha \Delta A$ (b), $\Delta H = \Delta W$ (c) och

$$T \frac{\partial (\Delta F)}{\partial T} = T \frac{\partial (\alpha \Delta A)}{\partial T} = T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \Delta A \quad (d)$$

Införas dessa uttryck i ekv. (a), erhålles

$$\alpha \Delta A = \Delta W + T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \Delta A$$

eller

$$dW = \left(\alpha - T \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right) dA$$

V.S.B.

212. Ytspänningen vid krökta ytor.

Vi ha funnit, att en vätskeyta i vissa hänseenden kan jämföras med en elastiskt spänd membran eller hinna. Denna spända ytfilm (ythud) ger vid krökta ytor upphov till olika resulterande tryck. Är ytan konvex (se fig. 2.02!), d.v.s. krökningsradien riktad in mot vätskan, kommer det resulterande trycket att också vara riktat inåt mot vätskan; är ytan konkav, d.v.s. krökningsradien riktad ut från vätskan, kommer det resulterande trycket att vara riktat ut från vätskan. Vid plana ytor är resulterande trycket 0. På figur 2.02 finnes det nu sagda schematiskt återgivet.

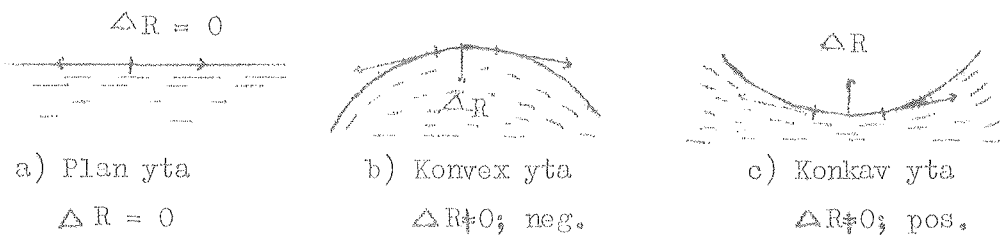


Fig. 2.02.

I figuren har ΔR räknats positiv, när den är riktad ut från vätskan. Detta är oväsentligt. Väsentligt är att ΔR är riktad åt motsatta håll i de två fallen.

213. Normaltryckets storlek vid krökta ytor; Laplaces formel.

Vi skola nu härleda ett uttryck för storleken av ovan angivna tryckresultant ΔR och det mot densamma svarande normaltrycket Δp . I figur 2.03 må ytan $A_1 A_2 B_1 B_2$ vara en utskuren del av en cylinderyta, d.v.s. en enkelkrökt yta. Ytans begränsningslinjer- och kurvbågar kan tänkas ha uppkommit därigenom, att elementet $A_1 A_2$ av cylinderytans generatris rört sig från läget $A_1 A_2$ till läget $B_1 B_2$

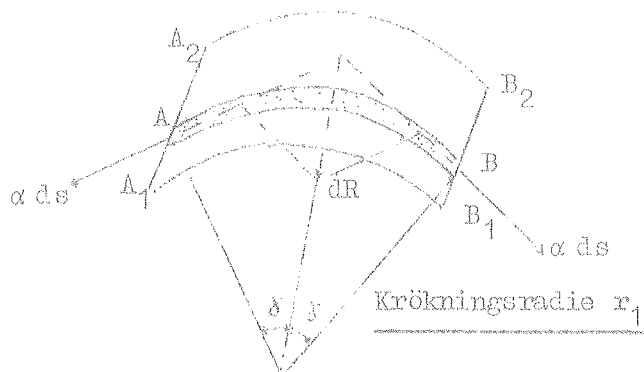


Fig. 2.03.

Om den större yta, ur vilken $A_1 A_2 B_1 B_2$ tänkes utskuren, har varierande krökning, kunna vi alltid genom att tänka oss $A_1 A_2 B_1 B_2$ tillräckligt liten (d.v.s. vid limes) anse de på figuren införda beteckningarna samma. Vi betrakta nu på denna yta en ytstrimla AB med bredden ds och bågen db . Med hjälp av figuren och de fysikaliska förutsättningarna erhålla vi (Studera figuren noga!)

$$\begin{cases} dR = 2\alpha ds \cdot \sin\gamma & (a) \\ db = 2\gamma \cdot r_1 & (b) \end{cases}$$

För små vinklar är $\sin\gamma = \gamma$ (Se någon lärobok i matematik!). Införes

detta i ekvationen (a), erhålles

$$dR = 2\alpha ds \cdot \gamma \quad (c)$$

Men ekv. (b) ger

$$\gamma = \frac{db}{2r_1} \quad (d)$$

och således

$$dR = \frac{2\alpha ds \cdot db}{2r_1} = \frac{\alpha ds \cdot db}{r_1} \quad (e)$$

Om vi med Δp beteckna det av ytspänningen förorsakade normaltrycket och beakta, att $ds \cdot db = dA$ är den betraktade strimlans yta, så erhålles

$$\Delta p = \frac{dR}{dA} = \frac{\alpha ds db}{r_1 ds db} = \frac{\alpha}{r_1} \quad (f)$$

eller, om mellanleden uteslutas

$$\Delta p = \frac{\alpha}{r_1} \quad (2.04)$$

I ord kan detta resultat uttryckas så: det av ytspänningen förorsakade normaltrycket Δp är direkt proportionellt mot ytspänningen α och omvänt proportionellt mot krökningsradien r_1 . Av det föregående framgår också, att normaltryckets riktning sammanfaller med krökningsradiens (räknad pos. mot krökningscentrum!).

Om vi antaga ytan $A_1A_2B_1B_2$ vara krökt även vinkelrätt mot riktningen AB med krökningsradien r_2 , förorsakar även denna krökning ett normaltryck, som enligt (2.04) bör vara

$$\Delta p = \frac{\alpha}{r_2} \quad (a)$$

Det totala normaltrycket erhålles tydligen genom att uttryckets (a) högra led summeras till ekvationens (2.04) högra led. Härvid erhålles

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.05)$$

Detta uttryck benämnes ofta Laplaces ekvation (efter P.S. de Laplace 1749-1827).

I geometrien visas, att för en och samma godtyckligt belägna punkt på en yta summan av $1/r_1 + 1/r_2$ är oberoende av huru de mot varandra vinkelräta normalsnitten läggs. Halva denna summa kallas ytans medelkrökning. Generellt gäller således: det av ytspänningen förorsakade normaltrycket är direkt proportionellt mot dubbla produkten av ytspänningen och medelkrökningen (jfr R. Tomaschek 1936!).

För en plan yta är krökningsradien oändligt stor ($r = \infty$) och krökningen $1/r = 0$. I överensstämmelse med figur 2.02 a blir också normaltrycket

$$\Delta p = 0.$$

Dubbelkrökta ytor, där krökningsradierna äro riktade åt motsatt håll, d.v.s. r_1 och r_2 ha olika tecken, kunna få medelkrökningen 0, om nämligen

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0 \quad (a)$$

eller $r_1 = -r_2$. På figur 2.04 finnes en sådan yta schematiskt avbildad (s.k. sadelyta).

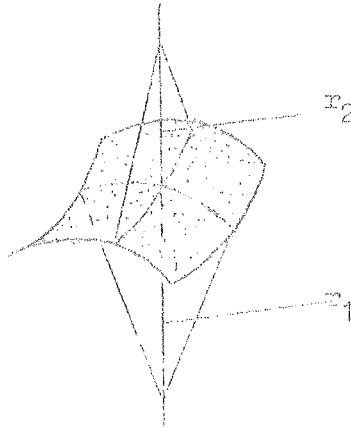


Fig. 2.04.

Sådana ytor kunna erhållas, om såplameller utspänns emellan på olika sätt formade trådramar. De på så sätt uppkomna ytorna äro minimiytor och ha ingående studerats av matematiker och fysiker (J. Plateaus problem). Se t.ex. R. Courant and H. Robbins 1953!

214. Några exempel.

Vi ha i det föregående berört några av de föreställningar, som ligga till grund för fysikens analys av ytspänningsfenomenen. Det är omöjligt och ej heller nödvändigt att följa de många förgreningar, som ur fysikalisk synpunkt redan här öppna sig. Vår uppgift är endast att lägga en viss exakt grund till förståelsen av de kapillära företeelserna i marken. För mera ingående studier hänvisas den intresserade till större läroböcker t.ex. N.K. Adam (1941), The physics and Chemistry of surfaces.

Den hittills givna framställningen kompletteras nu med några genomräknade exempel.

Ex. 2.04. Beräkna, huru överttrycket inuti en såpbubbla beror av såpbubblans radie r!

Lösning: Vi upprita figur 2.05, där såpbubblan ur synpunkten av ökad åskådlighet tänkes förbunden med en enkel manometer.

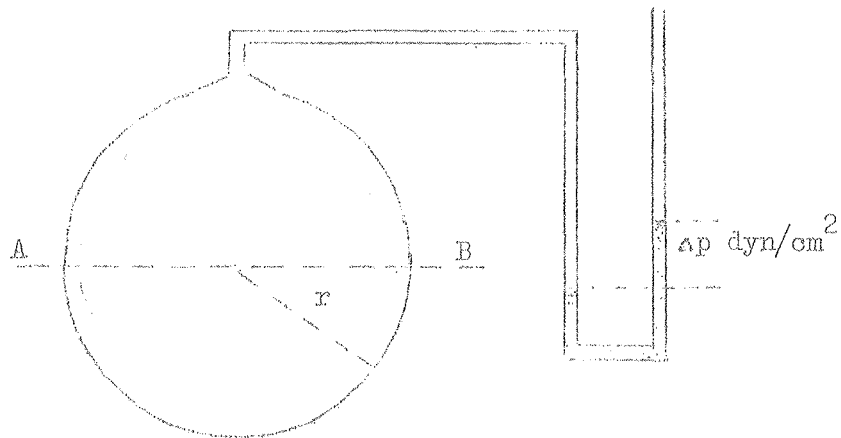


Fig. 2.05.

Lösning a. Laplaces ekv. (2.05) ger omedelbart, om vi beakta, att såpbubblan har en inre och en yttre yta.

$$\Delta p = 2\alpha\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{4\alpha}{r} \text{ dyn/cm}^2 \quad (\text{a})$$

Lösning b. Den kraft, som vill skilja såpbubblans bägge hälften åt i snittet AB är enligt mekaniken $\pi r^2 \Delta p$ dyn. Den sammanhållande kraften är enligt vår definition på ytspänning (def. 1) $2 \cdot 2 \pi r \cdot \alpha$. Jämvikten fordrar att

$$\pi r^2 \Delta p = 4\pi r \alpha$$

som ger

$$\Delta p = \frac{4\alpha}{r} \quad (\text{b})$$

Lösning c. Lösningen kan också erhållas enligt virtuella arbetets princip (se mekaniken!) och i anslutning till vår 2. def. av ytspänningen. Om blåsans radie tänkes växa med beloppet Δr , så gäller för energitillförseln

$$\Delta W = \alpha [8\pi (r + \Delta r)^2 - 8\pi r^2] \quad (\text{c}_1)$$

eller efter förenkling

$$\Delta W = 8\pi\alpha (2r\Delta r + \Delta r^2) \quad (\text{c}_2)$$

Det utförda arbetet kan även tecknas

$$\Delta W = \text{kraften} \cdot \text{vägen} = \Delta p \cdot \text{ytan} \cdot \Delta r = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r \quad (\text{c}_3)$$

Om $\Delta r \rightarrow 0$, går uttrycket (c₂) mot

$$\Delta W = 8\pi\alpha \cdot 2r \Delta r \quad (\text{c}_4)$$

Sålunda måste gälla

$$16\pi\alpha r \Delta r = \Delta p \cdot 4\pi r^2 \Delta r \quad (\text{c}_5)$$

som ger

$$\Delta p = \frac{4\alpha}{r}$$

Ex. 2.05. Huru stort är övertrycket inuti en luftblåsa, om hänsyn tages enbart till det övertryck, som förorsakas av ytspänningen. Luftblåsans radie antages vara 1 mm och $\alpha = 72$ dyn/cm.

Lösning: Enligt Laplaces ekv. (2.05) gäller

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

I detta fall således, där $r_1 = r_2 = r$

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{r} = \frac{144}{0,1} = 1440 \text{ dyn/cm}^2 \quad (\text{a})$$

eller

$$\Delta p = 1440 \text{ dyn/cm}^2 = 1,468 \text{ p/cm}^2 \approx 1,5 \text{ cm v.p.}$$

(v.p. = vattenpelare).

Ex. 2.06. Droppipetten (Stalagnometern), är ett i princip enkelt instrument. Dess utformning framgår av den på figur 2.06 schematiskt tecknade pipetten (se t.ex. F. Kohlrausch, 1946). Man räknar och bestämmer vikten av n droppar, som under noggrant definierade betingelser fått droppa ner i kärlet A.

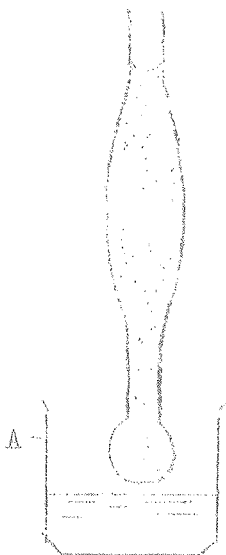


Fig. 2.06.

Den planslipade spetsens yttre radie betecknas med r_p . Pipettens omkrets vid den planslipade änden är då $2\pi r_p$. Kraften, som håller droppen är $2\pi r_p \cdot \alpha$ dyn.

Vikten av n droppar må vara G gram och en droppe G/n gram. Jämviktsvillkoret just innan droppen faller ger då

$$\frac{G}{n} \cdot g = 2\pi r_p \cdot \alpha$$

varav

$$\alpha = \frac{G \cdot g}{n \cdot 2\pi r_p}$$

Med denna enkla anordning kan ytspänningens beroende av olika föroreningar lätt påvisas. Droppstorleken G/n påverkas nämligen starkt av olika föroreningar. Om kärlet A innehåller en annan vätska än stalagnometern, kan man låta droppbildningen ske nere i denna vätska. Härigenom kan ytspänningen mellan två olika vätskor bestämmas.

22. Molekylarteoretisk tolkning av ytspänningen.

Enligt en av våra definitioner på ytspänningen (def. 2) är varje gränsvyta säte för en speciell potentiell energi, ytspänningsenergi. I denna av-

delning skola vi i korthet visa, huru denna energiform kan återföras eller visas vara en följd av vätskemolekylernas inbördes attraktion eller enligt M. Ference et alii (1956) "the existence of intense intermolecular forces — forces of cohesion".

Emellan molekylerna i en vätska liksom i varje annat ämne existera krafter av olika slag (ofta benämnda van der Waalska krafter). Moderna undersökningar över olika ämnens atom- och molekylstruktur gör det sannolikt, att dessa krafter kunna återföras på en växelverkan mellan de elektriska fält, som omge atomerna och molekylerna. Beroende av vilka atomer och molekyler som interferera med varandra (se t.ex. R. Höber, 1945), avta dessa krafter relativt sett mer eller mindre snabbt med avståndet. Helt allmänt är deras räckvidd mycket liten. Om centrumavståndet mellan två atomer, som attrahera varandra betecknas med x , så varierar attraktionskraften F enligt uttrycket

$$F = c \cdot x^{-\alpha} \quad (2.06)$$

där $2 \leq \alpha \leq 7$ och c är en konstant. I övrigt hör analysen av dessa krafters natur och beräkningen av deras storleksordning till ett av den moderna fysikens svåraste fält. Jämför här med begreppet valens! Här kan också rekommenderas J.C. Speakman (1948): Den moderna valensteoriens grunder (sv. övers.), i vilken den för dessa områden intresserade läsaren kan erhålla en första introduktion.

Låt oss nu i anslutning till figur 2.07 något närmare jämföra de krafter, som påverka molekylerna inuti en vätska och i ytan av samma vätska. En molekyl, som befinner sig i läget a attraheras av omgivande molekyler med samma styrka i alla riktningar. Antag att alla molekyler, som befinner sig inom avståndet δ från en betraktad molekyl, attrahera denna och vice

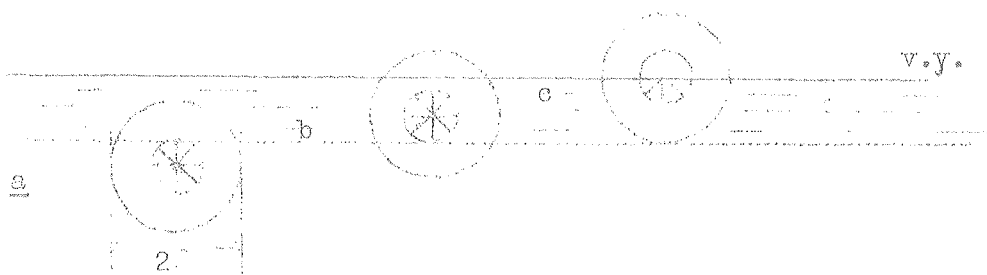


Fig. 2.07.

versa med en ej försumbar kraft. Detta avstånd kallas: "the molecular range", den molekylära verkningsradien. δ har storleksordningen några Å (1 Å, utl. 1 Ångström = 10^{-8} cm).

En molekyl, som på grund av någon rörelse (ex. termisk molekylarrörelse) har kommit på ett avstånd $\ll \xi$ från ytan (se fig. 2.07!), blir då utsatt för en inåt vätskan riktad attraktion, som är större än den uppåt riktade. En del av den sfär, inom vilken attraktionen är verksamt, når nu utanför vätskeytan och är således icke på samma sätt som den övriga delen fylld med molekyler. Av figuren framgår, att för en molekyl, som befinner sig i själva vätskeytan (c), blir denna inåt riktade kraft maximal.

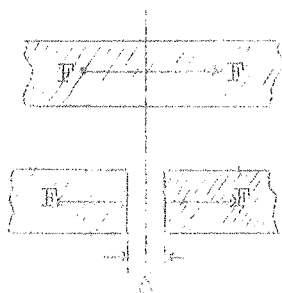
Av ovan kortfattat genomförda kvalitativa analys framgår, att molekyler, som befinna sig på ett avstånd $> \xi$ från gränsytan vätska-luft (el. eg. vätskans ånga), kunna röra sig utan inverkan av någon ej balanserad kraft. Vätskemolekyler, som röra sig ut mot själva vätskeytan och därvid minska avståndet till ytan så, att detta blir $\ll \xi$, måste däremot göra detta under övervinnandet av en kraft, som växer ju mindre avståndet till vätskeytan blir.

Mot bakgrunden av det ovan anförda är det lätt att förstå, att vi måste tillföra energi, d.v.s. uträtta ett arbete, då en vätskeyta förstoras, och omvänt kunna erhålla arbete, då den förminskas. Att förstora vätskans yta måste ju innebära, att vätskemolekyler under övervinnandet av en inåt riktad attraktionskraft skola föras ut mot ytan. Vätskeytan söker spontant att inta minsta fria yta, då ju detta innebär ett minimum av fri ytenergi.

Ytfilmen (ythuden; eng. the active layer) visar oss, att mycket starka attraktionskrafter äro verksamma mellan en vätskas molekyler. Tendensen hos ytfilmen att sammanlaga sig ger upphov till eller svarar i själva verket mot mycket stora inre tryck hos vätskorna. Detta tryck kallas kohesionstryck, och man har beräknat dess storleksordning till minst 10000 atmosfärer (se ex. 2.07!).

Ex. 2.07. Ytspänningsenergin för vatten är c:a 73 erg/cm^2 vid rumstemperatur (se tab. 2.01!). Härled ur denna uppgift genom en enkel betraktelse storleksordningen av kohesionstrycket! Jämför också med A.S. Crafts et alii (1949)!

Lösning: Vi betrakta en vattenpelare, vars tvärsnittsarea är 1 cm^2 . Om denna pelare delas, så uppkommer två nya vätskeytor vardera 1 cm^2 . Vi tänka oss denna delning ske så, att ytorna dragas isär. Se figur 2.08! Härvid skall kohesionstrycket övervinnas. Antag att den molekylära verkningsradion ξ är $1,5 \text{ Å}$. Då erhålla vi två uttryck på det uträttade arbetet. Dessa måste vara lika. Således



$$2.73 = F \cdot 1,5 \cdot 10^{-8} \quad (a)$$

$$F = 97,3 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}^2 \quad (b)$$

$$F = 9739 \text{ atmosf.}$$

Som synes är det svar man här erhåller, starkt beroende av vilket värde, som införes på δ . Observera också, att kraften F måste variera med avståndet.

Fig. 2,08.

Ex. 2,08. Den i föregående avdelning givna uppgiften om den molekylära verkningsradien δ erhåller en viss belysning genom följande enkla exempel: Beräkna eller "skatta" storleken av en vattenmolekyl, om Avogadros tal N är $= 60,2 \cdot 10^{22}$ och varje molekyl antages ligga inskriven i en kub!

Lösning: En grammolekyl vatten väger 18 g och intar en volym av 18 cm^3 . Varje molekyl har således till sitt förfogande ett utrymme av

$$\frac{18}{60,2} \cdot 10^{-22} \text{ cm}^3$$

vilket ger en kantlinje av $\approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 3 \text{ \AA}$. Den maximala storleken av en vattenmolekyl skulle enligt denna enkla beräkning bli 3 \AA . Vissa moderna mätningar visa, att avståndet mellan två närliggande vattenmolekyler skulle vara $2,90 \text{ \AA}$ (se A.S. Crafts et alii 1949!).

23. Om vätande och icke vätande betingelser.

I det inledande avsnittet ha vi påpekat, att yttringarna av kapillari- teten kunna återföras på fenomen knutna till gränsyterna porvägg, luft och vätska. Om adhesionen mellan vätska (vatten) och fast vägg (partikelyta) är större än kohesionen inom vätskan (vattnet) säges vätskan (vattnet) väta den fasta väggen. Om kohesionen mellan vätskepartiklarna är större än adhesionen mellan vätska och fast vägg säges vätskan vara icke vätande.

Det är också brukligt, att i detta sammanhang tala om tre olika yt- spänningar $\alpha_{v,s}$, $\alpha_{v,l}$ och $\alpha_{s,l}$, där v indicerar vätska (vatten), s indi- cerar fast kropp (s av eng. solid) och l luft. Om vi tänka oss, att en cm^2 vardera av gränsyterna vätska — fast kropp och vätska —luft nybildas och samtidigt en cm^2 av gränsytan fast kropp — luft försvinner, så gäller tyd- ligen för ökningen i den potentiella energin (den fria energin) ekvationen

$$\Delta W = \alpha_{v,s} + \alpha_{v,l} - \alpha_{s,l} \quad (2.07)$$

Denna ekvation kallas Duprès ekvation efter den förste som uppställde den- samma (se H.S. Taylor et alii 1951, States of Matter!).

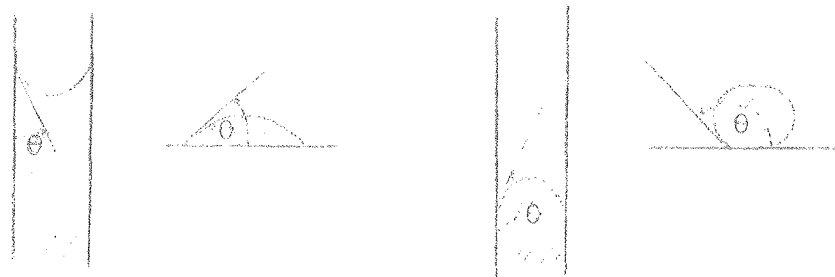
Låt oss betrakta en vattendroppe på en absolut ren glasskiva. Droppen breder ut sig till ett tunt skikt. Systemet droppe - ren glasskiva är instabilt. ΔW är negativt och genom att vattnet breder ut sig avtar systemets potentiella energi och når ett minimum. En kvicksilverdroppe på glas breder däremot icke ut sig.

Det är brukligt att i detta sammanhang också tala om olika befuktningsvinklar (randvinklar). Befuktningsvinkeln är i det första exemplet 0 och i det andra exemplet approximativt 140° . Denna vinkel skall alltid ligga i vätskan (jfr också med figur 2.09!). Befuktningsvinkeln betecknas med β .

I figur 2.09 åskådliggöres begreppet randvinkel eller kontaktvinkel θ . Definitionen lyder: Med randvinkel förstå vi den vinkel, som tangenten till vätskans begränsningslinje bildar med den fasta väggen (helt allm. det andra mediets gränssyta).

Befuktningsvinkeln β är en för varje mediepar (båda i beröring med ett tredje) vätska (1) - fast vägg eller vätska (2) bestämd storhet, med vars hjälp befuktningförhållandena kunna definieras. Vid fullständigt vätande betingelser är $\beta = 0$ och vid helt vätskeavstötande betingelser är $\beta = 180^\circ$.

Randvinkeln θ kan förutom av befuktningsvinkeln även bestämmas av andra villkor. Om emellertid inga särskilda orsaker finnas, antar randvinkeln värdet β . Under vätande villkor gäller härvid att $\theta = \beta$ och under icke vätande betingelser att $\theta < \beta$. I exempel 2.11 måste vi införa en randvinkel $\theta > 0$ fastän $\beta = 0$. I litteraturen synes icke denna distinktion uppehållas. Det här införda betraktelse- och beteckningssättet möjliggör, att de båda vinklarna hållas isär, om så befinnes nödvändigt.



Vätande betingelser

$$\theta = \beta < 90^\circ$$

Icke vätande betingelser

$$\theta = \beta > 90^\circ$$

Fig. 2.09.

Ex. 2.09. Visa att en oljedroppe (olivolja) på en vattenyta bör breda ut sig!

Huru långt denna utbredning går är ett intressant fysikaliskt-kemiskt

problem. Ingående undersökningar av problemet ha visat, att utbredningen går till ett monomolekylärt lager.

Lösning: Vi tillämpa formel 2.07, som i anslutning till figur 2.10 ger

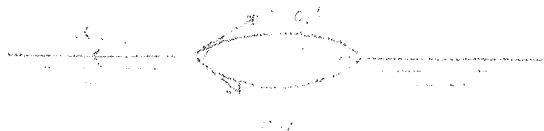


Fig. 2.10.

$$W = \alpha_{l,o} + \alpha_{v,o} - \alpha_{v,l}$$

Enligt fysiken gäller följande värden för de aktuella ytspänningarna (i erg/cm²): $\alpha_{v,l} = 73$, $\alpha_{o,l} = 32$ och $\alpha_{o,v} = 20$. Detta ger

$$\Delta W = 32 + 20 - 73 = -21 \text{ erg}$$

Systemets potentiella energi minskar, när droppen flyter ut.

Den givna lösningen gäller det inledande stadiet. För närmare utredningar hänvisas till litteraturen!

Ex. 2.10. Om två atomer attraheras varandra med en viss kraft F , då avståndet mellan deras centrum är 3 Å, huru stor är då attraktionskraften, då avståndet vuxit till a) 4 Å och b) 6 Å?

Lösning: Vi utnyttja formeln 2.06 med $\alpha = 7$ och erhålla med lätt insedda beteckningar

$$F:F_a:F_b = \frac{c}{3^7} : \frac{c}{4^7} : \frac{c}{6^7} = 1:0,13:0,0078$$

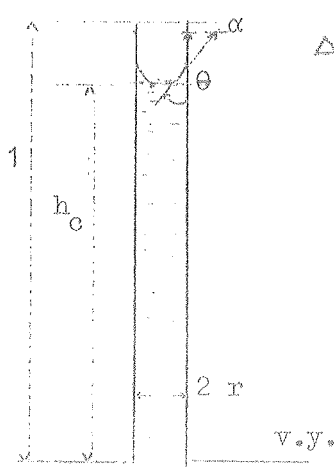
d.v.s. attraktionskraften utgör i a) endast 13 % och i b) endast 0,78 % av den ursprungliga kraften.

24. Vattnets stigning i ett kapillärrör.

Vi ha hittills i vår framställning talat om vätskor i allmänhet och ej mera speciellt knutit våra härledningar och diskussioner till vätskan vatten. I fortsättningen begränsa vi oss emellertid till vatten, då denna vätska är den i markfysiken nära nog helt dominerande. Det kanske här bör påpekas, att vattnet i marken måste betraktas som en i allmänhet mycket utspädd lösning, markvätskan. Många av de i fortsättningen gjorda analyserna

gälla dock även för andra vätskor, om man endast beaktar och inför i de funna relationerna de för varje vätska gällande parametrarna.

Låt oss betrakta ett kapillärrör, d.v.s. ett rör med så liten radie eller diameter, att tydliga kapillära fenomen uppkomma. Röret är i vertikal ställning placerat med sin ena nedre ända i vatten enligt figur 2.11. Vattnet väter väggen och befuktningssvinkeln β är $< 90^\circ$. Vattnet stiger till höjden h_c över den fria vattenytan. Den inuti röret uppkommande konkava vätskeytan, menisken (av grek. meniskos = liten måne), ger enligt Laplaces formel 2.05 upphov till ett undertryck



$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2\alpha}{r_1} \quad (a)$$

om meniskens medelkrökning betecknas med r_1 . Betecknas vattnets täthet med ρ , måste också gälla (avst. enheter!)

$$\Delta p = g \cdot \rho h_c \quad (b)$$

Kombineras ekvationerna (a) och (b) erhålles

$$h_c = \frac{2\alpha}{g \cdot \rho r_1} = \frac{2\alpha}{\gamma r_1} \quad (2.08)$$

där γ är vattnets specifika tyngd.

Fig. 2.11.

Om röret är av glas och fullständigt rent blir befuktningssvinkeln $\beta = 0$ och menisken en halvsfär med radien = rörets radie r . Då gäller

$$h_c = \frac{2\alpha}{g \rho r} = \frac{2\alpha}{\gamma r} \quad (2.08')$$

under förutsättning av att rörlängden $l \geq h_c$, där h_c är bestämt av uttrycket (2.08'). Skulle $l < h_c$, måste krökningsradien bli större än rörets radie. Denna krökningsradie är emellertid alltid möjlig att bestämma med hjälp av ekv. (2.08). Se för övrigt också exempel (2.11)!

Vi kunna också härleda formlerna (2.08) och (2.08') på ett något mera direkt sätt. På figur 2.11 finnes randvinkeln θ införd. Rörradien må fortfarande vara r och stighöjden betecknas med h_c . Ytspänningen verkar i tangentens riktning.

Meniskens omkrets är $2\pi r$. I denna verkar normalt mot begränsningslinjen och i tangentplanet till den yta, som menisken bildar (en sfärisk kalott), ytspänningen α . Av denna kommer endast komponenten $\alpha \cos \theta$ dyn/cm att verka lyftande på vätskepelaren i röret. Jämviktsvillkoret kan då skrivas

$$g \rho \cdot \pi r^2 h_c = 2\pi r \cdot \alpha \cos \theta \quad (a)$$

där $g \rho r^2 h_c$ är den upplyfta vätskopolarens tyngd.

Ur ekvationen (a) erhålles efter förenkling

$$h_c = \frac{2\alpha \cos \theta}{g \rho \cdot r} \quad (2.08'')$$

För $\theta = 0$, d.v.s. vid fullständigt vätande betingelser och $\underline{1} > \underline{h_c}$, erhålles formel 2.08', då $\cos \theta = 1$.

Vid 20°C är enligt tabell 1 vattnets ytspänning $\alpha = 72,75$ dyn/cm. Jordaccelerationen g kunna vi sätta = 980,7 cm/s² och ρ är = 0,9982 g/cm³. Insättas dessa värden i formel (2.08'), erhålles

$$h_c = \frac{2 \cdot 72,75}{980,7 \cdot 0,9982} \cdot \frac{1}{r} = \frac{0,1486}{r} \quad (2.09)$$

eller avrundat

$$h_c = \frac{0,15}{r} \text{ cm v.p.} \quad (2.09')$$

där r är = kapillärrörets radie vid randvinkeln $\theta = \beta = 0$ och i övriga fall är = meniskens medelkrökning. Vid tillämpningen av formel (2.09') är det viktigt att komma ihåg att h_c och r skall anges i cm.

Formel (2.09') användes ofta inom markfysiken vid jämförande beräkningar över pordimensioner (se längre fram!) Pordimensionerna äro ofta mycket små, varför r lämpligen anges i tusendelar av millimetern, d.v.s. i μ . Antag att r är uttryckt i μ . Tydligon gäller då

$$r(\mu) = r(\mu) \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (a)$$

vilket insatt i formel (2.09') ger

$$h_c(\text{cm}) = \frac{0,15}{r(\mu) \cdot 10^{-4}} = \frac{1500}{r(\mu)} \quad (2.09'')$$

241. Om tryckförhållandena i ett kapillärrör.

I denna avdelning skola vi nu som ett fristående exempel närmare analysera tryckförhållandena i ett kapillärrör. En klar insikt i, huru förhållandena gestalta sig i enklast möjliga system är en värdefull bakgrund vid analysen av de ytterst komplexa system, som markfysiken erbjuder och där analysen ofta måste nöja sig med kvalitativa eller möjligen halvkvantitativa utsagor.

Vi formulera vårt problem sålunda: Analysera tryckförhållandena i ett kapillärrör! Beakta även det tidigare omnämnda kohesionstrycket!

Lösning: Vi anta att (se också fig. 2.12!) det yttre lufttrycket är p_y . Kapillärröret må vara slutet upptill med trycket p_i i rummet över menisken. Kohesionstrycket beteckna vid med p_k och totala trycket i en punkt

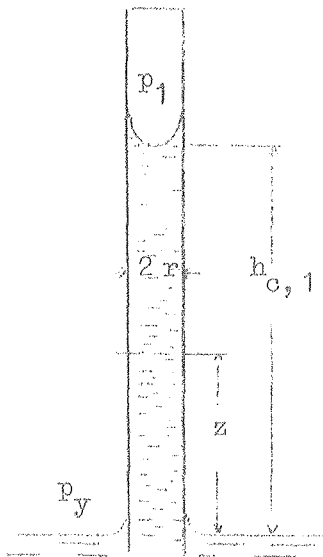


Fig. 2.12.

z över den fria vattenytan med p . Då måste gälla, om vi gå från rummet över menisken och ned till höjden z , att

$$p = p_i - \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \gamma (h_{c,1} - z) + p_k \quad (a)$$

eller, om vi sätta $r_1 = r_2 = r =$ rörets radie

$$p = p_i - \frac{2\alpha}{r} + \gamma (h_{c,1} - z) + p_k \quad (b)$$

Tydligen måste också gälla, om vi gå från den fria vattenytan utanför röret, att

$$p = p_y - \gamma z + p_k \quad (c)$$

Kombineras ekvationerna (b) och (c), erhålles

$$p_i = p_y - \gamma h_{c,1} + \frac{2\alpha}{r} \quad (d)$$

Dessa ekvationer beskriva tryckförhållandena i kapillärröret.

Ekvationen (d) visar bl.a., att om $p_i = p_y$, vilket är vanligt vid stigförsök, så erhålles

$$h_{c,1} = h_c = \frac{2\alpha}{\gamma r} \quad (e)$$

Om $p_i = 0$, d.v.s. vacuum råder över menisken, så gäller

$$h_{c,1} = \frac{p_y}{\gamma} + \frac{2\alpha}{\gamma r} \quad (f)$$

Löses $h_{c,1}$ ur ekvationen (d), erhålles

$$h_{c,1} = \frac{p_y - p_i}{\gamma} + \frac{2\alpha}{\gamma r} \quad (g)$$

Ur detta uttryck erhålles för $h_{c,1} = 0$

$$p_i = p_y + \frac{2\alpha}{r} \quad (h)$$

Ekvationen (h) visar, att om vi vilja förhindra att vatten skall in-tränga i ett kapillärrör (el. en por), så måste ett tryck, som är $2\alpha/r$ dyn/cm² större än det yttre trycket, åstadkommas i kapillären. Antag t.ex. $p_y = 1$ kp/cm² = 1000 cm v.p. och $r = 0,001$ mm ($\beta = 0$). Då är

$$p_i = 1 + \frac{0,15}{0,0001} \cdot \frac{1}{1000} = 2,5 \text{ kp/cm}^2 \quad (i)$$

Om $p_i = p_y$, få vi

$$p = p_y - \frac{2\alpha}{r} + \gamma (h_{c,1} - z) + p_k = p_y - \gamma z + p_k \quad (j)$$

enär här alltid gäller att $\gamma h_{c,1} = \frac{2\alpha}{r}$

Denna ekvation visar, att om $\underline{p}_y \approx p_y$, så är vattnet utsatt för en egentlig dragpåkänning, som således (approximativt) uppträder för alla $\underline{z} = 10-11$ m, om $p_y = 1$ atmosfär. Råder övertryck inne i kapillären (el. poren) är det tydligt, att detta förhållande leder till, att en del av kohesionstrycket måste utnyttjas även vid lägre stighöjder. Låt α vara en koeficient större än 1, då gäller, att en egentlig tension inträffar för alla \underline{z} , som uppfylla det av olikheten (k) angivna villkoret.

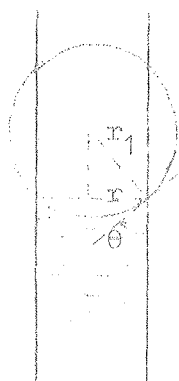
$$\gamma \cdot z > \alpha p_y - \frac{2\alpha}{r} + \gamma h_{c,1} \quad (k)$$

Visa detta!

242. Några exempel.

Ex. 2.11. Visa att formlerna (2.08) och (2.08^{1'}) överensstämmer!

Lösning: Vi upprita figur 2.13, vilken utgör en schematisk teckning av menisken i ett kapillärrör. Meniskens



krömningsradie r_1 (älv. krömningscirkeln) är inritad, rörets radie r och randvinkeln θ .

Enligt formel (2.08) gäller i anslutning till figuren

$$h_c = \frac{2\alpha}{\gamma r_1} \quad (a)$$

och enligt formel (2.08^{1'}) gäller på samma sätt

$$h_c^1 = \frac{2\alpha \cos \theta}{\gamma r} \quad (b)$$

där h_c och h_c^1 betecknar gällande stighöjder.

Ur figuren erhålles lätt

$$r = r_1 \cos \theta \quad (c)$$

vilket uttryck för r insatt i ekv. (b), ger

$$h_c^1 = \frac{2\alpha \cos \theta}{\gamma r_1 \cos \theta} = \frac{2\alpha}{\gamma r_1} = h_c \quad (d)$$

V.S.B.

Ex. 2.12. Hur högt stiger rent vatten av temp. $+20^\circ\text{C}$ i ett noga rengjort och förut vätt kapillärrör av glas, om rörets radie är 0.1 mm?

Lösning: Genom insättning i formel (2.09^{1'}) erhålles omedelbart

$$h_c = \frac{0.15}{0.01} = 15 \text{ cm}$$

Ann. Randvinkeln för ej helt rent vatten-glas kan ofta skattningsvis sättas = 25° . Detta ger för ett rör av ovanstående dimension stighöjden

$$h_c = \frac{0,15 \cos 25^\circ}{0,01} = 13,6 \text{ cm}$$

Ex. 2.13. Vilken blir krökningsradien r_1 och vad blir kontakt- eller randvinkeln θ , om ett noga rengjort glaströr med diametern 0,05 mm i vertikal ställning anbringas så, att det når endast 1 dm över den fria vattenytan. Temp. = 20°C .

Lösning: Krökningsradien bestäms av ekv.

$$h_c = \frac{0,15}{r_1}$$

och randvinkeln θ av ekv. (se ex. 2.11!)

$$\cos \theta = \frac{r}{r_1} \quad (\text{b})$$

I detta fall således

$$10 = \frac{0,15}{r_1} \quad (\text{c})$$

som ger $r_1 = 0,015 \text{ cm} = 0,15 \text{ mm}$

och

$$\cos \theta = \frac{0,025}{0,15} = 0,167 \quad (\text{e})$$

som ger $\theta = 80^\circ,4$

Ex. 2.14. Beräkna vilket under- eller övertryck, som behövs för att driva ut vattnet ur en por, vars storlek är 2μ ! Randvinkeln antas kunna bli 0° , d.v.s. porväggen vätes fullständigt.

Lösning: Lösningen erhålles omedelbart ur formeln (2.09^1)

$$h_c = \frac{0,15}{0,0001} = 1500 \text{ cm v.p.}$$

d.v.s. man måste åstadkomma en tryckskillnad av $1,5 \text{ kp/cm}^2$ mellan porändarna.

Ann. I detta fall har beräkningen genomförts under antagandet av att poren närmast kan jämföras med ett kort kapillärrör, vars radie är 1μ .

Ex. 2.15. Huru högt stiger vattnet i ett upptill slutet kapillärrör, vars radie är r cm och längd l cm, om det i vertikal ställning nedföres i vatten, så, att dess nedre ända når a cm djupt. Det yttre lufttrycket är $p_y \text{ kp/cm}^2$. Huru stort blir lufttrycket i rummet över den uppkommande menisken? β sättes = 0.

Lösning: Vi upprita en schematisk bild (2.14) av tillståndet vid

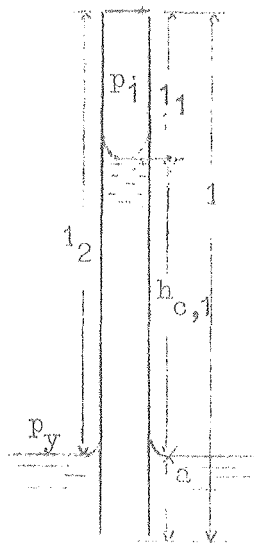


Fig. 2.14.

uppnådd jämvikt samt införa på figuren givna uppgifter och andra nödvändiga beteckningar.

Ekvationen (d) avd. 241 ger, om alla tryck anges i cm v.p.

$$p_i = p_y - h_{c,1} + \frac{2\alpha}{r} \quad (a)$$

Om vi bortse från uppkomna skillnader i vattenångans tryck, ger Boyles lag

$$p_i \cdot l_1 = p_i \cdot [l_1 - (h_{c,1} + a)] = p_y \cdot l \quad (b)$$

Vi sätta $l - a = l_2$ samt förenkla och sammanställa ekvationerna (a) och (b) och erhålla

$$\begin{cases} p_i + h_{c,1} = p_y + \frac{2\alpha}{r} = C_1 & (a') \\ l_2 p_i - h_{c,1} p_i = p_y \cdot l = C_2 & (b') \end{cases}$$

eller lösta

$$\begin{cases} p_i = \frac{C_1 - l_2}{2} \left(\pm \sqrt{\left(\frac{C_1 - l_2}{2} \right)^2 + C_2} \right) & (c) \\ h_{c,1} = p_y + \frac{2\alpha}{r} - p_i & (d) \end{cases}$$

Numeriskt exempel: $l = 1$ m; $r = 1$ μ ; $a = 5$ cm och $p_y = 1$ atmosfär (fys.). Vi erhålla

$$l_2 = l - a = 100 - 5 = 95; \quad C_1 = 1033 + \frac{0,15}{0,0001} = 2533;$$

$$C_1 - l_2 = 2533 - 95 = 2438; \quad C_2 = p_y \cdot l = 103300;$$

$$p_i = 1219 + \sqrt{1219^2 + 103300} = 2480 \text{ cm v.p.}$$

$$h_{c,1} = 1033 + 1500 - 2480 = 53 \text{ cm}$$

25. Vattnets stigning i en kapillär spalt.

Två skivor ställas vertikalt och i förbindelse med en fri vattenyta. Emellan skivorna erhålles en planparallell spalt med bredden d . Vi kunna betrakta figur 2.11 som en schematisk bild av en vertikal skärning genom detta system vinkelrätt mot plattornas längdriktning. Tydligt gäller då enligt Laplaces ekv. (2.05)

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\alpha}{r_1} \quad (a)$$

eller

$$h_c = \frac{\alpha}{\gamma r_1} \quad (2.10)$$

där r_1 är den enkelkrökta meniskens krökningsradie och $r_2 = \infty$. Om skivorna äro av glas och befuktningvinkeln β kan sättas = 0, blir vid liten spaltbredd $2 r_1 = d$, d.v.s. menisken antar formen av mantelytan hos en rät cylinder med radien $d/2$. Således

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{d} \quad (b)$$

och

$$h_c = \frac{2\alpha}{\gamma d} \quad (2.10')$$

Införes randvinkeln θ , erhålles lätt en med ekvationen (2.08'') överensstämmande stighöjdsformel eller

$$h_c = \frac{2\alpha \cos \theta}{\gamma d} \quad (2.10''')$$

Genom insättning av förut angivna siffervärden överföres formeln (2.10''') i (2.11)

$$h_c = \frac{0,15 \cos \theta}{d} \quad \text{cm v.p.} \quad (2.11)$$

251. Några exempel.

Vi belysa de i föregående avdelning härledda enkla formlerna genom att presentera lösningarna till några exempel.

Ex. 2.16. Huru högt stiger vattnet kapillärt i en plamparallell spalt, vars bredd är 10μ ?

Lösning: $10 \mu = 0,010 \text{ mm} = 0,001 \text{ cm}$ och således

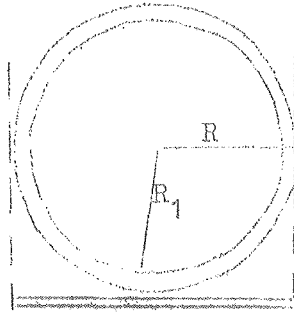
$$h_c = \frac{0,15 \cos \theta}{0,001} = 150 \cos \theta$$

Sätta vi $\theta = 0$, erhålles $h_c = 150 \text{ cm}$, och sätta vi $\theta = 30^\circ$, erhålla vi $h_c = 130 \text{ cm}$.

Ex. 2.17. Emellan två lika stora cirkulära skivor med radien R befinner sig en vattenfilm, vars tjocklek är d (cm). Med vilken kraft sammanhållas skivorna?

Lösning: Vi upprita figur 2.15 och införa beteckningar, vilkas betydelse framgår av figuren. Om vi beteckna den kraft, som håller skivorna samman med F , så erhålles ur figuren och med hjälp av tidigare härledda formler

$$F = \alpha \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right) \cdot \pi R^2 + 2\pi R \alpha \sin \theta \quad (a)$$



Kröknings-
radie = r_1

$$F_1 = \gamma \cdot 2\pi R \sin \theta$$

$$F_2 = \gamma \cdot \pi R^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right)$$

Fig. 2.15.

Numeriskt exempel:

a) $R = 5 \text{ mm}$; $d = 0,01 \text{ mm}$ och $\theta = 0$ ger

$$F = \gamma h_c \cdot \pi R^2 = 1 \cdot \frac{0,15}{0,001} \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{150\pi}{4} = 117,8 \text{ p} \approx 0,1 \text{ kp}$$

b) $R = 5 \text{ cm}$; $d = 0,001 \text{ mm}$ och $\theta = 0$ ger

$$F = \gamma \cdot h_c \cdot \pi R^2 = 1 \cdot \frac{0,15}{0,0001} \cdot \pi \cdot 25 = 1500 \cdot 25 \pi \text{ p} = 37500 \pi \text{ p}$$

$$F = 37,5 \pi \text{ kp} \approx 118 \text{ kp}$$

Anmärkning: Beträffande de i detta problem berörda förhållandena hänvisas den för vidare studier intresserade till W.B. Haines (1925) och R.A. Fischer (1926). Den av dessa forskare förda diskussionen är stimulerande. Emellertid synes fortfarande många oklarheter här kvarstå. Det problem, som vi här uppställt och löst är en förenkling av deras problem (se också avd. 33!). Jämför här också L.D. Baver (1956) samt H. Lamb (1949)!

Ex. 2.18. Två plana glasskivor ställas vertikalt och så att de bilda en mycket spetsig vinkel. I den uppkomna spalten suges vatten kapillärt upp.

a) Sök ekvationen för den kurva, som meniskranden bildar!

b) Dimensionera vinkeln så, att vattnet står 50 cm kapillärt upplyft 5 mm från vinkelspetsen!

Lösning: a) Nedanstående figur uppritas och angivna beteckningar införas

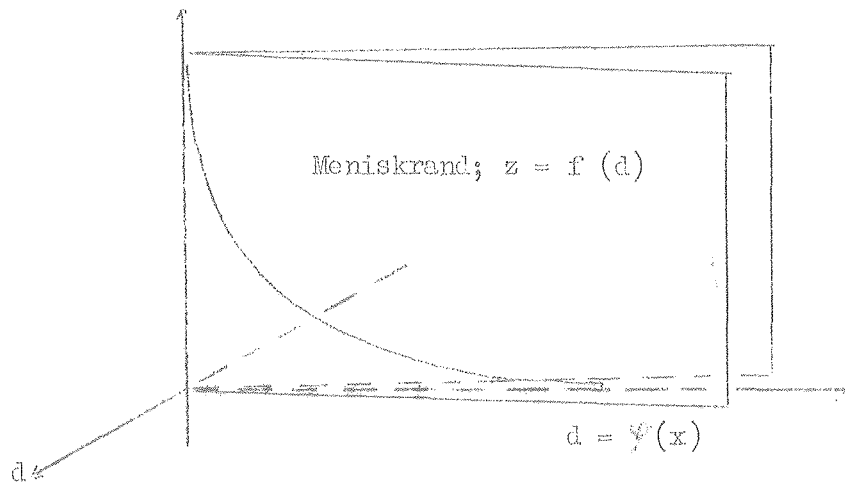


Fig. 2.16.

Ur figuren erhålles omedelbart

$$d = \psi(x) = kx \quad (a)$$

och enligt formel (2.10¹¹) är, om θ sättes = 0

$$z = \frac{2\alpha}{\gamma \cdot 2d} = \frac{\alpha}{\gamma kx} \quad (b)$$

eller

$$z \cdot x = \frac{\alpha}{\gamma k} = C \quad (c)$$

Observera, att spalten blir $2kx$ enligt våra antaganden och beteckningar! Meniskranden antar alltså formen av en liksidig hyperbel.

b) Genom insättning av $z = 50$ cm för $x = 0,5$ cm och siffervärden för α och γ , erhålles

$$50 = \frac{0,15}{2k \cdot 0,5} \quad (d)$$

eller

$$k = 0,003 \quad (e)$$

och följaktligen

$$z \cdot x = 25 \quad (f)$$

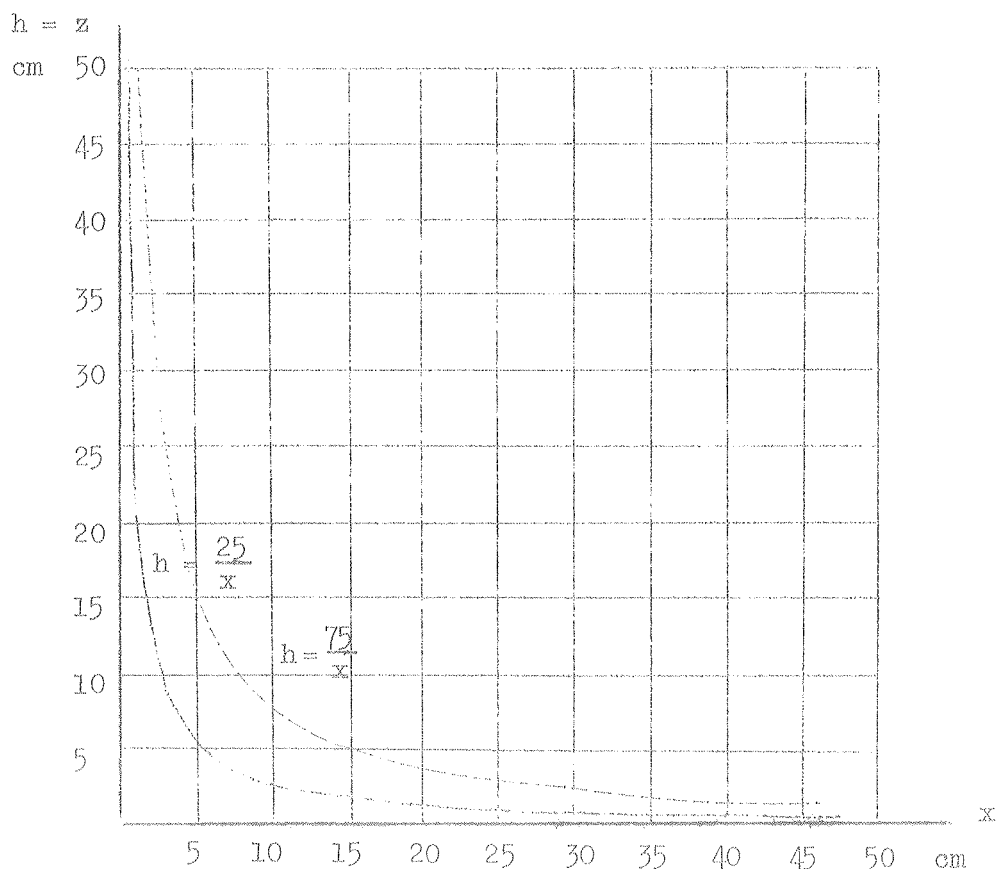


Fig. 2.17.

På figuren 2.17 finnes ekvationen (f) avbildad samt dessutom även fallet $k = 0,001$. Kurvorna ge en antydning om de kapillära fenomenens snabbt ökande betydelse med avtagande porvidder (se längre fram!)

Ex. 2.19. I exempel 2.17 ha vi visat, att under vissa förenklande antagandenkraften \underline{F} , som håller två cirkulära skivor samman, är bestämd av uttrycket

$$F = \frac{2\alpha \cos \theta}{d} \pi R^2 + 2\pi R \alpha \sin \theta \quad (a)$$

när en tunn vätskefilm med ytspänningen α finnes mellan dem.

Om kraften istället beräknas på ett snitt lagt mitt emellan skivorna erhålles (se fig. 2.15!)

$$F_1 = \frac{2\alpha \cos \theta}{d} \pi R_1^2 + 2\pi R_1 \alpha \quad (b)$$

där \underline{R}_1 är meniskens radie i det betraktade planet och meniskens krökning i ett godtyckligt diametersnitt genom skivorna betraktas som konstant och lika med $d/2 \cos \theta$. Visa, att \underline{F}_1 är = \underline{F} !

Lösning: Av figuren 2.15 erhålles

$$R_1 = R - \frac{d}{2 \cos \theta} (1 - \sin \theta) = R - \Delta R \quad (c)$$

Insättning av detta uttryck på R_1 i ekv. (b) ger efter viss omskrivning

$$F_1 = \frac{2 \alpha \cos \theta}{d} \pi R^2 + 2 \pi R \alpha \left(1 - \frac{2 \Delta R \cos \theta}{d} + \frac{\Delta R}{R} \right) \quad (d)$$

Ur ekv. (c) erhålles

$$\sin \theta = 1 - \frac{2 \Delta R \cos \theta}{d} \quad (f)$$

som insatt i ekv. (d) ger

$$F_1 = \frac{2 \alpha \cos \theta}{d} \pi R^2 + 2 \pi R \alpha \sin \theta = F \quad (g)$$

om $\Delta R/R$ försummas (i vårt num.ex. är $\Delta R/R = 0,001$).

Arm.: F och F_1 uttrycka de i parallella snitt existerande snittkrafterna och ur denna synpunkt måste de, då jämvikt råder, alltid vara lika. Problemet är emellertid, om de uppställda uttrycken återge dessa krafter, korrekt. En noggrannare undersökning skulle fordra, att uttrycket (a) ex. 2.17 studerades under hänsynstagande till att både r_1 och R variera med förflyttningen x vinkelrätt mot plattorna (jämför även med ex. 3.08!).

26. Om sambandet mellan porradie, ytspänning och pF.

Vi ha i det föregående på olika sätt försökt att teoretiskt belysa det experimentella faktum, att en vätska (vatten) i närheten av en fast vägg och särskilt i trånga rör, kapillärer och porer, uppvisar speciella fenomen. För vatten i beröring med en yta, som vätes, leder detta till att vattnet breder ut sig, eller stiger kapillärt upp i röret eller suges kapillärt in i poren. Omvänt måste ett övertryck anbringas i kapillären eller poren (se bl.a. ex. 2.14!), om man vill förhindra vattnets inträngande. På samma sätt måste en tryckdifferens anbringas mellan porändarna (eller påläggas de bärande meniskerna), om man vill driva ut vattnet ur en redan fylld por.

De över- eller undertryck, som äro verksamma eller måste bringas i verksamhet för att ovan angivna processer skola kunna åstadkommas, anges på olika sätt. De kunna naturligtvis liksom alla tryck angivas i kraft/ytenhet (jfr även Komp. i hydromekanik, 1952!). I anslutning till hydrauliken är det vanligt att ange dem i cm (m) vattempelare förkortat cm v.p.; i anslutning till bl.a. växtfysiologien anges de även i atmosfärer. Vi ha därvid att skilja mellan: 1. fysikalisk atmosfär, förk. atm, varvid 1 atm =

1.0333 kp/cm² och ρ , teknisk atmosfär, förk $1 \text{ at} = 1 \text{ kp/cm}^2$. I markfysiken angivas ofta dessa över- och undertryck i p^F (R.K. Schofield et alii 1935).

En jords vattenhållande förmåga bestäms av många faktorer. Schofield avsåg att med hjälp av sitt p^F -värde uttrycka jordens vattenhållande förmåga som $10^{\log \Psi}$ logaritmen av en funktion benämnd kapillär potential och betecknad med Ψ . Härvid skulle Ψ ange sambandet mellan vattnets bindningsenergi och vattenhalten w . Således

$$p^F = \log \Psi = \log f(w) \quad (2.12)$$

I detta sammanhang gå vi icke närmare in på egenskaperna hos denna funktion såsom Schofield definierat den. Olika författares uppfattning om innebörden av och användningen av p^F -begreppet synes också i vissa avseenden divergera (se L.D. Bayer 1956 och P.J. Kramer 1949!).

Då de krafter (energimängder), varmed vattnet bindes i en jord, varierar inom mycket vida gränser, är den speciella fördel som p^F -värdet erbjuder helt enkelt den, att ge oss logaritmerna för dessa krafter (energimängder) istället för krafterna själva. Detta möjliggör en komprimering av de diagram, p^F -diagram, i vilka dessa krafters beroende av olika oberoende variabler, framför allt vattenhalten w , åskådliggöres. p^F -värdet hos en jord, som torkats vid 105°C, anses vara $\bar{1}$ (= 10000 atm.).

Vi intressera oss i detta sammanhang speciellt för de av kapillariteten förorsakade krafterna. Mot varje given kapillär stighöjd eller medelkrökning hos en menisk svarar enligt tidigare utredningar ett visst tryck (pos. el. neg.). Vi ge nu följande definition: p^F är = 10^{\log} logaritmen för det i cm v.p. angivna trycket. I samband med kapillariteten är detta tryck i allmänhet att uppfatta som en tension (se också avd. 241!) Under normalbetingelser kan denna "tension" närmast betraktas som ett vanligt undertryck, om $h_c \leq 10$ m, men blir för $h_c > 10$ m en egentlig tension, en dragpåkänning.

Genom ovan givna definition ha vi fått en entydig korrespondens mellan p^F , h_c och r . Vi erhålla denna korrespondens formelmässigt uttryckt, om vi logaritmera ekvationens (2.09¹¹) båda membra och sätta dem lika med p^F .

$$p^F = \log h_c = \log 1500 - \log r \quad (a)$$

eller om $\log 1500$ approximeras till en decimal

$$p^F = \log h_c = 3,2 - \log r \quad (2.13)$$

varvid r skall anges i μ . Det är tydligt att denna ekvation på ett dubbel-

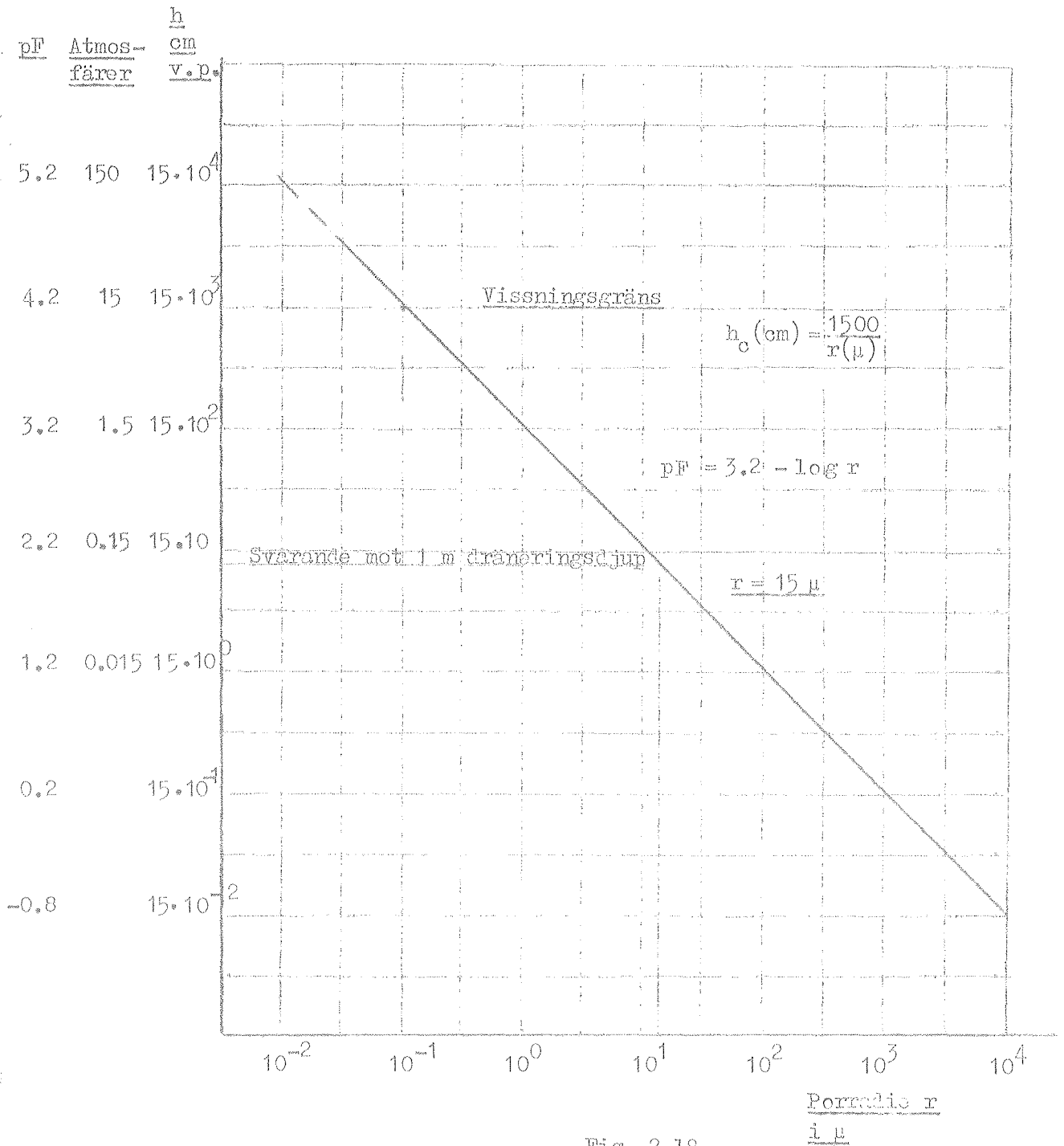


Fig. 2.18.

Sambandet mellan porradie och pF samt mellan porradie r och den kraft (det tryck) i cm v.p. (pr cm^2), varmed vattnet är bundet i porerna. Tryck- eller dragkraften (tensionen) anges även i tekniska atmosfärer.

logaritmiskt papper (m. avs. på \underline{r} o. \underline{h}_c) ger en rät linje. Vi beräkna några sammanhörande värden och konstruera motsvarande diagram. Diagrammet finnes återgivet på figur 2.18. På diagrammet har den mot ett visst \underline{pF} -värde svarande tensionen även angivits i at. Vissa andra uppgifter finnas också införda.

Vi få säkert anledning att senare i olika sammanhang anknyta till de problem, som blivit kortfattat behandlade i denna avdelning. Innan vi gå vidare, skola vi dock som övning och konkretisering av införda föreställningar lösa ett par enkla problem och ett något svårare.

Ex. 2.20. L.A. Richards och L.R. Weaver (1944) funno, att den i Amerika mycket brukade "moisture equivalent" svarade mot en tension av 340 cm v.p. Vilket \underline{pF} värde svarar detta mot och vilken pordiameter motsvarar det?

Lösning: Enligt våra formler och definitioner erhålles omedelbart

$$\underline{pF} = \log 340 = 2,53 \quad (a)$$

och

$$\underline{r} = \frac{1500}{340} = 4,4 \mu \quad (b)$$

Ann. Vi kunna i första hand uppfatta den ovan gjorda beräkningen av \underline{r} som ett formellt beräknat ekvivalentvärde. Den närmare analysen av den fysikaliska betydelsen och av de föreställningar, som behöva utvecklas, för att göra denna beräkning mera upplysande har här lämnats åsido.

Ex. 2.21. Enligt F. Getman och F. Daniels (1945) har en rörsockerlösning av 68,4 g pr 1000 g vatten vid +20°C ett osmotiskt tryck motsvarande 4,61 atm. Ett jordprov, som bringas i fuktighetsjämvikt (hygroskopicitetsbestämning) med denna lösning, antages få en vattenhalt = \underline{w}_1 . Vilket \underline{pF} svarar denna vattenhalt mot?

Lösning: Enligt formel (2.13) erhålles omedelbart

$$\underline{pF} = \log 4,61 \cdot 1033,3 = \log 4764 = 3,7$$

Ex. 2.22. Vid experimentella och teoretiska studier av vattnets rörelse i omättad jord kan man som en första approximation antaga, att kapillärtensionen (el. helt allm. den vattenhaltsutjämnande kraften) är omvänt proportionell mot vattenhalten.

Härled under detta antagande en funktion, som för $\underline{w} = \underline{w}_{hy}$, där index \underline{hy} anger hygroskopisk vattenhalt, ger $\underline{h} = \underline{h}_{c,max}$, där \underline{h} betecknar tensionen i cm v.p., och som för $\underline{w} = \underline{n}$, där \underline{n} är jordens porositet, ger $\underline{h} = 0$.

Lösning: Enligt problemets formulering måste gälla

$$h = a_1 + \frac{a_2}{w} \quad (a)$$

där a_1 och a_2 äro konstanter, vilka skola bestämmas så att övriga villkor uppfyllas. Således

$$\left\{ \begin{array}{l} h = h_{c,max} = a_1 + \frac{a_2}{w_{h,y}} \end{array} \right. \quad (b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0 = a_1 + \frac{a_2}{n} \end{array} \right. \quad (c)$$

Ekvationen (c) ger

$$a_1 = -\frac{a_2}{n} \quad (d)$$

vilket insatt i ekv. (b) ger

$$h_{c,max} = -\frac{a_2}{n} + \frac{a_2}{w_{hy}} \quad (e)$$

och således

$$a_2 = \frac{n \cdot w_{hy} \cdot h_{c,max}}{n - w_{hy}} \quad (f)$$

Den sökta funktionen kan således skrivas

$$h = \frac{n \cdot w_{hy} \cdot h_{c,max}}{n - w_{hy}} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{n} \right) \quad (g)$$

Om vi sätta

$$h = h' + a_1 \quad (h)$$

blir enligt ekv. (a)

$$h' \cdot w = a_2 \quad (i)$$

Häruv synes att funktionen h' (liksom h) är en liksidig hyperbel.

Num.ex. $n = 40 \%$; $w_{hy} = 1,0 \%$ och $h_{c,max} = 500$ cm. Siffrorna ha valts med tanke på att de ungefärligen skola motsvara förhållandena i en finmo - grovmjälajord utan ler (se också längre fram!). Enligt ekv. (g) blir

$$h = \frac{40 \cdot 1 \cdot 500}{40 - 1} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{40} \right) \quad (j)$$

eller

$$h = 513 \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{40} \right) \quad (k)$$

som ger

$$h = \frac{513}{w} - 12,8 \quad (l)$$

$$h' = h + 12,8 = \frac{513}{w} \quad (m)$$

På figur 2.19 finnes denna funktion avbildad.

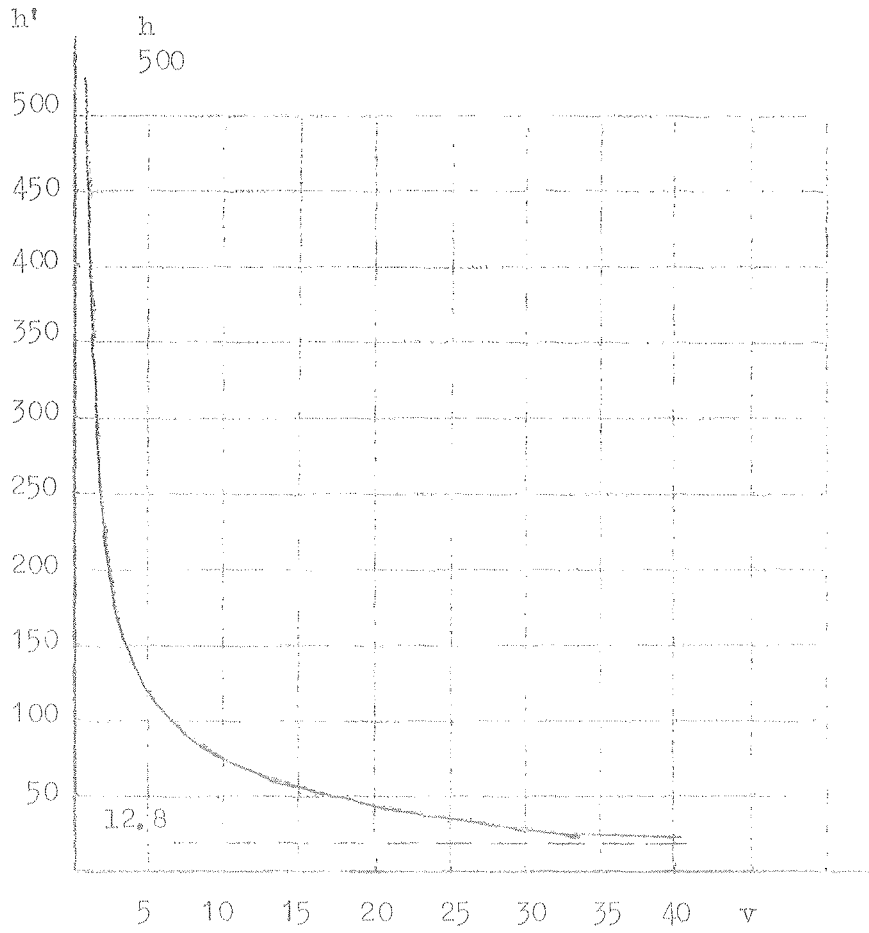


Fig. 2.19.

3. Jordarternas kapillaritet.

James Clerk Maxwell (1877) skriver i sin berömda bok Matter and Motion: "In all scientific procedure we begin by marking out a certain region or subject as the field of our investigations. To this we must confine our attention, leaving the rest of the universe out of account till we have completed the investigation in which we are engaged. In physical science, therefore, the first step is to define clearly the material system which we make the subject of our statements. This system may be of any degree of complexity. It may be a simple material particle, a body of finite size, or any number of such bodies, and it may even be extended so as to include the whole material universe."

På ett utomordentligt fascinerande sätt har Maxwell här uttryckt ett ledmotiv i all naturvetenskap: den successiva vidgningen av frågeställningarna, pendlingen mellan det enklast möjliga systemet och det mest komplexa, växlingen mellan detaljanalys och syntes, strävan efter koordination och allmängiltighet etc.

Den av Maxwell angivna stegvisa vidgningen av det för närmare undersökning definierade systemet kunna vi också tillämpa här. Vi kunna tänka oss många olika kapillära system "of any degree of complexity". En viss systematisk överblick och några hållpunkter för den fortsatta behandlingen erhålles, om följande stegvisa utvidgningar av det kapillära systemet beaktas:

1. Kapillära rör med konstanta radier, kapillära spalter med konstanta spaltbredder, kapillära rör med på olika sätt utformade förträngningar och utvidgningar, kilformiga spalter, förgrenade rör, pelare eller parallelepipediska block (= markblock) uppbyggda av likstora regelbundet packade sfärer, s.k. "ideal jord" osv.

2. Artificiellt packade jordpelare och utbredda skikt med relativt enhetligt porsystem (packade av välsorterat material; $\lambda \approx 10$, se ex. 3.02 b!), artificiellt packade jordpelare med av packningstekniken definierad skiktning, pelare uppbyggda av på olika sätt definierade aggregat osv.

3. Begränsade naturligt lagrade system: olika uttagna cylindriska eller prismatiska prov, regelbundet på olika sätt experimentellt avgränsade (el. enbart såsom tänkta) system i fält, s.k. markblock.

4. Ur jordartssynpunkt mera enhetliga fält och större områden i växelverkan med odlad och naturlig vegetation.

31. Ett grundläggande diagram; några definitioner.

Vi övergå nu till ett studium av det under punkt 2. i föregående avdelning närmare angivna systemet av välsorterat eller jänkornigt (Å litet) material artificiellt packade pelare. Emellertid skola vi försöka utforma våra definitioner och analyser så, att de i möjligaste mån skola äga giltighet även för de mera komplexa systemen (punkterna 3. och 4.). Genom att i första hand anknyta till detta relativt enkla system kunna vi förläna vår framställning större skärpa och åskådlighet. Utgående från detta mindre sammansatta system kunna sedan de mera sammansatta systemen ofta mer eller mindre direkt angripas eller åtminstone de med dem förbundna problemen ges en viss första hyfsning.

På figur 3.01 finnas två jordpelare schematiskt uppritade. Vi gå här icke in på huru dessa jordpelare i detalj ha utformats och packats utan intressera oss framför allt för de rent principiella förhållanden, som de kunna tjäna att belysa (se också närmare Andersson, S. Markfys. Unders. XII, i manus.!). För att öka åskådligheten i den följande framställningen ange vi endast några enkla uppgifter om huru pelarna experimentellt åstadkommits vid våra försök. Jordmaterialet (ofta renslammat material) har packats i rör av plexiglas. Vattenhalten vid packningen har i allmänhet varit mycket låg: lufttorrt eller mindre än lufttorrt. Efter packningen har den ena pelaren A i vertikal ställning bringats i beröring med en fri vattenyta (gr.v.y.). Vatten suges härvid in i pelaren och stiger. Sådana försök kallas kapillära stigförsök. Den andra pelaren B har under längre tid fått stå under vatten och mättats. Efter det att pelaren mättats, har den i vertikal ställning placerats så, att allt fritt vatten kunnat avrinna genom basen. Sådana försök ha vi kallat dräneringsförsök.

Efter längre eller kortare tid avstamar den kapillära stigningen i pelaren A, och avrinningen i pelaren B upphör. Om vi nu bestämma vattenhalten i pelarna t.ex. för varje 10 eller 5 cm och på ett diagram avsätta de erhållna värdena, få vi för varje försök ett diagram, som i princip överensstämmer med det på figur 3.01 uppritade. På figur 3.02 ha de experimentella värdena ritats in från ett på ovan angivet sätt genomfört försök. Jordmaterialet utgöres i detta fall av renslammad finmo $d_m = 0,02 \text{ mm} \leq d \leq d_M = 0,06 \text{ mm}$.

På diagrammet (fig. 3.01) finnas fyra kurvor A, B, C och D utritade. Räkna vi också med den räta linje, som i detta fall anger porositeten n, porositetskurvan, kunna vi tala om fem kurvor, vilka på olika sätt karak-

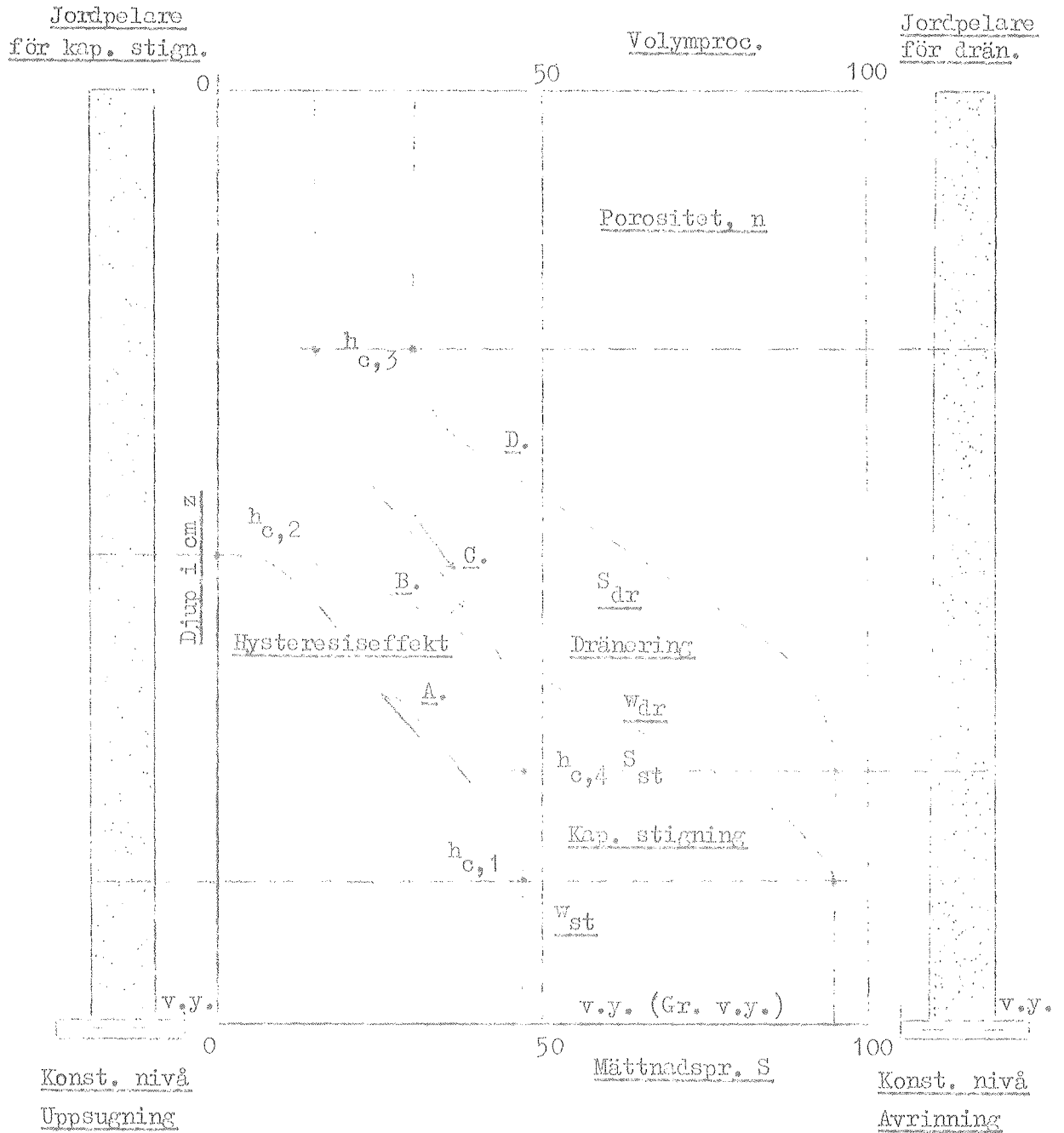


Fig. 3.01.

Principlediagram över några viktiga kapillära vattenhaltsrelationer i jordpelare (profiler).

terisera det kapillära systemet.

Kurvorna A och C ange vattenhalten i volymprocent (\underline{w} el. eg. \underline{w}_2) och kurvorna B och D ange motsvarande vattenhalter i mättnadsprocent \underline{S} (av eng. saturation; se också Andersson, S. Markf. unders. VIII!). Härvid definieras \underline{S} av uttrycket

$$S = 100 \cdot \frac{w}{n} \quad (3.01)$$

Vattenhalten i jordpelaren A efter kapillär stigning anges av kurvan A och motsvarande mättnadsprocent av kurvan B. Vattenhalten efter dränering av jordpelaren B anges av kurvan C och motsvarande mättnadsvärde av kurvan D.

I anslutning till de i Markf. unders. I införda föreställningarna om djupfunktioner kunna vi uppfatta de fem kurvorna som de grafiska bilderna av lika många djupfunktioner. Med de på diagrammet införda indicingarna: \underline{st} för kapillär stigning och \underline{dr} för dränering, kunna vi således skriva

$$w_{st} = f_{st}(z) \quad (a)$$

och

$$w_{dr} = f_{dr}(z) \quad (b)$$

För \underline{S} erhålla vi analogt

$$S_{st} = F_{st}(z) \quad (c)$$

och

$$S_{dr} = F_{dr}(z) \quad (d)$$

De symboliskt tecknade funktionerna (a) - (d) ge emellertid föga upplysning om de här uppträdande synnerligen komplexa sambanden. Vi kunna kvalitativt förbättra uttrycken om vi något närmare a priori analysera några av de variabler, som påverka formen på kurvorna A, B, C och D samt ävenså \underline{n} .

Genom införandet av \underline{z} (= djupet) som oberoende variabel, ha vi endast noterat, att vattenhalterna \underline{w} helt allmänt variera med avståndet från ett valt 0-plan, vartill här lämpligen väljes pelarnas övre yta (= markytan) eller den fria vattenytan (grundvattnytan). Den viktiga frågan är emellertid, vilka faktorer eller variabler som påverka eller bestämma den uppkomna fördelningen av vattenhalten med djupet \underline{z} eller med höjden $\underline{h} = h_0 - z$ över den fria vattenytan. \underline{h}_0 betecknar härvid vattenytans (el. gr. v. ytans) djup från pelarnas övre yta (markytan).

I detta sammanhang kunna vi icke mer än antyda omfattningen av ovan anförda fundamentala fråga. De flesta experimentella och teoretiska stu-

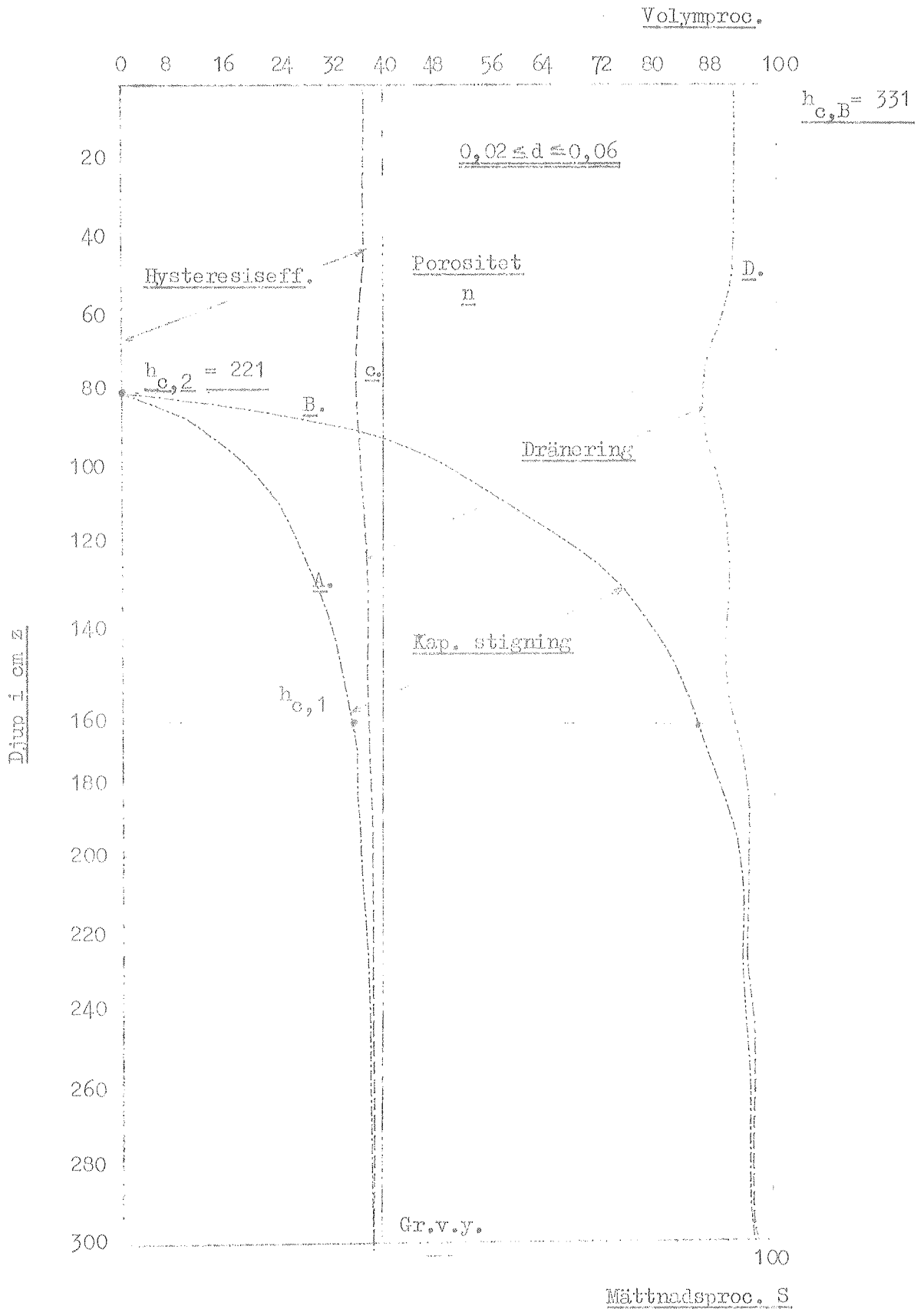


Fig. 3.02.

dierna av kapillariteten i våra jordar gå emellertid mer eller mindre direkt ut på att finna de fullständigare eller mindre fullständiga svaret eller svaren på denna fråga. Här söka vi närmast att erhålla en symboliskt sammanfattande formel av svaret på frågan. Konsekvenserna av den uppställda formeln skola vi åtminstone delvis söka att utreda och belysa i de senare avsnitten av detta arbete.

311. Inre och yttre variabler.

Det är tydligt att vi kunna urskilja två typer av faktorer eller variabler: 1. yttre faktorer eller variabler och 2. inre faktorer eller variabler (jfr här med geologiens termer: exogena och endogena krafter!). Yttre faktorer benämna vi alla faktorer eller variabler, som påläggas eller kunna påläggas systemet utifrån. Inre faktorer benämna vi alla faktorer eller variabler, som bestämmas av systemet självt. I vissa fall kan en variabel beroende av vilken synpunkt, som anlägges, räknas höra i lika hög grad till de yttre som till de inre faktorerna. Detta förminskar emellertid knappast värdet av den gjorda indelningen.

Ibland de yttre variablerna urskilja vi såsom en av de betydelsefullaste tiden, vilken i överensstämmelse med sin fysikaliska bakgrund är en alltid växande variabel. Ur denna synpunkt intar tiden t en särställning bland de yttre variablerna. Tiden räknas alltid från ett visst begynnelseögonblick $t = t_0$, där t_0 i allmänhet sättes = 0.

Till de yttre variablerna kunna vi också lämpligen räkna de variabler, som definiera systemets förhistoria. Här äro vi då speciellt intresserade av huruvida vattenhalten i systemet avtar eller tillväxer med tiden. Detta gäller både om vi betrakta systemet som en helhet eller endast intressera oss för delar av detsamma. Vi skilja här på torkande och vätande betingelser. Om

$$\frac{\partial w}{\partial t} < 0 \quad (3.02)$$

tala vi om torkande betingelser och om

$$\frac{\partial w}{\partial t} > 0 \quad (3.03)$$

tala vi om vätande betingelser. Jämför här också med Markf. Unders. VIII! Vi kunna uppfatta de på diagrammet figur 3.01 införda termerna dränoring (dr) och stigning (st) som speciella exempel på torkande och vätande betingelser.

Längre fram komma vi att behandla de specifika förhållanden, som äro förbundna med den riktning, som de vattenhaltsförändrande processerna

ha i olika fall och deras fundamentala betydelse för tolkningen av de kapillära processerna och jämviktorna i jorden. Här anföres endast, att de uppkomna (kvasistatiska) jämviktswattenhalterna på ett för varje system karakteristiskt sätt bero av från vilket håll — vätande eller torkande — de uppnåtts. Detta leder till en för varje system eller jordart specifik hysteresiseffekt. Denna finnes också införd i vårt diagram (fig. 3.01) och har angivits i diagrammet (fig. 3.02), vilket såsom tidigare anförts direkt återger experimentella värden, som vi erhållit vid våra stig- och dräneringsförsök.

En yttre variabel av speciell betydelse för de uppkomna vattenhaltsfördelningarna och deras beroende av tiden är avståndet till den fria vattenytan (grundvattenytan). Denna variabel har redan blivit omnämnd och införd i stycket 31. Den betecknas med h_0 och är förbunden med höjden ξ över grundvattenytan genom uttrycket

$$\xi = h_0 - z \quad (3.04)$$

där z är djupvariabeln. Om vi uppfatta ξ som en allmän höjdvariabel, är uttrycket (3.04) alltid giltigt, även om h_0 skulle beteckna t.ex. grundvattenytans maximala djup $h_{0, \text{max}}$ och z som här dess aktuella djup.

312. Inre variabler.

I föregående avsnitt definierade vi begreppen inre och yttre variabler samt anförde några lätt urskiljbara exempel på yttre variabler, vilka starkt påverka det kapillära systemets reaktioner och jämvikter. Av de anförda exemplen utgjorde dock tiden en från de övriga skild variabeltyp.

Vi anför i detta avsnitt några exempel på inre variabler, som vi lätt kunna inse och även experimentellt kunna påvisa äro grundläggande för de kapillära fenomenen i jorden (pelaren).

Under rubriken "Kapillaritetens fysikaliska grund" (avd. 2) ha vi i detta arbete sökt klargöra vissa fysikaliskt grundläggande fakta, som skulle kunna tjäna som bakgrund till studiet av de komplexa system, som vi nu stå inför. Vi ha där visat, att vattnet på ett lagbundet sätt stiger i trånga kapillärrör och spalter. När nu vattnet stiger och fördelar sig i den ursprungligen torra (el. nära torra) pelaren A och kvarhålls på ett bestämt sätt i den ursprungligen mättade pelaren B, så säga vi, att detta beror på jordartens (jordens) kapillaritet.

Det är tydligt, att dessa fenomen bero på uppkonsten av mer eller mindre starkt krökta menisker i kontaktytorna: porvägg (partikelnya) luft och vatten (se också inledn. stycket 12!). Denna krökning bestämmas

bl.a. av vissa inre variabler. Vi urskilja däribland partikelytomnas befuktningsegenskaper, karakteriserbara genom den tidigare införda befuktningensvinkeln β . När denna är stor tala vi vanligen om ett befuktningensmotstånd. I detta mera teoretiskt betonade arbete sätta vi ofta befuktningensvinkeln $\beta = 0$, vilket även experimentellt visat sig gälla för vatten-ren partikelyta, d.v.s. partikelytor, som icke äro belagda med direkt vattenavstötande ämnen (hartser, fetter etc.).

Om vid stigförsöken den ursprungliga vattenhalten ej är 0 utan har ett visst lågt begynnelsevärde, initialvärde w_i , är befuktningensarbetet mer eller mindre fullständigt avslutat. Om w_i ligger i närheten av jordartens hygroskopiska vattenhalt w_{hy} är befuktningensarbetet avslutat och vi kunna med god approximation sätta $\beta = 0$.

Den för de kapillära processernas styrka och förlopp avgörande inre variabeln är porstorleksfördelningen φ_v (v av eng. void = hålrum) eller den med φ_v korrelerade och oftare bestämda kornstorleksfördelningen (partikelfördelningen) φ_p . Beträffande de för kornstorleksfördelningar (älv. porstorleksfördelningar) gällande allmänna sambanden och begreppen hänvisas läsaren till Krumbein, W.C. & Pettijohn, F.J., 1938 Herdan, G., 1953, Dalrymple, J.M., 1948 m.fl.!). Se också mitt arbete: "Några teoretiska synpunkter på lösa massors finfördelningskaraktäristik" (i manus.).

Porstorleksfördelningen φ_v är beroende av många mer eller mindre explicit uttryckbara faktorer såsom kornstorleksfördelning φ_p , kornform c_f , kornens ytstruktur c_v , den av packning och andra förhållanden bestämda porositeten n , av strukturen osv.

Den enklaste lösa massan är den, som består av likstora sfärer i kubisk lagring (se ex. 3.01!). Denna massas porgeometri har studerats av C.S. Slichter (1898), W.B. Haines (1925, 1927, 1930), L.C. Graton och H.J. Fraser (1935) m.fl. I denna massa är φ_p uttömmande definierad genom angivandet av diametern d hos en enda av de likstora sfärerna (ex. väl sorterat hagel). I de fall — och detta gäller alltid naturliga material — att en verklig fördelning förekommer, består problemet i att finna lämpliga parametrar, varmed fördelningen kan karakteriseras eller åtminstone tillnärmelsevis funktionellt definieras. Vi kunna här icke ingå på detta problem utan anföra endast att, när en fördelning dvs. en jordart får representeras av en medeldiameter d_m , denna tänkes vald eller uträknad på lämpligt sätt. Jämför här bl.a. aritmetiskt, geometriskt och harmoniskt medeltal! Jämför även begreppen effektiv korndiameter d_{10} (se ex. 3.02!), kvartiler osv!

I anslutning till den i stycket 24 införda beteckningen h_c för vattnets stigning i ett kapillärrör beteckna vi i fortsättningen den i en jordart vid ett visst tillfälle verksamma eller möjliga kapillära kraften (eg. tensionen) med h_c . Härvid mätes h_c i cm v.p. Beteckningen h_c anger helt allmänt och utan närmare precisering kapillariteteten mätt i cm v.p. I enskilda fall är som vi skola se ofta preciserande tillägg nödvändiga.

Om vi nu för fullständighetens skull erinra oss, att vattenhalten w också bör räknas med till de inre variablerna, så kunna vi sammanfatta den förda diskussionen i den symboliska, implicit tecknade funktionsformeln

$$F(t, \frac{\partial w}{\partial t}, h_c, z, \dots; \beta, w_i, \varphi_{v,p}, c_f, c_y, n, d_m, \dots, w, h_c) = 0 \quad (3.05)$$

I denna formel ha variablerna införts i den ordning, vi behandlat dem. Yttre och inre variabler åtskiljas i formeln av ett semikolon. Punkterna markera enligt vedertaget bruk utlämnade variabler, d.v.s. i detta fall ej urskiljda och betecknade. Variablerna w och h_c ha ställts sist, och därigenom att de placerats efter punkterna givits en viss särställning. Ur många synpunkter är det ofta lämpligt att betrakta dessa som funktioner av de övriga och framställa dem explicit.

313. Definition av kapillaritetens fyra fundamentalpunkter.

Om vi i anslutning till figur 3.04 något närmare undersöka kurvorna A och C eller med utnyttjande av tidigare införda beteckningar vilja försöka ange den allmänna formen av funktionerna

$$w_{st} = f_{st}(z) \quad (3.06)$$

eller

$$w_{dr} = f_{dr}(z) \quad (3.07)$$

så finna vi, att de bägge bestå av en nedre och en övre del, inom vilka vattenhalten är jämförelsevis konstant, och att dessa två delar förenas av en tredje del, inom vilken vattenhalten växer med djupet z . Eller om vi utnyttja variabeln ξ ett område, där vattenhalten avtar med höjden över den fria vattenytan (grundvattenytan). Detta förhållande är fundamentalt och har visat sig gälla för alla av oss närmare undersökta fraktioner och naturliga jordarter (se Andersson, S. Markf. Unders. XII i manus.!). I princip ha kurvorna inom området för avtagande (med ξ) vattenhalt s-form. Detta ger möjlighet till en viss matematisk modellbildning, som vi dock icke här gå närmare in på. Dessa kurvor ge synnerligen värdefulla upplysningar om det kapillära systemets egenskaper. De kunna på olika sätt användas

för att karakterisera det givna systemets reaktioner med avseende på de vattenrörelser och vattenhaltsförskjutningar, som i olika fall böra inträffa.

Det är tydligt, att vi för den fortsatta analysen lämpligen böra införa definitioner och beteckningar för de fyra punkter eller områden, där vattenhalten övergår till att bli avtagande med höjden ξ . Om vi följa kurvan A från v.y. och uppåt möta vi först punkten $h_{c,1}$. Den högsta stighöjden betecknas sedan med $h_{c,2}$. Gå vi nu längs z-axeln (ξ -axeln) upp till $z = 0$ ha vi följt kurvan för vätande betingelser. Vi följa nu kurvan för torkande betingelser (kurva C) och möta punkten $h_{c,3}$. Vattenhalten tillväxer nu inom ett område och når från och med punkten $h_{c,4}$ ett konstant värde. Vi ha på detta sätt beskrivit en väg, som innesluter hysteresisöglan.

Följande definitioner införs nu, varvid vi ur fullständighetssynpunkt även medtaga h_c .

- a. h_c = kapillär höjd i allmänhet utan närmare specifikation
- b. $h_{c,1}$ = undre kapillär höjd vid stigaing; h_c -minimum vid transgression
- c. $h_{c,2}$ = övre kapillär höjd vid stigaing; h_c -maximum vid transgression
- d. $h_{c,3}$ = övre kapillär höjd vid dränering; h_c -maximum vid regression
- e. $h_{c,4}$ = undre kapillär höjd vid dränering; h_c -minimum vid regression

Härmed har kapillaritetens fyra fundamentalpunkter definierats (satserna b-e). Se här också G. Beglow (1929)!

Vi kunna också betrakta funktionerna (3.06) och (3.07) som specialfall av det allmänna samband, som symboliskt definieras av ekvationen (3.05).

Om vi sätta t tillräckligt stort bliva kurvorna A och C figur 3.01 oförändrade med tiden, eller förändringarna gå så långsamt, att vi här kunna försumma dem. h_o är givet och konstant. Samtliga inre variabler utom w anse vi entydigt definiera systemets (inre) begynnelsestillstånd $I_o =$ initialtillstånd. Vi ha då

$$F\left(\frac{\partial w}{\partial t}, h_o, z, I_o, w\right) = 0 \quad (a)$$

eller eftersom h_o och I_o kunna betraktas som konstanter

$$w_{st} = f_{st}(z, t_1) \text{ för } \frac{\partial w}{\partial t} > 0 \quad (b)$$

och

$$w_{dr} = f_{dr}(z, C_2) \quad \text{för } \frac{\partial w}{\partial t} < 0 \quad (c)$$

där C_1 och C_2 äro speciella parametrar som definiera systemets av inre och yttre variabler bestämda initialtillstånd.

32. Några exempel.

Följande exempel avse att på vissa punkter komplettera de omfattande frågeställningar, som hittills blivit berörda. Vi kunna dock ej mera än exemplifiera de typer av problem, som här äro aktuella och på olika sätt ägnade att göra läsaren förtrogen med de tankegångar, som i det föregående blivit något utvecklade.

Ex. 3.01. Beräkna porvolym V_n och porositet n i en lös massa (ideal jord), som antages bestå av likstora sfäriska partiklar med radien r : a) om lagringen är kubisk (= lösaste packning) och b) om lagringen är rombisk (= tätaste packning).

Lösning: a) Vi erhålla enhetslementet, dvs det element, som om det upprepas tillräckligt många gånger, ger oss hela massan, om vi tänka oss en kub med kantlinjen $2r$ avgränsad så, som figur 3.03 visar (jfr B.A. Keen 1931!).

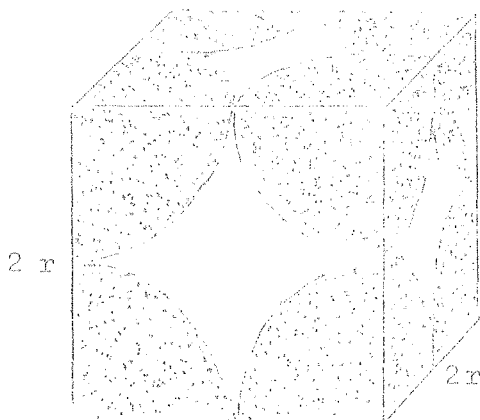


Fig. 3.03.

Tydiligen blir

$$V_n = 8r^3 - 4/3 \pi r^3 = 8r^3 (1 - \frac{\pi}{6}) \quad (a)$$

$$V_n = 3,811r^3 \quad (b)$$

$$n = 100 \cdot \frac{V_n}{V} = 1 - \frac{\pi}{6} = 47,64 \% \quad (c)$$

där $V = 8r^3$ är enhetslementets volym.

b) Enhetslementet består i detta fall av en romboeder, vars dimensioner och virklar framgå av figur 3.04. På figuren ha vissa för beräkningen behöfliga hjälplinjer införts. Tydningen blir romboederns volym

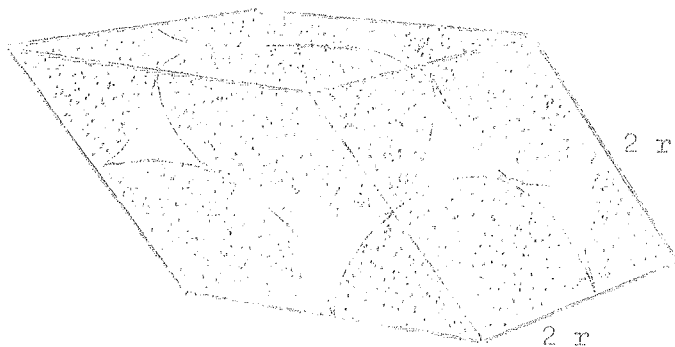


Fig. 3.04.

$$V = 2 \cdot \frac{2r^2}{4} \cdot 3 \cdot h \quad (a)$$

men

$$h = \sqrt{4r^2 - \frac{4}{3}r^2} = r \sqrt{\frac{8}{3}} \quad (b)$$

som ger

$$V = 4r^3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 5,657 r^3 \quad (c)$$

Således blir porvolymen

$$V_n = 4r^3 \cdot \left(2 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(2 - \frac{\pi}{3}\right) 4r^3 \quad (d)$$

$$V_n = 1,4680 r^3 \quad (e)$$

Porositeten n blir

$$n = 100 \frac{V_n}{V} = 100 \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) = 25,95 \quad (f)$$

Om de under c) och b) erhållna resultaten sammanställas, erhålles

	Enhetsvolym	Porvolym	Porositet
a) Kubisk	$8r^3$	$3,81r^3$	47,6
b) Rombisk	$5,66r^3$	$1,47r^3$	26,0

Ex. 3.02. Enligt A.H.M. Andreassen (1930) motsvarar fördelningsfunktionen (summafunktionen)

$$y = 100 \left(\frac{x}{d_M} \right)^\alpha$$

en kornig massa, så fördelad med hänsyn till kornstorleken, att minsta porositet erhålles (vid given packning). Exponenten α ligger mellan 0,3 och 0,5 och sättes vanligen = 0,4. I ekvationen betyder y halten i viktsprocent av korn med diameterna x och x en godtycklig kornstorlek

d_M betecknar härvid den största förekommande korndiametern.

a) Härled den mot denna fördelningsfunktion svarande frekvensfunktionen!

b) Beräkna λ eller den s.k. olikformigheten! Observera, att enligt W. Taylor Soil Mechanics (1948) motsvarar λ A. Hazens likformighetskoefficient C_u (eng. uniformity coefficient).

c) Beräkna, vilka procentuella mängder, som skola tagas av Atterbergs huvudfraktioner och underfraktioner, om man vill åstadkomma en blandning,

som uppfyller de av formeln angivna villkoren. d_M sättes = 2 mm och $\alpha = 0.4$.

Lösning: a) Frekvensfunktionen φ_p är fördelningsfunktionens derivata. Således

$$\varphi_p = \varphi_p'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{100 \alpha}{d_M} x^{\alpha-1} = \frac{100 \alpha}{d_M} \left(\frac{x}{d_M}\right)^{\alpha-1} \quad (a)$$

eller om de under c) angivna värdena insätts

$$\varphi_p = \varphi_p'(x) = 20 \left(\frac{x}{2}\right)^{-0,6} \quad (b)$$

Ärm. I ett semilogaritmiskt diagram ($^{10}\log$) gäller att

$$\xi = {}^{10}\log x \quad (a)$$

och följaktligen är

$$\varphi = \varphi(\xi) = \frac{dy}{d\xi} \quad (b)$$

men ekv. (a) ger $x=10^{\xi}$ och $\ln x = \xi \ln 10$, varav genom derivering erhålles

$$\frac{dx}{d\xi} = x \ln 10 \quad (c)$$

men

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = x \ln 10 \cdot 20 \left(\frac{x}{2}\right)^{-0,6} \quad (d)$$

och således

$$\varphi_p = \frac{dy}{d\xi} = 40 \ln 10 \left(\frac{x}{2}\right)^{0,4} = 92,10 \left(\frac{x}{2}\right)^{0,4} \quad (e)$$

b) Den formelmässiga definitionen på λ lyder

$$\lambda = \frac{d_{60}}{d_{10}}$$

där d_{60} är fria maskvidden hos den sikt, som släpper igenom 60 % av materialet, och d_{10} fria maskvidden hos den sikt, som släpper igenom 10 % av materialet, dvs effektiva korndiametern enligt A. Hazen.

Således måste gälla

$$60 = 100 \left(\frac{d_{60}}{d_M}\right)^{0,4} \quad (a)$$

och ävenså

$$10 = 100 \left(\frac{d_{10}}{d_M}\right)^{0,4} \quad (b)$$

som ger

$$6 = \left(\frac{d_{60}}{d_{10}}\right)^{0,4} = \lambda \quad (c)$$

och

$$\log \lambda = \frac{\log 6}{0,4} = \frac{0,7782}{0,4} = 1,946 \quad (d)$$

$$\lambda = 88,3 \quad (e)$$

c) Vi logaritnera den givna ekvationen och erhålla

$$\log y = 2 + \alpha \log \frac{x}{d_M} \quad (a)$$

eller för de angivna villkoren

$$\log y = 2 + 0,4 \log \frac{x}{d_M} \quad (b)$$

Vi beräkna y för korngruppsgränserna och erhålla sedan genom differensbildning de sökta viktsfrekvenserna Δy . Räkningarna kunna lämpligen uppställas i följande schema:

Korngruppsgräns

<u>x i mm</u>	<u>Beräkning</u>	<u>y</u>	<u>Δy</u>
2	$\log y = 2 + 0,4 \log \frac{2}{2} = 2,0$	100,0	
$\frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0,6$	$\log y = 2 + 0,4 \log \frac{1}{\sqrt{10}} = 1,8$	63,1	36,9
0,2	$\log y = 2 + 0,4 \log 0,1 = 1,6$	39,8	23,3
$\frac{2}{10\sqrt{10}} \approx 0,06$	----- = 1,4	25,1	14,7
0,02	----- = 1,2	15,9	9,2
$\frac{2}{100\sqrt{10}} \approx 0,006$	----- = 1,0	10,0	5,9
0,002	----- = 0,8	6,3	3,7
$\frac{2}{1000\sqrt{10}} \approx 0,0006$	----- = 0,6	4,0	2,3
0,0002	$\log = 2 + 0,4 \log 10^{-4} = 0,4$	2,5	1,5
			2,5

Ann. På figur 3.05 finnas de under exempel 3.02 gjorda beräkningarna sammanfattade i ett diagram. Detta exempel har formulerats och skjutits in här för att exemplifiera användningen av och konkretisera föreställningarna kring några av de begrepp ur teorin för korniga massors finfördelningskarakteristik, vilka omnämnts i det föregående. De läsare, som här önska gå vidare, hänvisas till tidigare angiven litteratur. Området måste betraktas

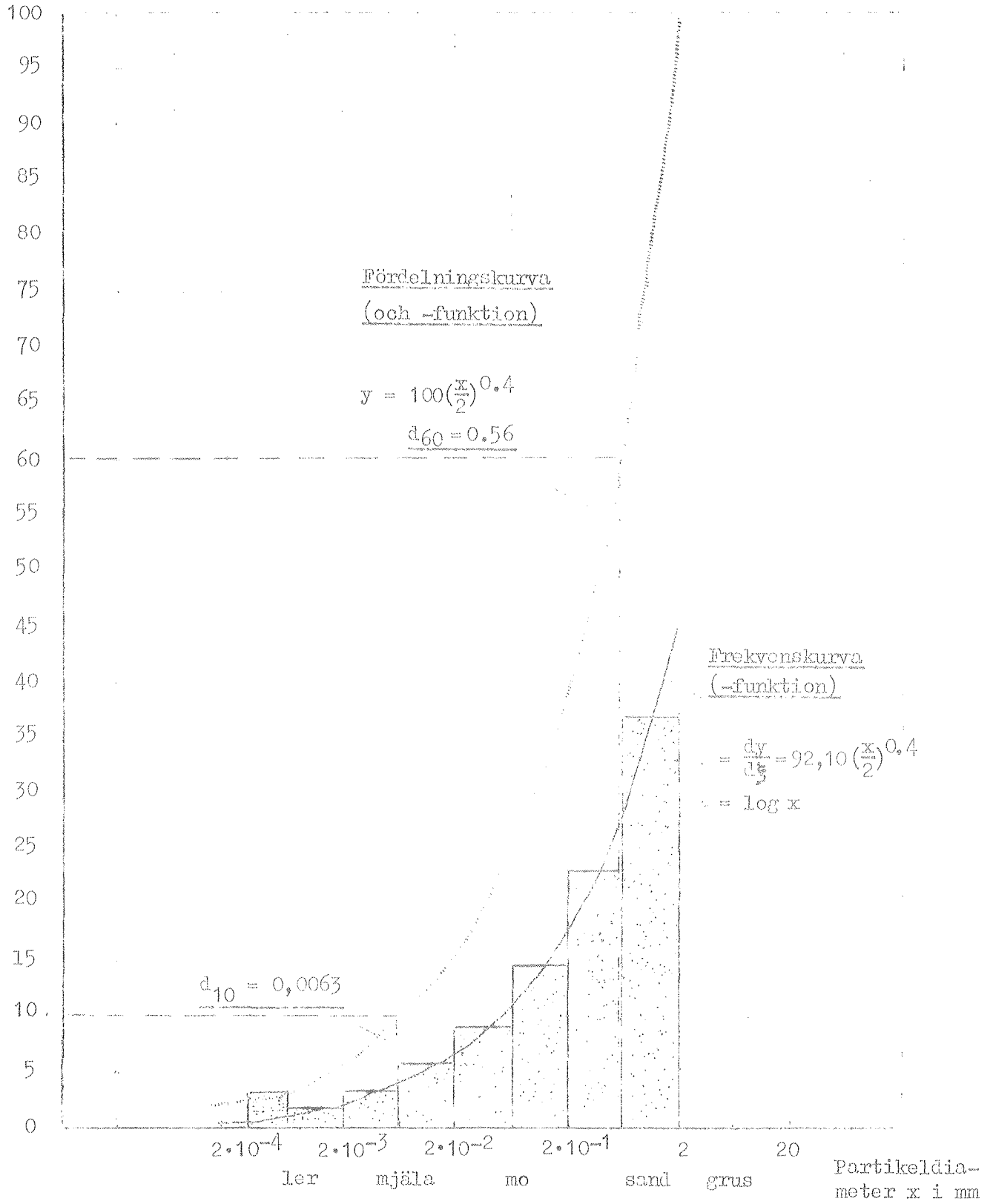


Fig. 3.05.

som synnerligen väsentligt för en mera exakt grundläggning av våra kunskaper inom markfysik och agrohydrologi.

Ex. 3.03. Följande exempel kan tjäna att ge en viss belysning åt den inre ytans betydelse vid gränsdragningen mellan adsorptionsvatten och kapillärsvatten: a) Beräkna viktsprocenten adsorptionsvatten för en ideal kornig massa (jord), om adsorptionsvattenfilmen antages vara n molekylskikt tjock och partiklarna betraktas som sfäriska! b) Tillämpa det funna allmänna uttrycket på gränspartiklarna i Atterbergs skala inom området $d_n = 0,2 \mu$ till $d_i = 2 \text{ mm}$, om $n = 1000$ och $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$.

Lösning: a) Vikten G_s av en partikel med radien r cm och tätheten ρ g/cm³ blir

$$G_s = \rho \cdot 4/3 \pi r^3 g \quad (a)$$

Vikten av vattenfilmen på denna partikel blir ($\rho_v = 1$)

$$G_v = 4 \pi r^2 \cdot n \cdot 2 \cdot 10^{-8} g \quad (b)$$

om vattenmolekylens storlek sättes = $2 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 2 \text{ \AA}$.

Viktsprocenten vatten blir följaktligen

$$w_1 = 100 \frac{G_v}{G_s} = \frac{6 n \cdot 10^{-6}}{\rho \cdot r} \quad (c)$$

b) $n = 1000$ och $\rho = 2,7$ ger omedelbart

$$w_1 = \frac{2,22}{r} \cdot 10^{-3} \quad (d)$$

varav följande sammanhörande värden erhålles

Korn- gruppsgr. $d = 2 r$ i cm	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$
Vatten- halt w_1	222	74,0	22,2	7,4	2,2	0,74	0,22	0,07	0,02

Anm. I detta exempel har w_1 beräknats vara direkt proportionellt mot den inre ytan. Vid mycket små partiklar (ex. $d = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$) begås härvid ett rent matematiskt fel, som blir numeriskt betydelsefullt, när vattenfilmen som här antages bestå av så många molekylskikt som 1000.

Ex. 3.04. Visa att det korrekta uttrycket för adsorptionsvattenhalten i föregående exempel är

$$w_1 = \frac{6n \cdot 10^{-6}}{\rho r} \left[1 + \frac{2n \cdot 10^{-8}}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{2n \cdot 10^{-8}}{r} \right)^2 \right]$$

där beteckningarna ansluta sig till exempel 3.03 a)

Lösning:

$$G_s = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (a)$$

och $G_v = V_v$ (om vattnets täthet sättes = 1) är exakt tecknat

$$G_v = \frac{4}{3} \pi (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (b)$$

om $\Delta r = 2n \cdot 10^{-8}$

Ur (b) erhålles efter utveckling av parentesen och någon förenkling

$$G_v = 4\pi r^2 \Delta r \left[1 + \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \right] \quad (c)$$

och således

$$w_1 = 100 \cdot \frac{G_v}{G_s} = 100 \cdot \frac{3\Delta r}{\rho r} \left[1 + \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \right] \quad (d)$$

eller

$$w_1 = \frac{6n \cdot 10^{-6}}{\rho \cdot r} \left[1 + \frac{2n \cdot 10^{-8}}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{2n \cdot 10^{-8}}{r} \right)^2 \right] \quad (e)$$

V.S.B.

Denna formel övergår till den av oss tidigare använda, om parentesen kan sättas = 1. Om t.ex. $\frac{2n \cdot 10^{-8}}{r}$ ej bör vara större än 0,1, ger detta $n =$ femtio molekylskikt för $r = 10^{-5}$ om.

Ex. 3.05. Utan att i detta sammanhang närmare ingå på de använda begreppen anföres här ytterligare ett exempel ur den elementära teorien för korniga massors finfördelningskaraktistik. Exemplet lyder: Sök frekvensfunktionen i viktsprocent för den korniga massa, vars inre yta är så fördelad på de olika kornstorlekarna, att summafunktionen för den inre ytan är en lineär log-funktion! Den sökta frekvensfunktionen skall vara definierad i intervallet

$$d_m \leq x \leq d_M$$

där x betecknar den löpande partikeldiametern. Partikelformen antages vara sfärisk.

Lösning: Enligt tidigare anfört arbete (eget arbete anf. i stycket 312!) gäller för den inre ytan $A_{i,x}$ som funktion av den korniga massans viktsfrekvensfunktion φ_g uttrycket

$$A_{i,x} = c_f \int_{d_m}^x \frac{\varphi_g(x) dx}{x} \quad (a)$$

där c_f är en formfaktor, som för sfäriska partiklar har värdet $6/\rho$ ($\rho =$ kornens täthet). Den allmänna lineära log-funktionen har formen

$$A_{i,x} = a_0 + a_1 \log x \quad (b)$$

där a_0 och a_1 äro konstanter.

Vi derivera nu bägge uttrycken och sätta derivatorna lika. Således

$$c_f \cdot \frac{\psi_g(x)}{x} = \frac{a_1}{\ln 10} \frac{1}{x} \quad (c)$$

som ger

$$\psi_g(x) = \frac{c_f a_1}{\ln 10} = \text{konst} \quad (d)$$

Följaktligen gäller ($y_g =$ summationsproc.)

$$y_g = \frac{c_f a_1}{\ln 10} \int_{d_m}^x dx = \frac{c_f a_1}{\ln 10} (x - d_m) \quad (e)$$

För $x = d_M$ är $y = 100$ och härur erhålles

$$a_1 = \frac{100 \ln 10}{c_f (d_M - d_m)} \quad (f)$$

och således

$$\psi_g(x) = \frac{100}{d_M - d_m} \quad (g)$$

som är den sökta frekvensfunktionen.

Kommentarer. Följande numeriska tillämpning av ovanstående lösning är ägnad att öka förståelsen för det erhållna allmänna sambandet. Antag nämligen, att vi vilja beräkna de procentuella viktsmängderna i den funna fördelningen för huvud- och underklasserna i Atterbergs skala inom området $d_m = 2 \cdot 10^{-4}$ mm till $d_M = 20$ mm. Då är

$$\psi_g(x) = \frac{100}{20 - 2 \cdot 10^{-4}} = 5,00 \quad (a)$$

Fördelningsfunktionen blir

$$y_g = \int_{d_m}^x \psi_g(x) dx = 5(x - 2 \cdot 10^{-4}) \quad (b)$$

eller

$$y_g = 5x - 0,001 \quad (c)$$

Korngruppsgr. x	0,002	0,006	0,02	0,06	0,2	0,6	2	6	20
Summa-pr. y_g	0,009	0,029	0,099	0,299	1,00	3,00	10,0	30,0	100,0
Viktsfrekv. y	0,02	0,07	0,2	0,7	2,0	7,0	20,0	70,0	

Räkningarna ha sammanställts i ovanstående tabell. Av denna synes, att icke mindre än 90 % (viktsprocent) av blandningen skall vara grus, 9 viktsprocent skall vara sand, 0,9 viktsprocent skall vara mo och endast 0,1 viktsprocent finare än mo. Detta exempel är också ägnat att belysa de finare fraktionernas (korngruppernas) enorma betydelse för storleken av den inre ytan. Tabellen visar, att 0,9 % mo bidrar lika mycket till den korniga massans inre yta som 90 % grus!

33. Om sambandet mellan korndiameter och kapillaritet.

Enligt ekvationen (2,09¹) gäller för den kapillära stighöjden h_c i ett kapillärrör med radien $r = \frac{d}{2}$ om ekvationen

$$h_c = \frac{0,15}{r} = \frac{0,30}{d} \text{ cm v.p.}$$

I en kornig massa är i första hand partikeldiametern d given eller bestämd. I en "ideal jord", d.v.s. i en jord bestående av likstora sfäriska partiklar bör ett lagbundet förhållande existera mellan porstorlek och partikeldiameter. Vid en icke närmare eller entydigt definierad lagring måste emellertid även i detta enkla fall en viss statistisk spridning av olika porstorlekar och porformer uppkomma. Vid en bestämd lagring (jfr ex. 3.01!) är dock även porform och porstorlek definierad. Detta leder till, att ett samband då också bör förefinnas mellan h_c och d eller

$$h_c = \frac{a}{d} \quad (3.08)$$

där d nu betyder partikeldiametern. I fortsättningen indicera vi partikeldiameter med p och pordiameter med v , där så kan anses nödvändigt. Således d_p = partikeldiameter och d_v = pordiameter; respektive r_p och r_v (jfr också med φ_p och φ_v !).

I ekvationen (3.08) är a en koefficient, vars storlek för en ideal jord bör kunna teoretiskt bestämmas. Sådana teoretiska studier ha utförts av bl.a. W.B. Haines (1930) och C.S. Slichter (1898). Experimentellt har G. Beskow (1929) bestämt koefficienten a för olika viktiga fall.

För "ideala jordar" representerade av hagel fann han $a = 0,53$ eller

$$h_{c,4} = \frac{0,53}{d_p} \quad (3.09)$$

I denna ekvation har h_c indexerats $h_{c,4}$, då de värden som Beskow bestämde med hänsyn till den använda s.k. avsugningstekniken (se ex. 3.10!) närmast svara mot vår här införda undre kapillär höjd vid dränering $h_{c,4}$.

Om vi antaga, att porrdiametern d_v är en viss bråkdel av partikeldiametern d_p , så bör alltså gälla

$$d_v = \alpha d_p \quad (a)$$

där α är en numerisk faktor < 1 . Enligt ekv. (2.09') skall gälla (vid cylindriska porer!)

$$h_{c,4} = \frac{0,30}{d_v} \quad (b)$$

som kombinerad med ekvationen (3.09) ger

$$\alpha = \frac{d_v}{d_p} = \frac{0,30}{0,53} = 0,566 \quad (c)$$

Vi kunna också säga, att ekv. (3.09) svarar mot en medelkrökningsradie r_v hos de bärande meniskerna av $0,283 d_p$. Om vi antaga kubisk lagring, kunna vi lätt beräkna, att radien i den cirkel, som tänkes inskriven i en porhals, har det numeriska värdet $r_v = 0,207 d_p$ (se ex. 3.06!). Om de bärande meniskerna i Beskows undersökningar haft denna medelkrökning, skulle detta ha motsvarat ett värde på koefficienten a av $0,15/0,207 = 0,72$. Ännu högre värden erhållas, om liknande beräkningar göras med de av Slichter enligt B.A. Keen (1931) angivna värdena vid rombisk lagring (se bl.a. ex. 3.07!).

För renslammade fraktioner med $d_M/d_m \approx 2-2,5$ fann Beskow $a = 0,6$, d.v.s.

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{d} \quad (3.10)$$

där d är geometriska medeltalet av fraktionens eller korngruppens gränser. Således

$$d = \sqrt{d_M \cdot d_m} \quad (3.11)$$

Ekvationen (3.10) kan även användas för att skatta eller approximativt beräkna kapillariteten i naturliga jordar med hög sorteringsgrad (ensorterade jordar enligt Beskow).

När jämkornigheten avtar eller sorteringsgraden blir mindre växer a i formeln (3.08), så att den för mindre väl sorterade jordar går upp emot 0,83. För de extremt osorterade jordarna, moränerna, ligger a inom av olikheten $4 \leq a \leq 10$ bestämde gränser.

Ur G. Beskows (1929) arbete hämta vi också följande regler eller satser för approximativ beräkning av kapillariteten, när vissa data rörande kornstorleksfördelningen ψ_p äro kända. Jag har emellertid försökt att här ge dessa satser en något klarare och exaktare form.

Sats I. För naturliga jordarter gäller, att kapillariteten är bestämd av uttrycket

$$h_{c,4} = \frac{a}{d}$$

där d är vägd geometriska medeltalet $d_{g,m}$ (kornstorlekstyngdpunkten) av de ingående kornfraktionerna med villkoret att $d_M/d_m \leq 10$ för de enskilda fraktionerna och $0,6 \leq a \leq 0,83$.

Sats II. För kontinuerliga blandningar av intill varandra liggande fraktioner gäller, att kapillariteten är bestämd av uttrycket

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{d}$$

där d är vägd harmoniska medeltalet $d_{h,m}$ av de ingående kornfraktionerna med villkoret att $d_M/d_m \leq 10$. Inom teorien för lösa massors finfördelningskaraktistik kallas inverterade värdet av partikeldiametern för kornfinlekstal (index of fineness). Beskow benämner $1/d_{h,m}$ för "kornfinlekstyngdpunkt".

Sats III. För alla jordarter även för mycket osorterade ($d_M/d_m > 1000-10000$) synes den regeln gälla, att kapillariteten $h_{c,4}$ är det enkla aritmetiska medeltalet av kapillariteten för de båda korndiametrarna d_1 och d_2 eller

$$h_{c,4} = 1/2 \left(\frac{0,6}{d_1} + \frac{0,6}{d_2} \right)$$

där d_1 och d_2 motsvara partikeldiametrarna för skärningen mellan den räta linjen $\psi_p = a$, som halverar ytan mellan d -axeln och frekvenskurvan.

Formeln (3.10) ger oss möjlighet att beräkna kapillariteten för gränspartiklarna i Atterbergs skala. Resultatet av dessa beräkningar har sammanställts i nedanstående tabell 3.01. Tabellen ger oss en värdefull orientering om storleksordningen av kapillariteten i de olika kornfraktionerna. Vid bedömningen av kapillariteten i en given aktuell jordart kan man utgå från dessa värden och alltefter sammansättningen av den aktuella jordarten låta skattningsvärdet bli högre eller lägre.

Tabell 3.01.

<u>Fraktionens namn i</u> <u>Atterbergs skala</u>	<u>Fraktionsgränser</u> $d_m \leq d \leq d_M$ (mm)	<u>Kapillaritet</u> h_c (cm)
Grovt grus	20 - 6	0,3 - 1
Fint grus	6 - 2	1 - 3
Grov sand	2 - 0,6	3 - 10
Mellansand	0,6 - 0,2	10 - 30
Grovmo (fins.)	0,2 - 0,06	30 - 100
Finmo	0,06 - 0,02	100 - 300
Grovmjåla	0,02 - 0,006	300 - 1000
Finmjåla	0,006 - 0,002	1000 - 3000
Grovler	0,002 - 0,0002	3000 - 30.000
Finler	$< 0,0002$	> 300 (m)

Vi ha därmed gett några synpunkter på det i rubriken till detta avsnitt antydda mycket omfattande frågekomplexet: "Om sambandet mellan korn-diameter och kapillaritet". På diagrammen i figurerna 3.06 och 3.07 återges några data från egna experimentella undersökningar. De lämnas här utan närmare kommentarer, men vi skola i olika sammanhang återknyta till dem (se också exemplen!). Framställningen kompletteras nu med några exempel.

Ex. 3.06. Vid kubisk lagring av likstora sfärer uppkommer en "por-hals" av vidstående form (fig. 3.08). Beräkna radien i den inskrivbara cirkeln!

Lösning: Vi upprita figuren 3.08. Partikelradien r_p antages given, och vi söka porradien = den inskrivbara cirkelns radie r_v uttryckt i r_p .

Figuren ger omedelbart

$$2(r_v + r_p)^2 = 4 r_p^2 \quad (a)$$

varav

$$r_v + r_p = r_p \sqrt{2} \quad (b)$$

$$r_v = (\sqrt{2} - 1) r_p = 0,414 r_p \quad (c)$$

Ex. 3.06 a. Beräkna radien i den största sfär (maximal luftblåsa!), som kan inskrivas i det hålrum, den por, som bildas, då likstora sfärer lagras kubiskt.

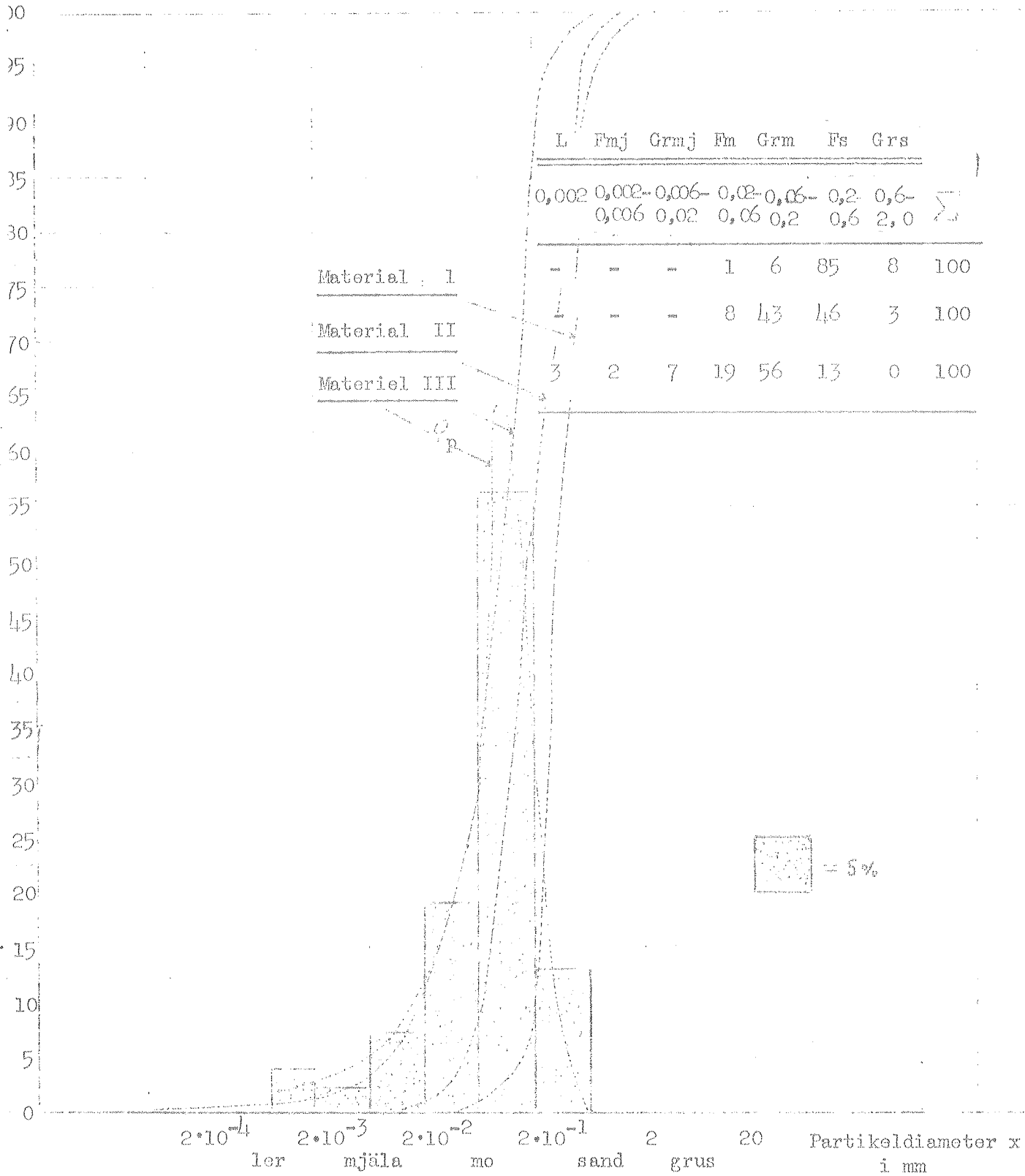


Fig. 3.06.

Volymproc.

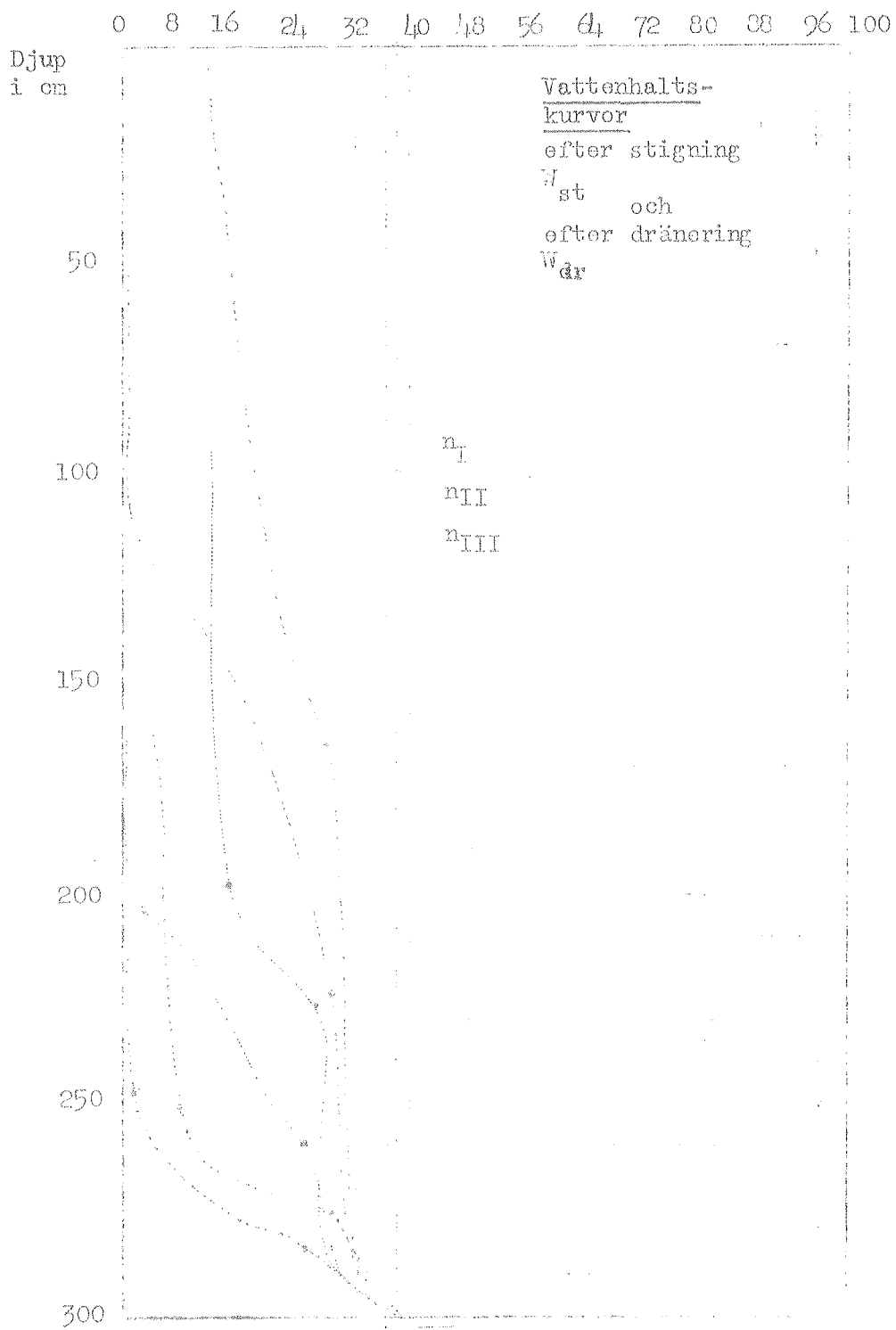


Fig. 3.07.

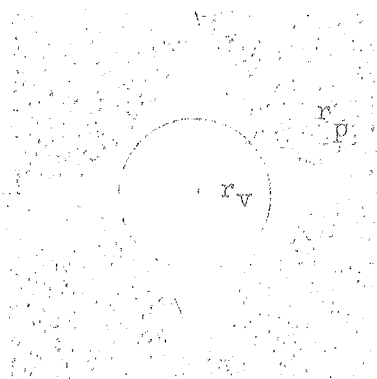


Fig. 3.08.

Lösning: Vi tänka oss ett snitt lagt genom de fyra bottenfärerna i enhetselementet och ett annat snitt lagt vertikalt genom det första snittets diagonal. Se fig. 3.08'!

Ur figuren erhålles omedelbart:

$$r_v = OD = OC - DC$$

$$DC = r(r_p); \overline{AC}^2 = 8r^2 + 4r^2 = 12r^2;$$

$$OC = \frac{C}{2} = r\sqrt{3}$$

$$r_v = r\sqrt{3} - r = r(\sqrt{3}-1) \approx 0,732r$$

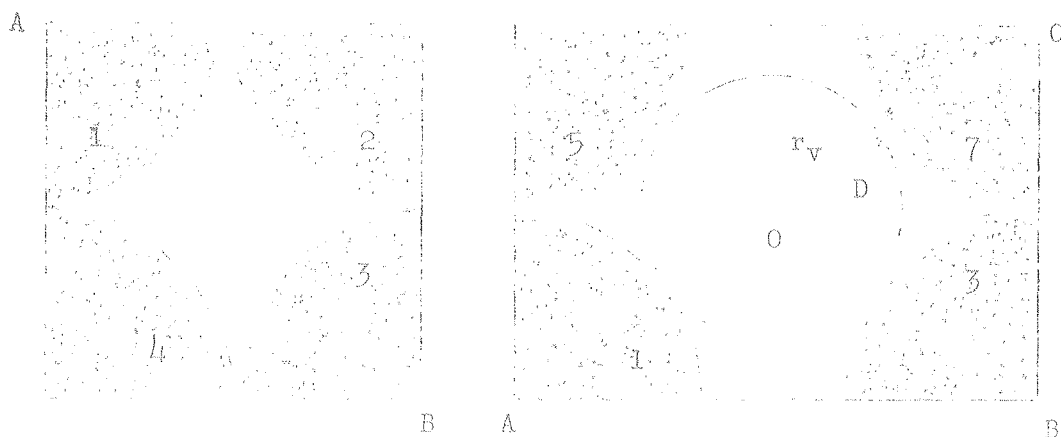


Fig. 3.08'.

Kommentarer: Detta värde på medelkrökningen hos de bärande meniskerna vid en kapillaritetsbestämning enligt Beskow skulle ge $\underline{a} = 0,41$ eller

$$h_{c,4} = \frac{0,15}{0,732r} = \frac{0,30}{0,732d} = \frac{0,41}{d}$$

Tidigare ha vi visat, att, om vi räkna med \underline{r}_v för "porhalsen", \underline{a} då blir = 0,72. Medelvärde av de två på detta sätt teoretiskt beräknade \underline{a} -värdena blir 0,57 mot Beskows experimentellt funna 0,53.

Antag att den sfär, vars radie nu beräknats, motsvarar en luftblåsa, medan den övriga porvolymen \underline{V}_n är fylld med vatten. Vi kunna då beräkna volymen fast substans, \underline{V}_s , volymen vatten, \underline{V}_v , och volymen luft \underline{V}_l , i enhetselementet med volymen $\underline{V} = 8r^3$ till

$$V_s = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\sqrt{3}-1)^3$$

$$V_v = 8 r^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 (\sqrt{3}-1)^3$$

eller

$$m = 100 \cdot \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{8 r^3} = \frac{\pi}{6} = 52,4 \quad (n = 47,6)$$

$$w_2 = 100 \frac{V_1}{V} = 100 \left[1 - \frac{\pi}{6} (1 + \sqrt{3}-1)^3 \right] = 27,1$$

$$p_1 = 100 \frac{V_1}{V} = 100 \cdot \frac{\pi}{6} (\sqrt{3}-1)^3 = \frac{39,2\pi}{6} = 20,5$$

Ex. 3.07. Vid rombisk lagring av likstora sfärer (jfr. här också med ex. 3.01!) uppkommer två typer av porer eller hålrum: tetraediska och romboediska (i antalsförh. 2:1). Den tetraediska poren begränsas av fyra tetraediskt lagrade sfärer. Enligt C.S. Slichter (1898) är radien i den cirkel, som kan inskrivas i minimisektionen ("porhalsen") av denna por = 0,155 r, där r är radien hos en av de likstora sfärerna. a) Bevisa detta! b) Vad blir konstanten a i ekvationen (3.08), om medelkrökningen anses ha detta värde?

Lösning: a) Minsta porradien återfinnes tydligen i den sktion, som ligger i det plan, som innehåller de undre sfärernas medelpunkter och ävenså tangeringspunkterna. Detta ger oss nedanstående lättförstådda figur (fig. 3.09). Ur figuren erhålles omedelbart

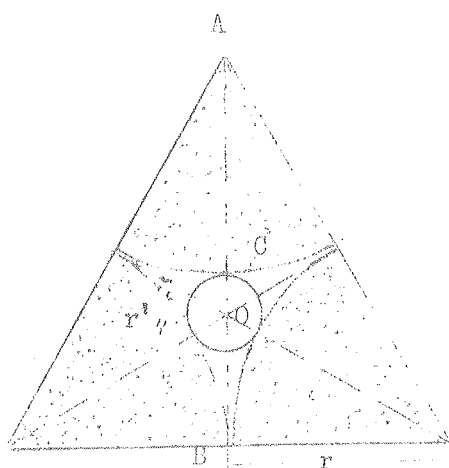


Fig. 3.09.

$$r' = CO = AO - AC \quad (a)$$

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r}{2} \sqrt{3} = \frac{2}{3} r \sqrt{3} \quad (b)$$

$$AC = r \quad (c)$$

$$r' = \left(\frac{2}{3} \sqrt{3} - 1 \right) r \quad (d)$$

$$r' = 0,155 r \quad (e)$$

V.S.B.

b) Direkt tillämpning av ekv. (2.09') ger

$$h_c = \frac{0,15}{r'} = \frac{0,15}{0,155 r} = \frac{0,30}{0,155 d} = \frac{1,94}{d}$$

d.v.s. $a = 1,94$.

Ex. 3.00. Bevisa, att den av ytspänningen förorsakade kohesionen F_k mellan två sfäriska partiklar, där en viss mängd porvinkelvatten (se figuren!) förekommer, är bestämd av uttrycket

$$F_k = \frac{2\pi r\alpha}{1 + \frac{\theta}{2}}$$

där α är vattnets ytspänning och övriga beteckningar framgå av figuren. Jämför med R.A. Fischer "On the capillary forces in an ideal soil". J.Agr. Sc., 16. 1926!

Bevis: Vi betrakta ett snitt genom två närbelägna (varandra tangerande) sfärer. Snittplanet går genom medelpunkterna. Med utgångspunkt härifrån konstrueras figuren 3.10. Beteckningarnas innebörd torde framgå av figuren.

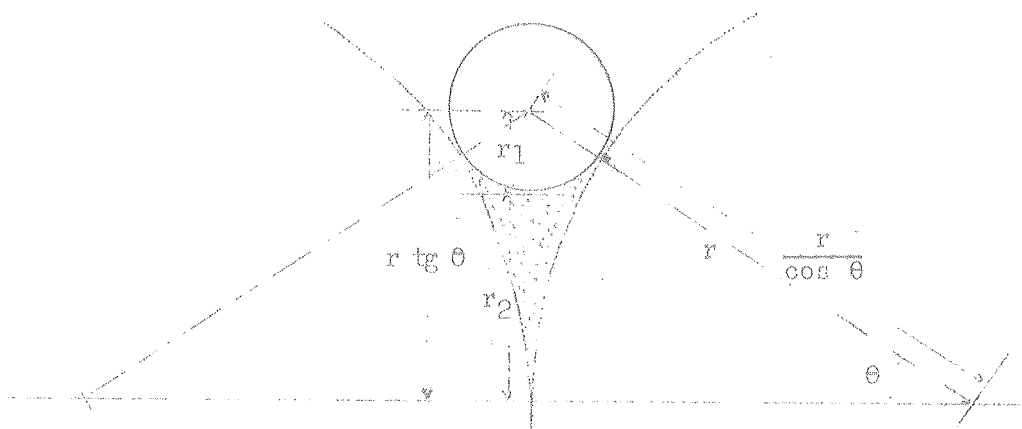


Fig. 3.10.

Enligt lagarna för ytspänning och med hjälp av Laplaces ekv. (2.05)

$$F_k = 2\pi r_2\alpha + \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\pi r_2^2 \quad (a)$$

Jämför här också med ex. 2.17! Vi genomföra följande utveckling och förenkling

$$\begin{aligned} F_k &= 2\pi r_2\alpha + \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\pi r_2^2 = \\ &= \pi\alpha\left(2r_2 + \frac{r_2^2}{r_1} - r_2\right) = \pi\alpha \frac{r_2(r_1 + r_2)}{r_1} \quad (b) \end{aligned}$$

Figuren ger

$$r_1 = \frac{r}{\cos \theta} - r; \quad r_2 = r \operatorname{tg} \theta + r - \frac{r}{\cos \theta} \quad (c)$$

Således

$$\begin{aligned} \frac{r_2(r_1+r_2)}{r_1} &= \frac{r \left(\operatorname{tg} \theta + 1 - \frac{1}{\cos \theta} \right) r \operatorname{tg} \theta}{r \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)} = \\ &= r \frac{(\sin \theta + \cos \theta - 1) \operatorname{tg} \theta}{1 - \cos \theta} = \\ &= r \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \operatorname{tg} \theta = \\ &= r \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = r \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\ &= \frac{2r}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (d) \end{aligned}$$

Införes detta uttryck i ekv. (b) erhålles slutligen

$$F_k = \frac{2\pi r \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (e)$$

V.S.B.

Ex. 3.09. Beräkna mängden porvinkelvatten i volymprocent och i mättnadsprocent i en ideal jord! Packningen antages vara kubisk, och porvinkelvattnet antages vara maximalt utbildat. Det angivna tillståndet motsvarar gränsen mellan det pendulära och det funiculära vattenhaltsstadiet enligt J. Versluys (1917) terminologi.

Lösning: Vattenhaltstillståndet åskådliggöres av figur 3.11, som visar en "porhals". Vi lösa problemet utifrån den föreställningen, att ytan ABC i figuren 3.11 tänkes rotera ett varv kring linjen AC som axel samt införa på figuren nödvändiga hjälplinjer och beteckningar. Beteckningarnas innebörd torde härvid framgå av figuren och den följande utredningen.

I ytan ABC = y_0 kunna vi urskilja fyradelytor, vilka vi betecknat med y_1 , y_2 och y_3 . När dessa ytor rotera som delytor i den större ytan $y_0 = 2y_1 + y_2 + y_3$ alstra de var sina delvolymmer $2V_1 + V_2 + V_3 = V_0$. Storleken av dessa kunna vi beräkna med hjälp av Guldins regler (se mekaniken!).

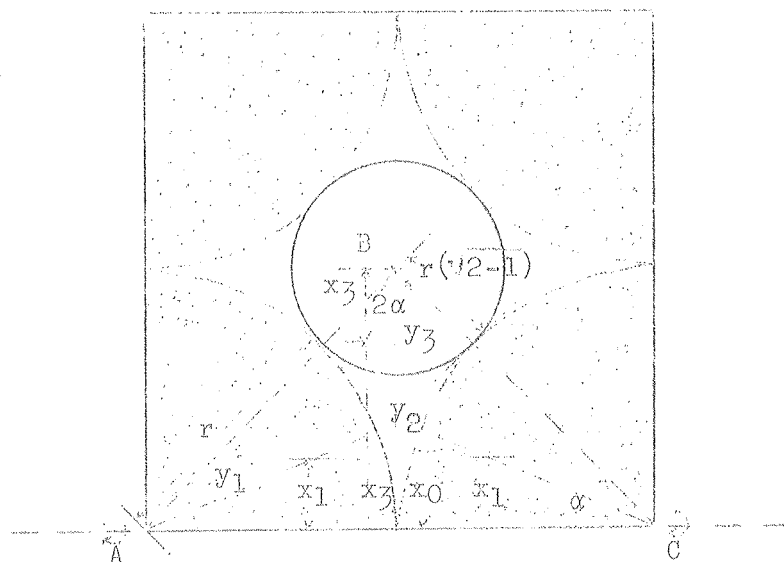


Fig. 3.11.

I anslutning till de på figuren införda beteckningarna och anförda regler erhållas följande ekvationer (obs. $V_2 =$ sökt volym!)

$$V_2 = V_0 - 2V_1 - V_3 \quad (a)$$

$$V_0 = 2\pi x_0 \cdot y_0 = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad (b)$$

samt

$$V_1 = 2\pi x_1 y_1 \quad (c) \quad \text{och} \quad V_3 = 2\pi x_3 \cdot y_3 \quad (d)$$

Efter relativt omständliga räkningar erhålla vi det allmänna svaret

$$V_2 = 2\pi r^3 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \quad (e)$$

Jämför här R.A. Fischer (1926) On the capillary forces in an ideal soil; correction of formulas given by W.B. Haines!

För $\alpha = 45^\circ$ (se fig!) erhålla vi således

$$V_2 = 2\pi r^3 (\sqrt{2}-1)^2 \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \pi r^3 (\sqrt{2}-1)^2 \left(\frac{4-\pi}{2} \right) \quad (f)$$

$$V_2 = 0,0737 \pi r^3 \quad (g)$$

Vid kubisk lagring tangerar varje sfär sex andra sfärer. Vi ha således sex porvattenringar, vilket ger en volym $= 3 V_2$ per sfär och motsvarande kub. Den sökta procenten w_2 blir således

$$w_2 = \frac{3 \cdot 0,0737 \pi r^3}{8 r^3} \cdot 100 = 8,7\% \quad (h)$$

$$S = 100 \cdot \frac{8,7}{47,6} = 18,3\% \quad (i)$$

Ex. 3.10. Vid kapillaritetsbestämningar enligt den s.k. avsugningstekniken, vilken metod också kan användas vid många andra markfysikaliska bestämningar, utsättes ett vattenmättat prov för ett undertryck ("ett sug") enligt figur 3.12. Om undertrycket långsamt pålägges, nås till slut ett undertryck, vid vilket luft går igenom provet. Detta undertryck avläses och omräknas till cm v.p. och anges som provets kapillaritet. Den av G. Beskow utformade kapillarimetern bygger på denna princip. Vi indicera detta värde i överensstämmelse med det föregående med $h_{c,4}$. Vi kunna även kalla denna kapillaritet för kapillaritet enligt Beskow ($h_{c,B}$).

a) Huru stor är ett provs kapillaritet enligt Beskow, om i anslutning till figur 3.12 $H_1 = 15,0$ cm v.p. och $H_2 = 31,5$ cm Hg.

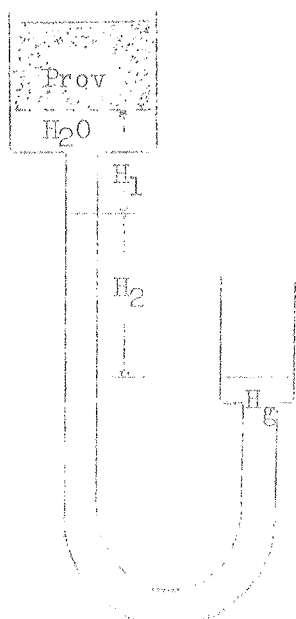


Fig. 3.12.

b) Beräkna storleken av den cylindriska por, som denna kapillaritet svarar mot!

Lösning: a) Kvicksilvrets specifika vikt är 13,6 och vi erhålla omedelbart

$$h_{c,4} = h_{c,B} = 15,0 + 13,6 \cdot 31,5 = 443,4 \text{ cm v.p.}$$

b) Ekvationen (2.09') ger omedelbart

$$443,4 = \frac{0,30}{d_v} \quad (a)$$

eller

$$d_v = 0,00068 \text{ cm} = 6,8 \mu$$

Ex. 3.11. G. Beskow (1929) gjorde en del av sina grundläggande undersökningar på av A. Atterberg tidigare renslammade och använda fraktioner. En av dessa fraktioner hade gränserna $d_m = 0,02 \leq d \leq d_M = 0,05$ mm. Beräkna eller skatta kapillariteten i denna fraktion!

Lösning: Vi tillämpa formlerna (3.10) och 3.11). Således enligt (3.11)

$$d_{g,m} = \sqrt{d_M \cdot d_m} = \sqrt{0,05 \cdot 0,02} = 0,0316 \text{ mm}$$

varav enligt (3.10)

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{0,00316} = 190 \text{ cm}$$

Vid direkta stigförsök fann Atterberg $h_{c,2} = 200$ cm och Beskow fann vid mätningar med sin kapillarimeter $h_{c,4} = 186$ cm.

Ex. 3.12. Beräkna kapillariteten för grovmjälafractionen!

Lösning: Grovmjälcn definieras av kornstorleksgränserna

$$\underline{d}_m = 0,006 \leq d \leq 0,02 = \underline{d}_m. \text{ Formel (3.11) ger}$$

$$d_{g,m} = \sqrt{0,006 \cdot 0,02} = 0,011 \text{ mm}$$

varav enligt (3.10)

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{0,0011} = 545 \text{ cm}$$

Genom direkta experimentella mätningar i sin apparat fann Beskow, att denna fraktions kapillaritet var 590 cm.

Ex. 3.13. Beräkna kapillariteten i de tre material, vars sammansättning finnes återgiven på figur 3.06!

Lösning: Vi visa här uträkningen för material I och ange endast svaren för de två övriga materialen (II och III). Uträkningen genomföres både enligt sats I och sats II. För material I gäller således

$$\log d_{g,m} = \frac{1}{100} (1 \cdot \log \sqrt{0,02 \cdot 0,06} + 6 \cdot \log \sqrt{0,06 \cdot 0,2} + 85 \cdot \log \sqrt{0,2 \cdot 0,6} + 8 \cdot \log \sqrt{0,6 \cdot 2})$$

$$\log d_{g,m} = 1/2 \cdot \log 12-1$$

$$d_{g,m} = 0,346 \text{ mm}$$

som ger (enl. ekv. 3.10)

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{0,0346} = 17,3$$

och om koefficienten a = 0,83 användes

$$h_{c,4} = \frac{0,83}{0,0346} = 23,0 \text{ cm v.p.}$$

Enligt sats II erhålles

$$\frac{1}{d_{h,m}} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{\sqrt{0,0012}} + \frac{6}{\sqrt{0,012}} + \frac{85}{\sqrt{0,12}} + \frac{8}{\sqrt{1,2}} \right)$$

$$\frac{1}{d_{h,m}} = 3,36$$

som ger

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{d_{h,m}} = 20,2 \text{ cm v.p.}$$

Vi sammanställa de erhållna resultaten i nedanstående tabell

Material	$h_{c,4}$ ber. m. $d_{g,m}$		$h_{c,4}$ ber. m. $d_{h,m}$	$h_{c,B}$	$h_{c,2}$	Anmärkningar
	$a = 0,60$	$a = 0,83$	$a = 0,60$			
I	17,3	23,0	20,2	23,1	50,3	$h_{c,2}$ ur egna direkta stigförsök
II	32,9	45,6	80,4	78,0	93,3	
III	53,6	74,1	129	246	185,0	$h_{c,B}$ best. i kapillarimeter enl. Beskow

Ex. 3.14. I G. Beskows (1929) här ofta anförda arbete finnes nedanstående kurva med dessa ur figurtexten uttagna meningar: "Den horisontella linjen a-b i vår figur (den ena figuren, kurvan, är här utesluten!) delar de av kurvorna inramade ytorna i två lika stora hälfter. Linjen a-b betecknar alltså sorteringskurvans medelbredd;" Kanna dessa två meningar förenas eller strida de mot varandra? Se figuren 3.13!

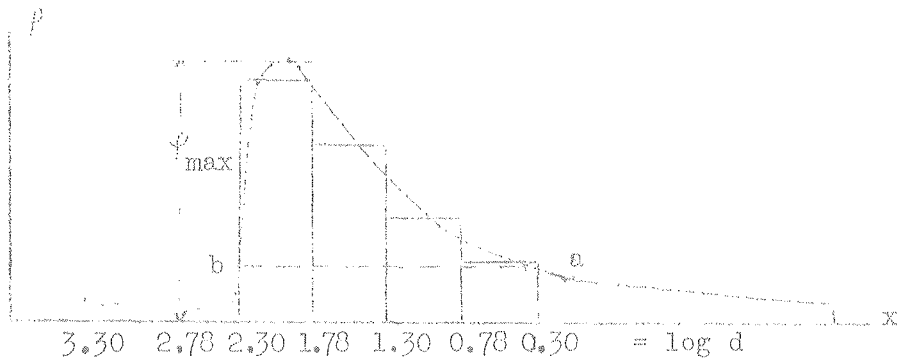


Fig. 3.13.

Lösning: På figuren införa vi ytterligare beteckningarna φ och x i anslutning till tidigare beteckningar, d.v.s. vi uppfatta frekvenskurvan som en funktion av x och skriva $\varphi = \varphi(x)$, där $d_m \leq x \leq d_M$.

En rät linje $\varphi = \varphi_0$ parallell med x -axeln skär kurvan i två punkter med x -värdena x_1 och x_2 . Längden av linjeelementet z mellan skärningspunkterna blir $x_2 - x_1$. Vi kunna tydligen uppfatta z som funktion av φ eller $z = F(\varphi)$. Enligt integralkalkylens medelvärdessats gäller då för medelvärdet av z = medelbredden.

$$z_m = \frac{1}{\varphi_{\max}} \int_0^{\varphi_{\max}} F(\varphi) d\varphi \quad (a)$$

där φ_{\max} finnes införd på figuren.

Den linje $\varphi = \varphi_h$, som skall halvera ytan under kurvan är emellertid bestämd av uttrycket

$$1/2 \int_0^{\varphi_{\max}} F(\varphi) d\varphi = \int_0^{\varphi_h} F(\varphi) d\varphi \quad (b)$$

Ur denna ekvation kunna vi efter integrering lösa ut φ_h (se kommentarerna!). När φ_h är känd, kunna vi även beräkna halveringslinjens längd z_h . Om påståendet i de båda meningarna ej skall strida mot varandra måste således gälla att

$$\varphi_h = \varphi_m \quad (c)$$

eller att de häremot svarande z-värdena uppfylla villkoret

$$z_h = z_m \quad (d)$$

Ur ekvationerna (a) och (b) erhålles med $z_m = F(\varphi_m)$

$$F(\varphi_m) \cdot \varphi_{\max} = 2 \int_0^{\varphi_h} F(\varphi) d\varphi \quad (e)$$

Det är tydligt att endast i mycket speciella fall kan här vid godtyckliga funktioner $F(\varphi)$ bestämda av de givna frekvensfunktionerna $\varphi = \varphi(x)$, φ_m och φ_h vara utbytbara. Ett sådant speciellt fall är den rektangulära fördelningen, där $\varphi = \text{konst.}$ och således även $F(\varphi_m)$. Vi sätta denna = b . Då gäller

$$b \cdot \varphi_{\max} = 2 b \varphi_h \quad (f)$$

och

$$\varphi_h = \frac{\varphi_{\max}}{2} = \varphi_m \quad (g)$$

eller

$$z_h = z_m = b \quad (h)$$

De anförda meningarna strida således mot varandra (se också kommentaren och figur 3.13!)

Kommentarer: Låt oss antaga att

$$\varphi = \varphi_{\max} \left[1 - \left(\frac{2x - (d_M + d_m)}{d_M - d_m} \right)^2 \right] \quad (a)$$

eller, om vi sätta $\frac{d_M - d_m}{2} = a$, där a enligt Beskow kan kallas amplitud och $\frac{d_M + d_m}{2} = b$

$$\varphi = \varphi_{\max} \left[1 - \left(\frac{2x - b}{a} \right)^2 \right] \quad (b)$$

som ger

$$x = \frac{b}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}} \quad (c)$$

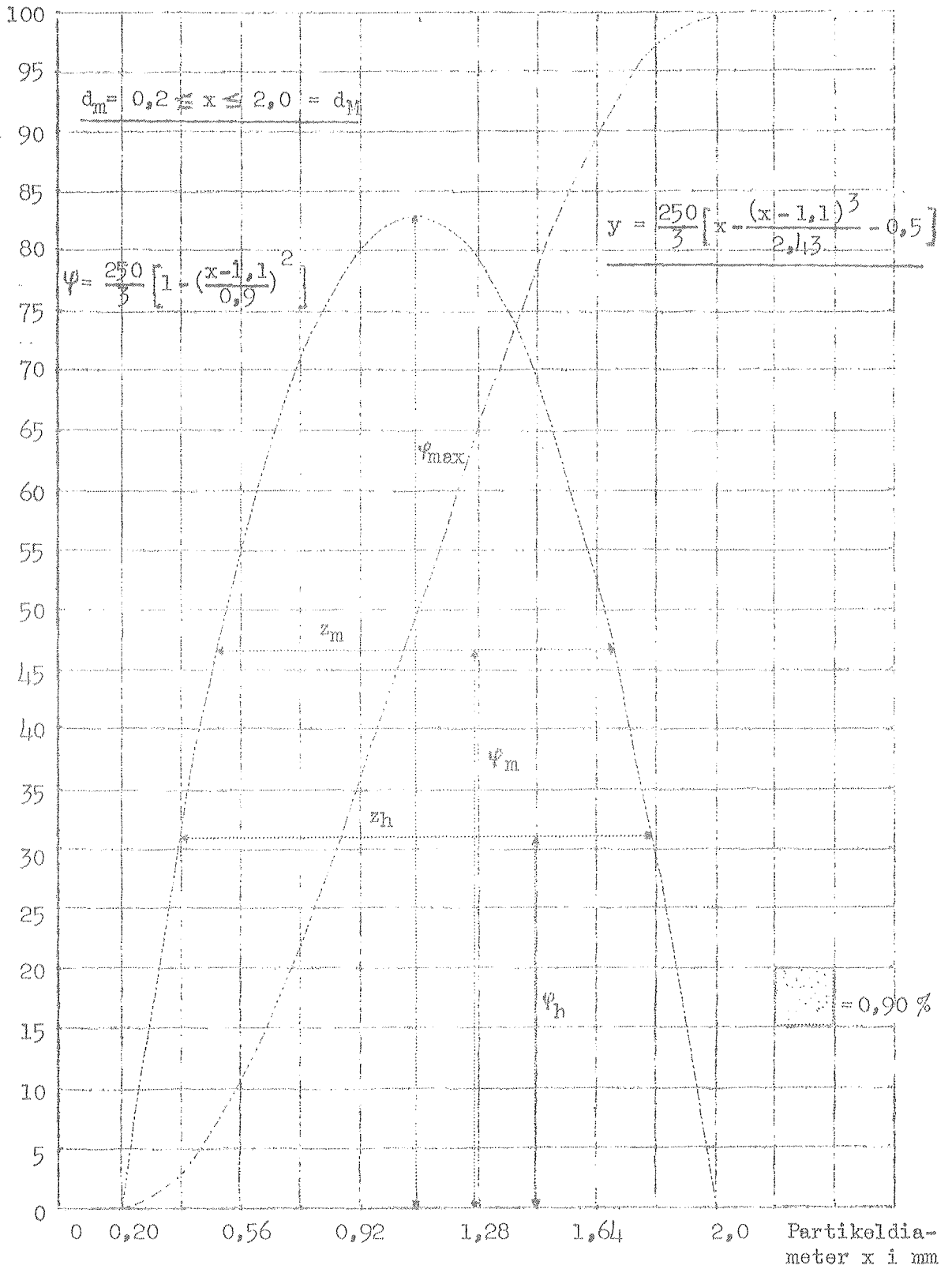


Fig. 3.14.

och således

$$z = x_2 - x_1 = a \sqrt{1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}} \quad (d)$$

Vi erhålla vidare

$$z_m = \frac{1}{\varphi_{\max}} \int_0^{\varphi_{\max}} a \sqrt{1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}} d\varphi = \frac{2}{3} a \quad (e)$$

Halveringslinjen är bestämd av uttrycket

$$1/2 \int_0^{\varphi_{\max}} a \sqrt{1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}} d\varphi = \int_0^{\varphi_h} a \sqrt{1 - \frac{\varphi}{\varphi_{\max}}} d\varphi \quad (f)$$

som integrerad och förenklad ger ekvationen

$$\left(1 - \frac{h}{\max}\right)^{\frac{3}{2}} = 1/2 \quad (g)$$

varav

$$\varphi_h = \varphi_{\max} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{4}}\right) \approx 0,37 \varphi_{\max} \quad (h)$$

Om vi insätta $z_m = \frac{2}{3} a$ i ekv. (d) erhålla vi tydligen medelbreddens höjdläge. Insättningen ger

$$\varphi_m = \frac{5}{9} \varphi_{\max} \approx 0,56 \varphi_{\max} \quad (i)$$

34. Vattnets stigning i en torr jordpelare.

De föregående analyserna ha givit oss några hållpunkter för uppskattningen av en jordarts kapillaritet definierad som vissa karakteristiska höjder i w-z- eller S-z-diagrammet på figur 3.01. Vi kunna också säga, att vi inledningsvis undersökt formen av uttrycket (3.05), när h_c betraktas som beroende variabel (= funktion) och t sättes = ∞ . Härvid ha vi låtit samtliga yttre och inre variabler utom d ingå i en komplex funktion, som implicit fått definiera det inre och yttre initialtillståndet. Vi ha då kunnat undersöka, huru h_c beror av d samt antyda svårigheten att vid naturliga jordarter finna en genomsnittsdiameter, varmed kornstorleksfördelningen φ_p läte sig ur kapillaritetssynpunkt entydigt representeras. Vi ha endast i samband med den ideala jorden berört kornformen och med den förbundna problem. Diskussionen måste därför anses såsom synnerligen ofullständig och bör närmast betraktas som en skiss. Vi lämna emellertid tillsvidare denna aspekt med dess många intrikata frågor för att i de

närmast följande avsnitten ägna oss åt vissa kapillaritetsföreteelser, där tiden t är en mera framträdande variabel.

341. Härledning av en ekvation för vattnets kapillära stigning i en torr eller nära torr jordpelare.

Vi låta i ekvationen (3.05) samtliga variabler utom t , z , w och h_c implicit innefattas i det studerade systemets mer eller mindre fullständiga verbala beskrivning. Vår uppgift är att (om möjligt) bestämma z som explicit funktion av de övriga variablerna, d.v.s. finna det analytiska uttrycket för det symboliskt tecknade sambandet

$$z = f(t, w, h_c) \quad (a)$$

I figur 3.15 återges schematiskt tillståndet i en jordpelare t tidsenheter efter det att kontakt åvägabragts mellan jord och vatten och vattnet kapillärt börjat att stiga i pelaren. På figuren ha dessutom en del beteckningar och förklaringar blivit införda. Innebörden av dessa torde direkt framgå av figuren och preciseras vid den fortsatta analysen av den kapillära stigningen i pelaren.

Som en första approximation till problemets matematiska belysning kunna vi antaga, att den drivande kraften är konstant och lika med h_c ,

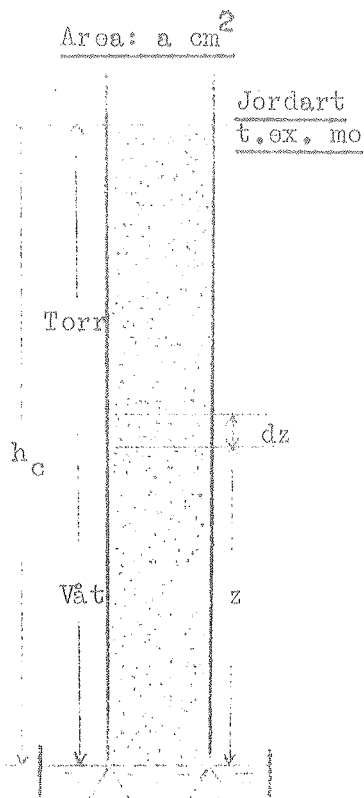


Fig. 3.15.

där h_c får beteckna den verksamma kapillariteten. Detta h_c är $\leq h_{c,max}$, som betecknar kapillariteten vid maximal krökning (jfr med 213!). För h_c gäller dessutom att $h_{c,1} \leq h_c \leq h_{c,3}$, där $h_{c,1}$ och $h_{c,3}$ beteckna tidigare definierade värden (se stycket 313!). Avvikelserna från $h_{c,max}$ kunna uppfattas som beroende av speciella befuktningssmotstånd eller att befuktningvinkeln β är > 0 .

Vi antaga vidare, att strömmingen omedelbart bakom meniskerna, vilka tillsammans bilda den s.k. vätfronten, följer Darcys lag (se Markf. unders. II!) eller

$$v_D = kI \quad (b)$$

där v_D är hastigheten enligt Darcy, k genomsläpplighetskoefficienten eller generellare i anslutning till angloame-

rikansk litteratur kapillär ledningsförmåga ("capillary conductivity" (se t.ex. Buckingham E. 1907!) och I den hydrauliska gradienten i strömriktningen (potentialgradienten).

I ovanstående ekvation måste k i detta fall liksom i andra fall uppfattas som en funktion av vattenhalten w i jorden, där strömningen sker, eller symboliskt

$$k = f(w) \tag{a}$$

där k = k_{max} för w = n, d.v.s. vid helt vattenfyllda porer får k sitt största och i allmänhet i strömningsläran avsedda värde. Tillsvidare kunna vi emellertid uppfatta den bakom våtfronten uppkommande vattenhalten som konstant (med z) och lika med w ≤ n. Detta innebär, att vi i anslutning till gjorda experiment (se Markf. unders. XII!) anse det som en regel, att en viss luftmängd blir kvar i jorden bakom våtfronten. Vi definiera härvid våtfronten som den makroskopiskt iakttagbara gränssyta, till vilken stigningen nått eller där vattenanrikning pågår (jfr med föreg.!).

I anslutning till fig ur 3.15 och där införda beteckningar och under beaktande av ovan anförda diskussion kunna vi nu uppställa nedanstående ekvationer

$$\begin{cases} dq = v_D \cdot a \cdot dt = k \frac{h_c - z}{z} a \cdot dt & (d) \\ dq = \frac{w}{100} a \cdot dz & (e) \end{cases}$$

Här betyder dq den vattelmängd, som under tiden dt passerar genom pelaren fram till skiktet dz, där vattenhalten således under samma tid växer från 0 (w_i) till w. Kombinerar ekvationerna (d) och (e), erhålles

$$k \frac{h_c - z}{z} dt = \frac{w}{100} dz \tag{f}$$

eller om variablerna separeras

$$dt = \frac{w}{100 k} \cdot \frac{z \cdot dz}{h_c - z} \tag{g}$$

Integrera!

$$t = \frac{w}{100 k} \int \left(-1 + \frac{h_c}{h_c - z} \right) dz = \frac{w}{100 k} \left[-z - h_c \ln(h_c - z) \right] + C \tag{h}$$

Vid experimentella undersökningar uppmätes z vid olika tidpunkter t. För t = 0 är z = 0, om tiden räknas från det ögonblick kontakt ävägabringas mellan pelarens bas och vattenytan. För bestämning av C erhålles härur ekvationen

$$0 = \frac{w}{100 k} \left[-0 - h_c \ln(h_c - 0) \right] + C \tag{i}$$

och således slutligen

$$t = \frac{w h_c}{100 k} \left(\ln \frac{h_c}{h_c - z} - \frac{z}{h_c} \right) \quad (3.12)$$

Denna ekvation finnes härledd under olika förutsättningar i skilda läro- och handböcker. Se t.ex. Zunker, F., 1930, Taylor, W., 1948, och Terzaghi, K., 1949!

Den här gjorda härledningen skiljer sig från de i denna litteratur förekommande deduktionerna huvudsakligen däri, att den drivande kraften h_c (eg. det drivande kapillärtrycket!), den uppkomna vattenhalten w och genomsläppligheten k icke så hårt blivit fixerat, d.v.s. det har blivit antytt, att de endast som en första approximation kunna för en given process betraktas som konstanta. Möjligheterna för en vidare tolkning av den härledda ekvationen (3.12) hållas därigenom öppna.

Om vi ur ekvationen (f) lösa $\frac{dz}{dt}$, erhålla vi våtfrontens hastighet v_c eller

$$v_c = \frac{dz}{dt} = \frac{100 k}{w} \cdot \frac{h_c - z}{z} \quad (3.13)$$

Genom jämförelse med ekvationen (d) i det inledningsvis uppställda ekvationssystemet erhålla vi även

$$v_c = \frac{100}{w} v_D = v_m \quad (3.14)$$

där v_m är den i porerna rådande verkliga medelhastigheten. Jämför här också med Markf. unders. II, sidan 32, ekvationen (7)!

Om i ekvationen (3.12) k i överensstämmelse med olika litteraturangivelser (se äv. Markf. unders. III!) som en första approximation antages bero av partikeldiametern d enligt formeln

$$k = c \cdot d^2 \quad (a)$$

och h_c enligt tidigare utredningar (ekv. 3.08) definieras av

$$h_c = \frac{a}{d} \quad (b)$$

så erhålles

$$t = \frac{w \cdot a}{100 c \cdot d^2} \left(\ln \frac{c}{a - dz} - \frac{d}{a} z \right) \quad (3.15)$$

I inledningen till detta stycke uppställde vi problemet att finna formen på det symboliskt tecknade funktionssambandet $z = f(t, w, h_c)$. Ekvationerna (3.12) och (3.15) representera lösningen till vårt problem. Vi ha emellertid icke fått z explicit utan istället t . Detta är ur vissa synpunkter en olägenhet. Att ur ekvationen (3.12) erhålla z explicit innebär dock lösandet av en besvärlig transcendent ekvation, varför vi nöja oss med den funna formen.

342. Diagram över funktionen $f(z, t, d) = 0$.

I detta avsnitt vilja vi nu något närmare undersöka de av ekvationen (3.15) definierade sambanden. Enligt ekvationen (3.10) gäller för renslammade fraktioner uttrycket ($a = 0.6$)

$$h_{c,4} = \frac{0,6}{d} \text{ cm}$$

varvid vi satt $\underline{h_c} = \underline{h_{c,4}}$. Enligt Markf. unders. III kunna vi sätta $c = 5$ eller

$$k = 5 d^2 \text{ cm/s}$$

Vi införa dessa uttryck i ekvationen (3.15) och erhålla för $\underline{w} = \underline{n} = 50 \%$

$$t = \frac{0,06}{d^3} \ln \frac{3}{3-5 d \cdot z} - \frac{z}{10 d^2} \quad (3.16)$$

Denna ekvation möjliggör teoretiska beräkningar av sambandet mellan partikeldiametrar, stighöjder, stighastigheter (= våtfrontens hastighet) och stigtider. Även om resultaten bliva mycket approximativa, ge de dock värdefulla halvkvantitativa upplysningar.

I ett tvåaxligt rätvinkligt koordinatsystem (Cartesienskt koordinatsystem) ger tydligen ekvationen (3.16) upphov till tre olika kurvfamiljer, allteftersom den ena eller den andra av variablerna betraktas som parameter. Följande översikt erhålles:

<u>Parameter</u>	<u>Variabel</u>		<u>Diagrammets namn</u>
	<u>Beroende</u>	<u>Oberoende</u>	
d	z	t	z-t-diagram
t	z	d	z-d-diagram
z	t	d	t-d-diagram

a. z-t-diagrammet ger oss de s.k. stighöjdskurvorna. Detta framställningssätt är det i litteraturen vanligast förekommande (se t.ex. Wollny, E., 1884, 1885!). Det erhålles som en naturlig och direkt framställning av de vid kapillära stigförsök uppmätta sammanhörande värdena över stighöjd z och stigtid t.

Om vi i ekvationen (3.16) t.ex. sätta $\underline{d} = 0,06 \text{ mm}$, d.v.s. vilja beräkna stigningsförloppet i det "enkorns-system" (jfr med Beskow, G. 1929!), som har \underline{d} = diametern för gränspartiklarna mellan grovmo och finmo, få vi

$$t = \frac{0,06}{d^3} \ln \frac{3}{3-5 d z} - \frac{z}{10 d^2} = 277778 \ln \frac{100}{100-z} - 2778 z \quad (a)$$

Tabell 3.02.

a	b	c	d	e	f	g	h	i
z	$\frac{100}{100-z}$	$\ln b$	$27778 \cdot xc$	$2778 \cdot z$	Tid t			
					sek.	min.	tim.	dygn
4	1,042	0,0412	11444	11112	332	5,5		
8	1,087	0,0834	23167	22224	943	15,7		
14	1,163	0,1511	41972	38892	3080	51,3		
25	1,333	0,2876	79889	69450	10439	-	2,9	
50	2,000	0,6931	192528	138900	53628	-	14,9	
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
99	100,0	4,6052	1279223	275022	1004201	-	278,9	11 d. 14,9 t.
100	∞	∞	∞	277800	∞	-	∞	∞

Den maximala stighöjden, d.v.s. den teoretiskt beräknade fundamentalpunkten $h_{c,2}$ blir 100 cm eller = 0,6/0,006 enligt formel 3.10. Jämför här också med tabell 3.01! Det tar emellertid oändligt lång tid att nå detta värde, då det drivande trycket går mot 0, när z går mot 100 cm (jfr även med ex. 3.20!). Efter c:a 11.6 dygn återstår dock endast 1 cm av den maximala stighöjden.

Vi genomföra nu liknande beräkningar för kornstorlekarna 2, 1, 0,5, ... 1/64 ($\approx 0,0156$), 1/128 ($\approx 0,00781$) mm. Observera, att dessa kornstorlekar bilda en geometrisk serie med kvoten 1/2! Dessa beräkningar tillåta oss att konstruera diagrammen på figurerna 3.16 och 3.17, varigenom en god överblick erhålles. På diagrammet figur 3.17 finnes också det ovan närmare genomräknade exemplet för $d = 0,06$ mm grafiskt avbildat (jfr med tab. 3.02!).

Diagrammen återge samma siffermaterial, men tidsskalan i diagrammet på figur 3.17 är sextio gånger större, d.v.s. en cm på tidsaxeln motsvarar där tio minuter istället för såsom på figur 3.16 tio timmar. Diagrammet på figur 3.17 möjliggör en noggrannare avbildning av det inledande skedet, då stighastigheterna för större d äro stora.

För de finare fraktionerna eller för små kornstorlekar bliva stigtiderna mycket långa. På institutionen (Agronomisk hydroteknik) utförda undersökningar (se Markf. unders. XII!) liksom äldre och yngre undersökningar av olika forskare i skilda länder visa också detta. Jämför även med exempel

Stighöjdskurvor
Sambandet mellan höjd och tid i olika fraktioner
z-t-kurvor

0 t 360 tim; 0 z 138 cm

öjd z

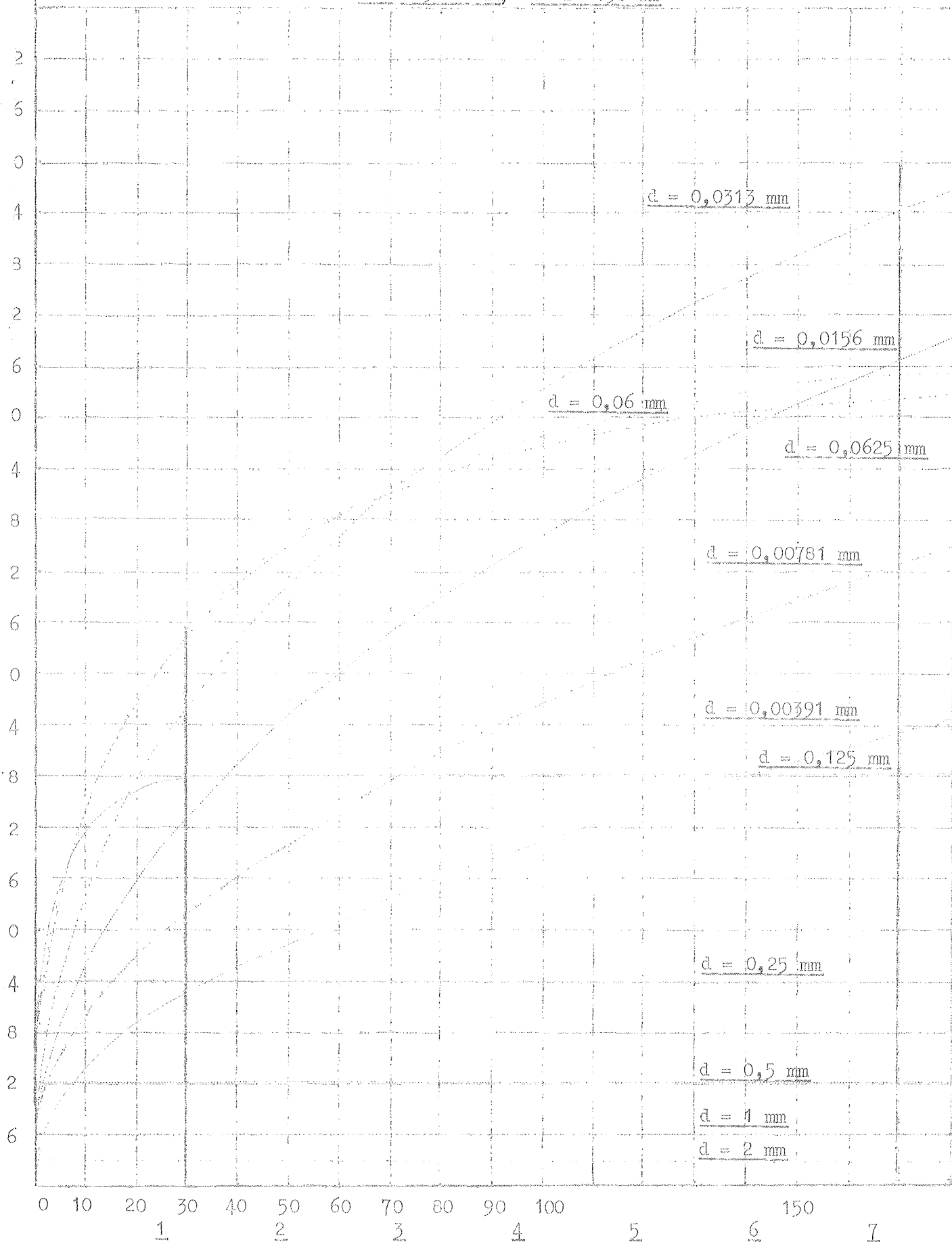


Fig. 3.16.

$d = \frac{1}{32} = 0,0313 \text{ mm}$

$h_c = 192 \text{ cm}$

$d = \frac{1}{64} = 0,0156 \text{ mm}$

$h_c = 384 \text{ cm}$

$d = \frac{1}{128} = 0,00781 \text{ mm}$

$h_c = 768 \text{ cm}$

$d = 0,06 \text{ mm}$

$d = \frac{1}{16} = 0,0625 \text{ mm}$

$h_c = 96 \text{ cm}$

$d = \frac{1}{256} = 0,00391 \text{ mm}$

$h_c = 1536 \text{ cm}$

$d = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ mm}$

$h_c = 48$

$d = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ mm}$

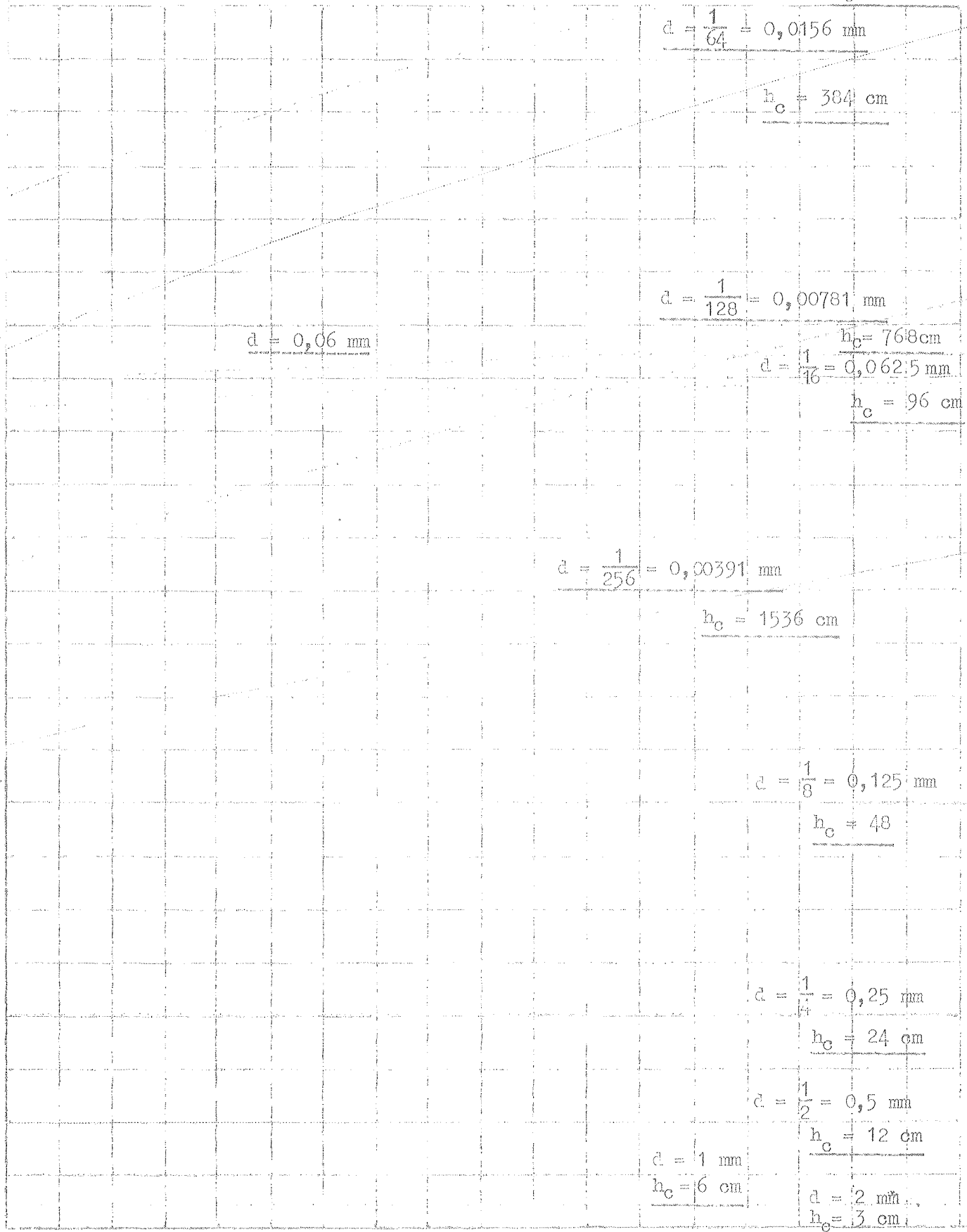
$h_c = 24 \text{ cm}$

$d = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ mm}$

$h_c = 12 \text{ cm}$

$d = 1 \text{ mm}$
 $h_c = 6 \text{ cm}$

$d = 2 \text{ mm}$
 $h_c = 3 \text{ cm}$



200

250

300

350

9

10

11

12

13

14

$\frac{\text{tim}}{\text{dyn}}$

15

Fig. 3.16.

Stighöjdskurvor

Sambandet mellan höjd och tid i olika fraktioner

z-t-kurvor

jd z

0 z 360 min; c z 46 cm

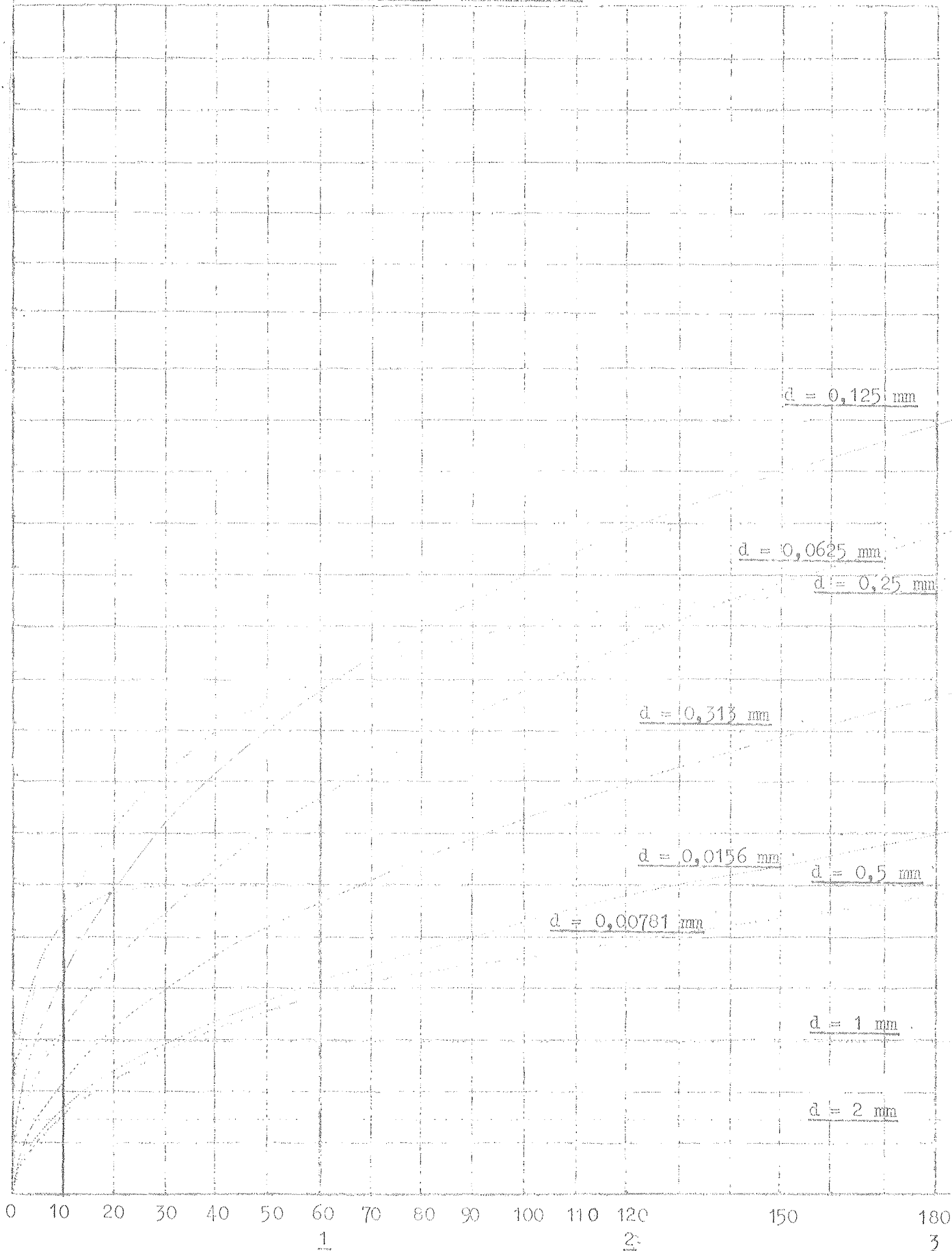


Fig. 3.17.

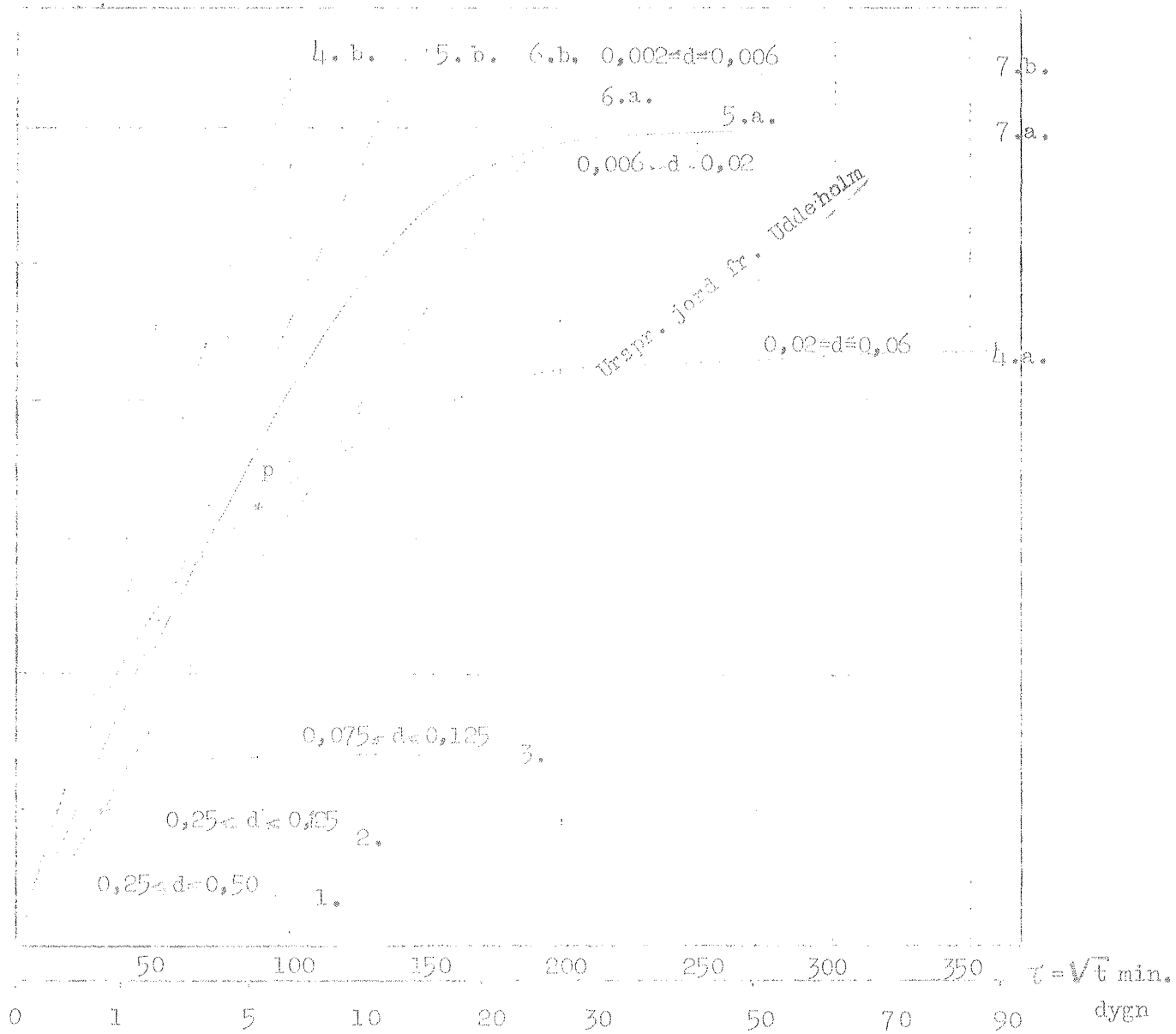


Fig. 3.18.

3.15! Vid grafiska avbildningar kan det därför ofta vara lämpligt att genom någon lämplig transformation av tidsskalan krympa den för dennas framställning nödvändiga axellängden. Av olika anledningar (jfr bl.a. med horisontell kapillärströmning stycket 35!) är härvid en rotskala lämplig, d.v.s.

$$\tau = \sqrt{t} \quad (a)$$

där τ är den i diagrammet direkt gällande variabeln (oberoende!). På diagrammet i figur 3.18 återges på detta sätt några egna experimentella resultat. Här finnas till de tre finaste fraktionerna även förloppet vid horisontell kapillär strömning återgivet. I ett på ovan angivet sätt graderat koordinatsystem blir den grafiska bilden av dessa förlopp olika räta linjer. Se härom också längre fram!

b. z-d-diagrammet ger oss den grafiska bilden av funktionen (3.16) när t betraktas som parameter.

Om vi i uttrycket (3.16)

$$t = \frac{0,06}{d^3} \ln \frac{3}{3,5 d \cdot z} - \frac{z}{10d^2}$$

ge olika värden åt t och beräkna ett antal sammanhörande z - och d -värden, kunna vi konstruera kurvorna i diagrammet på figur 3.19. Emellertid leder ett sådant förfaringssätt till uppkomsten av en serie transcendenta ekvationer, vilka vi endast medelst mödosam passning kunna lösa. Diagrammen på figurerna 3.16 och 3.17 kunna dock utnyttjas för en grafisk lösning av de uppkomna ekvationerna.

Vi sätta förslagsvis $t_1 = 10$ min., $t_2 = 60$ min., $t_3 = 180$ min., $t_4 = 360$ min., $t_5 = 30$ tim. och $t_6 = 170$ tim. = 7 dygn och 2 tim. Om vi nu i ovannämnda diagram söka skärningarna mellan de räta linjerna $t =$ konst. och z - t -kurvorna erhålla vi tydligen de sökta sammanhörande z - och d -värdena, d.v.s. de olika lösningarna. På diagrammen i figurerna 3.16 och 3.17 finnas dessa räta linjer inritade. De värden, som ligga till grund för konstruktionen av kurvorna på figur 3.19, ha erhållits genom avläsning av koordinaterna för uppkomna skärningspunkter.

Kurvorna utvisa ett synnerligen karakteristiskt förlopp. Maximum för uppnådd stighöjd z förskjutes för växande tider mot allt finare kornstorlekar. Varje kurva går asymptotiskt mot hyperbeln

$$z = \frac{0,6}{d}$$

som i överensstämmelse med gjorda antaganden anger den teoretiskt maximala stighöjden $z_{c,2,max}$.

$$z_{\max} = \frac{0,6}{d}$$

z-d-diagram

$$170 \text{ tim} = 7 \text{ dygn o. } 2 \text{ tim}$$

$$t = \frac{0,06}{d^3} \ln \frac{3}{3-5 dz} - \frac{z}{10 \cdot d^2}$$

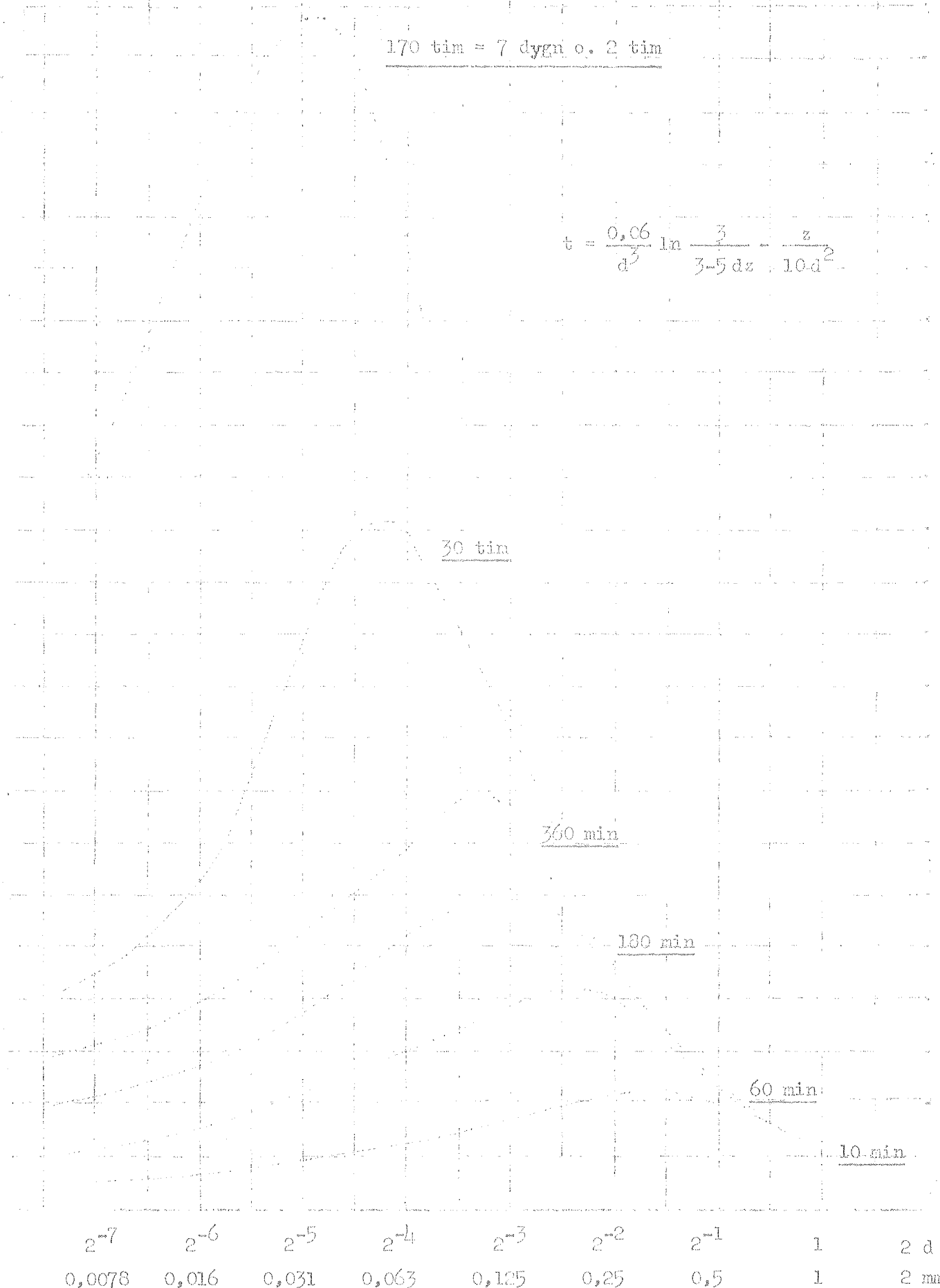


Fig. 3.19.

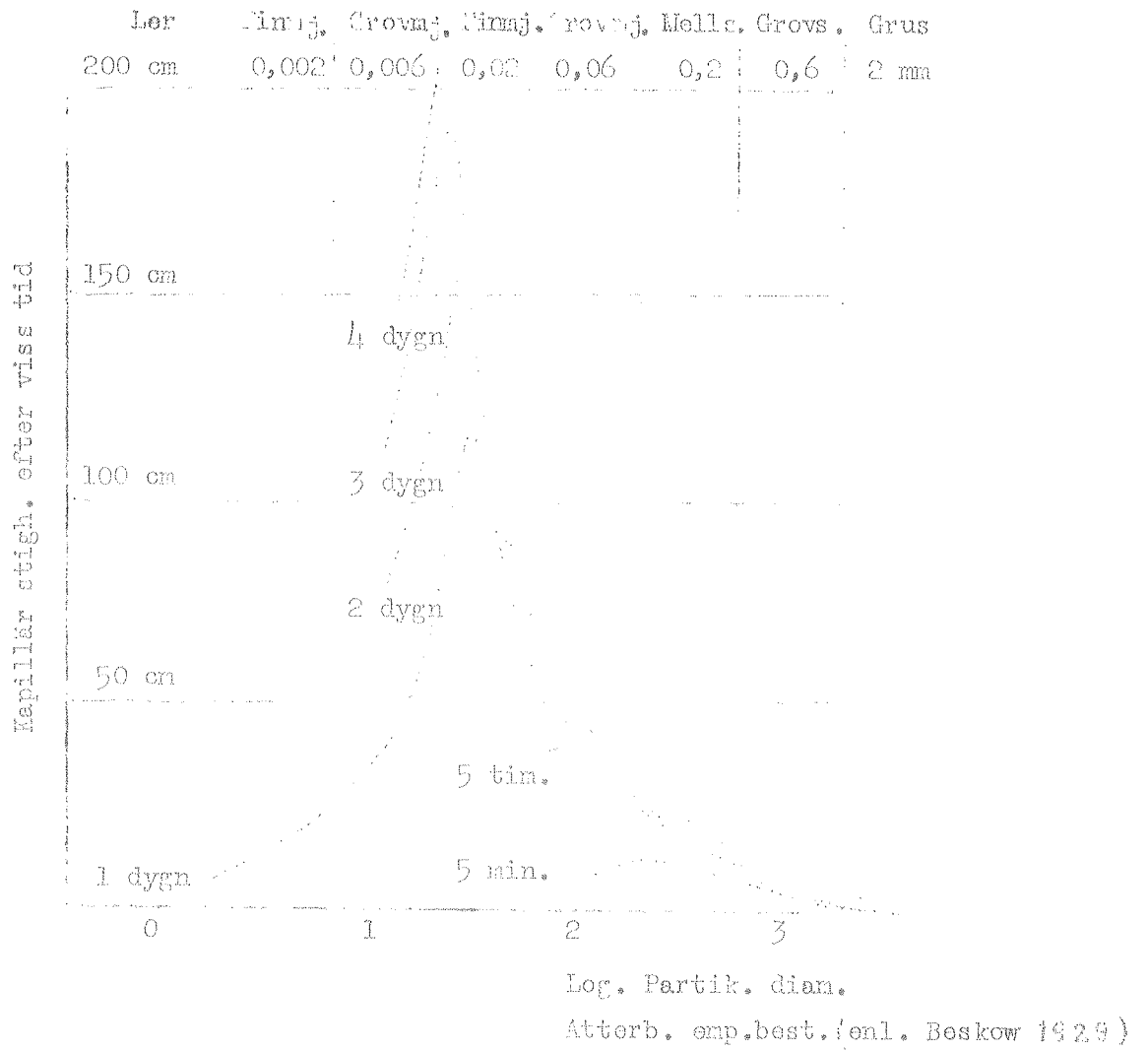


Fig. 3.20.

Vi ha genom denna enkla teoretiska deduktion erhållit en värdefull kvalitativ framställning och överblick av det kända experimentella förhållandet, att de kapillära fenomenen i området finno-grov-mjåla bli mest påtagliga och praktiskt mest betydelsefulla. Vid grövre jordarter äro de kapillära höjderna alltför små, för att de skola bli mera framträdande och av någon större betydelse. I jordarter, där leret blir dominerande, förlöpa de kapillära processerna så långsamt, att de endast kunna få betydelse inom relativt korta distanser. På figur 3.20 återges ett diagram, som uppritats av G. Beskow (1929) på grundval av A. Atterbergs bestämningar av stighöjder i renslammade fraktioner. Som synes är den kvalitativa överensstämmelsen mellan de två diagrammen god (fig. 3.19 och 3.20).

b. I t-d-diagrammen åskådliggöres sambandet mellan den tid det tar att uppnå en viss stighöjd z_1 för olika partikeldiametrar d . De för konstruktionen nödvändiga sammanhörande t-d-värdena kunna vi liksom vid konstruktionen av det föregående diagrammet erhålla ur diagrammen på figurerna 3.16 och 3.17. Detta sätt att framställa det av ekvationen 3.16 definierade sambandet har jag icke återfunnit i litteraturen. Några exempel på t-d-kurvor ha blivit uppriteade i diagrammet på figur 3.21. Jämför här också med exempel 3.21!

Vi ha därmed kortfattat behandlat några av de teoretiska frågeställningar, som höra samman med funktionen $f(z, t, d) = 0$. Om vi framställde detta samband i ett stereometriskt diagram med axlarna z , t och d ($\log d!$), skulle vi erhålla en yta, där skärningarna mellan denna yta och med koordinatplanen parallella plan skulle ge oss de diskuterade kurvorna. Vi kunna kalla denna yta z-t-d-ytan. Jämför med termodynamikens tillståndsdigram och -ytor!

343. Exempel.

Här följa nu några genomräknade exempel, vilka på olika sätt äro ägnade att ytterligare öka våra insikter på vissa punkter och antyda de otaliga problem, som här kunna formuleras och mer eller mindre utförligt analyseras med våra nu vunna kunskaper. Såsom redan tidigare angivits i stycket 13 utgör detta arbete ett försök att under enhetliga aspekter sammanföra synpunkter på och fakta ur jordarternas kapillaritet. Ett sådant företag blir emellertid alltid mer eller mindre bristfälligt. Väl valda samt noggrant formulerade och genomräknade exempel utgöra en annan väg att nå kunskap. Exempelen kunna betraktas som öar eller fasta punkter, kring vilka i övrigt allting synes flyta.

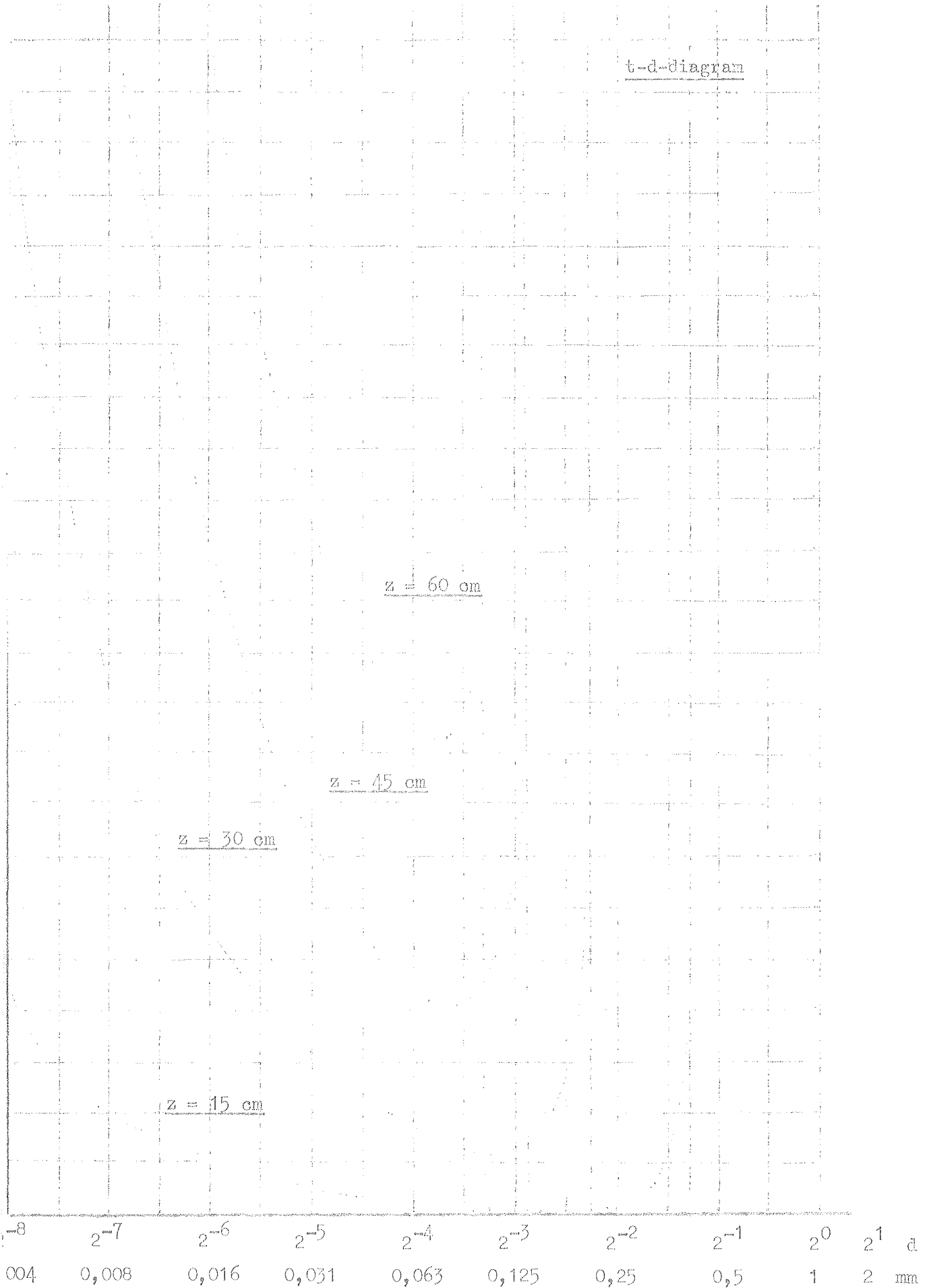


Fig. 3.21.

Ex. 3.15. Beräkna eller skatta, huru lång tid det tar för vatten att kapillärt stiga 2,5 m i grovmjåla!

Lösning: Här kunna vi enklast direkt utgå från det av ekvationen (3.16) givna sambandet (obs. $w = n = 50\%$!). Vi beräkna stigtiderna t_1 och t_2 för de system, som svara mot gränspartiklarna, vilka för grovmjåla äro $\underline{d_M} = 0,02$ mm och $\underline{d_m} = 0,006$ mm.

$$t_1 = \frac{0,06}{0,002^3} \ln \frac{3}{3-5 \cdot 0,002 \cdot 250} - \frac{250}{10 \cdot 0,002^2} \text{ sek} \quad (a)$$

$$t_2 = \frac{0,06}{0,0006^3} \ln \frac{3}{3-5 \cdot 0,0006 \cdot 250} - \frac{250}{10 \cdot 0,0006^2} \text{ sek} \quad (b)$$

$$t_1 = 1996 \text{ tim} = 83 \text{ dygn}$$

$$t_2 = 18984 \text{ tim} = 2,2 \text{ år}$$

Ex. 3.16. Visa att formeln (3.15) kan skrivas

$$t = \frac{w z^2}{100 c d a} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{a} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{dz}{a} \right)^{n-2} \right]$$

Observera att dz betyder d·z!

Bevis: Enligt matematiken gäller

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots - \frac{x^n}{n}$$

för $-1 \leq x < 1$

Vi skriva formel (3.15) sålunda

$$\begin{aligned} t &= \frac{w a}{100 c d^3} \left(\ln \frac{a}{a-dz} - \frac{dz}{a} \right) = \frac{w a}{100 c d^3} \left(\ln \frac{1}{1-\frac{dz}{a}} - \frac{dz}{a} \right) = \\ &= \frac{w a}{100 c d^3} \left[-\ln \left(1 - \frac{dz}{a} \right) - \frac{dz}{a} \right] = \frac{w a}{100 c d^3} \left\{ - \left[- \left(\frac{dz}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{a} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{a} \right)^3 - \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{n} \left(\frac{dz}{a} \right)^n \right] - \frac{dz}{a} \right\} = \frac{w a}{100 c d^3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{a} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{a} \right)^4 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{dz}{a} \right)^n \right] \\ t &= \frac{w \cdot z^2}{100 c d a} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{a} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{dz}{a} \right)^{n-2} \right] \end{aligned}$$

V.S.B.

Ann. Det är tydligt, att serieutvecklingen är tillåten, ty $z \leq \frac{a}{d}$, varför $\frac{dz}{a} \leq 1$ och således

$$0 < \frac{dz}{a} < 1$$

Ex. 3.17. Visa, att om de aktuella stighöjderna \underline{z} vid kapillära stigningsförsök i olika enkorssystem (rena fraktioner) skola utgöra en viss procent \underline{p} av den maximala teoretiska stighöjden $\underline{h}_{c,max}$, så förhålla sig de härför erforderliga tiderna \underline{t} som kuberna på inverterade värdet av partikeldiamentrarna \underline{d} !

Bevis: Enligt ekvationen (3.15) gäller, att

$$\underline{t} = \frac{w \cdot a}{100 c d^3} \left(\ln \frac{c}{a-dz} - \frac{d}{a} z \right) \quad (a)$$

med

$$\underline{h}_c = \frac{a}{d} \quad \text{och} \quad k = c d^2 \quad (b)$$

Antag nu i anslutning till det begärda beviset att

$$\underline{z} = \frac{\underline{p}}{100} \cdot \underline{h}_c = \frac{\underline{p} \cdot a}{100 d} \quad (c)$$

Vi införa detta uttryck på \underline{z} i ekvationen (a) och erhålla efter viss förenkling

$$\underline{t} = \frac{w \cdot a}{100 c d^3} \left(\ln \frac{1}{1-0,01 \cdot \underline{p}} - \frac{\underline{p}}{100} \right) \quad (d)$$

Låt \underline{d}_1 vara en korndiameter och \underline{d}_2 en annan, då gäller för förhållandet mellan motsvarande stigtider uttrycket ($w_1 = w_2$; $c = \text{konst.}$)

$$\frac{\underline{t}_1}{\underline{t}_2} = \frac{\underline{d}_2^3}{\underline{d}_1^3} \quad (e)$$

V.S.B.

Kommentarer. Om vi sätta $\underline{d}_1 =$ gränsen mellan grovmo och finmo, d.v.s. = 0,06 mm och $\underline{d}_2 =$ gränsen mellan grovmjåla och finmjåla, d.v.s. = 0,006 mm, blir $\underline{t}_1/\underline{t}_2 = 1000$. Detta innebär bl.a. att det tar 1000 ggr längre tid för vattnet att stiga 500 cm i enkorssystemet med $\underline{d} = 0,006$ mm än att stiga 50 cm i enkorssystemet med $\underline{d} = 0,06$ mm. Av ekvationen ovan följer också att

$$\frac{\underline{t}_1}{\underline{t}_2} = \left(\frac{\underline{h}_c^1}{\underline{h}_c^2} \right)^3 \quad (f)$$

där \underline{h}_c^1 och \underline{h}_c^2 äro de givna partikelsystemens kapillaritet, varvid \underline{h}_c^1 svarar mot \underline{d}_1 och \underline{h}_c^2 mot \underline{d}_2 . Visa detta!

Ex. 3.18. I diagrammet 3.18 uppmättes tangentens riktning i en viss punkt P. Om tangentens lutning är \underline{a} cm/ \underline{t} enhet, vad är då stighastigheten eller våtfrontens hastighet \underline{v}_c ? Numeriskt exempel: I punkten P med $\underline{t} = 90$ är $\underline{a} = 0,8$ cm/ \underline{t} enhet. Vad är \underline{v}_c ?

Lösning: Tangentens lutning i diagrammet definieras av gränsvärdet

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta \tau} \text{ för } \Delta \tau \rightarrow 0 \quad (\text{a})$$

Följaktligen gäller

$$v_c = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = a \cdot \frac{d\tau}{dt} \quad (\text{b})$$

Funktionsskolans ekvation är

$$\tau = \sqrt{t} \quad (\text{c})$$

som ger

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (\text{d})$$

och således

$$v_c = \frac{a}{2\sqrt{t}} = \frac{a}{2\tau} \quad (\text{e})$$

Det numeriska exemplet ger

$$v_c = \frac{0,8}{2 \cdot 90} \text{ cm/min} = \frac{0,8 \cdot 60}{2 \cdot 90} \text{ cm/tim} = 0,27 \text{ cm/tim} \quad (\text{f})$$

Uttryckt på ett annat sätt innebär detta, att vätfronten förflyttar sig 0,27 cm/tim, när densamma befinner sig 160 cm (jfr med diagr. på fig. 3.18!) över grundvattenytan eller den fria vattenytan och rör sig vertikalt uppåt i en från början torr jordpelare av finmo med $n = 39,5\%$. Observera att de här angivna numeriska värdena ha blivit avlästa i ett diagram uppritat på millimeterpapper! Diagrammet på figur 3.18 utgör en förminskning av detta.

Ex. 3.19. Bevisa sambandet

$$k h_c^2 = c a^2$$

och speciellt

$$k \cdot h_c^2 = 1,8$$

Bevis: Enligt tidigare angivna formler och samband gäller

$$k = c d^2 \quad (\text{a}) \quad \text{och} \quad h_c = a/d \quad (\text{b})$$

Genom kvadrering av (b) och viss omskrivning erhålles

$$d^2 = \frac{a^2}{h_c^2} \quad (\text{c})$$

Införes detta uttryck på d^2 i ekvationen (a), erhålles

$$k = \frac{c a^2}{h_c^2} \quad (\text{d})$$

eller

$$k h_c^2 = c a^2$$

Sätta vi här (se härledn. av ekv. (3.15)!) $\underline{c} = 5$ och $\underline{a} = 0,6$ blir

$$kh_c^2 = 1,8$$

Ex. 3.20. Bevisa att den kapillära stighastigheten \underline{v}_c avtar hyperboliskt med höjden över den fria vattenytan eller grundvattenytan!

Lösning: Enligt ekvationen (3.13) gäller

$$\underline{v}_c = \frac{dz}{dt} = \frac{100 k}{w} \cdot \frac{h_c - z}{z} = C \cdot \frac{h_c - z}{z} \quad (a)$$

Härav erhålles

$$\underline{v}_c \cdot z + C \cdot z = C \cdot h_c \quad (b)$$

eller

$$z(\underline{v}_c + 1) = C h_c \quad (c)$$

Parallellförflyttas här \underline{v}_c -axeln (ordinaten) i överensstämmelse med transformationen

$$\underline{v}_c' = \underline{v}_c + 1 \quad (d)$$

erhålles

$$z \cdot \underline{v}_c' = C h_c \quad (e)$$

som är formeln för en liksidig hyperbel (när koordinataxlar och asymptoter tillåtits sammanfalla!).

Ex. 3.21. Härled en ekvation, som visar, huru den kapillära stighastigheten (våtfrentens hastighet) \underline{v}_c beror av kornstorlek \underline{d} och avståndet till grundvattenytan \underline{z} ($= h_c$)! Använd den funna formeln för att bestämma den kornstorlek \underline{d} , för vilken \underline{v}_c har maximum, när $\underline{z} = h_c = 100$ cm!

Lösning: Enligt ekvationen 3.13 gäller

$$\underline{v}_c = \frac{100 k}{w} \cdot \frac{h_c - z}{z} \quad (a)$$

I anslutning till föregående utredningar sätta vi här

$$k = c d^2 \quad (b) \quad \text{och} \quad h_c = a/d \quad (c)$$

och erhålla

$$\underline{v}_c = \frac{100 c}{w} \left(\frac{ad}{z} - d^2 \right) \quad (d)$$

vilket uttryck tydligen är den begärda ekvationen.

Om vi här införa tidigare utnyttjade värden på \underline{c} och \underline{a} samt sätta $\underline{w} = \underline{n} = 50$ %, få vi

$$\underline{v}_c = 10 \left(\frac{0,6 d}{z} - d^2 \right) \quad (e)$$

För bestämning av $\underline{v}_{c,max}$ vid givet $\underline{z} = h_c$, erhålles

$$\frac{d v_c}{d d} = 10 \left(\frac{0,6}{z} - 2 d \right) = 0 \quad (f)$$

som ger

$$v_{c, \max} = \frac{0,9}{z^2} \quad (g) \quad \text{för} \quad d = \frac{0,3}{z} \quad (h)$$

För $z = 100$ cm erhålla vi härur $d = 0,003$ cm = 0,03 mm. Jämför med finno! Våtfrentens hastighet är då 0,32 cm/tin. Jämför här också med exempel 3.18!

Ex. 3.22. Härled det allmänna uttrycket för asymptoterna till kurvorna i diagrammet på figur 3.21!

Lösning: Tydligt gäller att asymptoterna utgöras av de räta linjer $d = \text{konst}$, för vilka gäller, att d är partikeldiametern för just den kornstorlek, vars maximala stighöjd är lika med det valda z -värdet. Av ekvationen (3.15) eller (3.16) framgår, att det tar oändligt lång tid att uppnå den maximala stighöjden. Den sökta partikeldiametern d är således bestämd av uttrycket

$$d = \frac{0,6}{z} \quad (a)$$

men detta är enligt det ovanstående även det allmänna uttrycket för asymptoterna.

Om vi skriva $d = 2^x$ och införa detta i uttrycket (a) samt logaritmera och lösa ut x , erhålla vi med d i mm

$$x = \frac{\log 6 - \log z}{\log 2} = \frac{77,82 - 100 \log z}{30,10} \quad (b)$$

som allmänt uttryck för asymptoternas ekvation, när x är den i diagrammet direkt gällande oberoende variabeln.

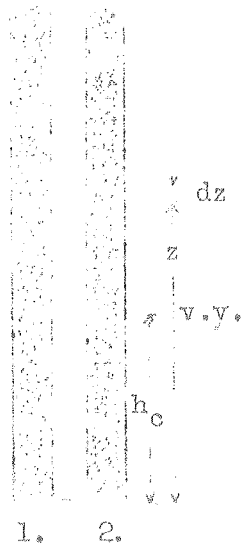
Numeriskt ex. Antag att z är = 15 cm (jfr med diagrammet!). Då gäller

$$x = \frac{77,82 - 100 \log 15}{30,10} = -1,33$$

Detta värde har utnyttjats vid konstruktionen av asymptoten längst ut till höger på diagrammet (fig. 3.21).

Ex. 3.23. Vid kapillära stigförsök brukar i allmänhet jordpelarens bas nedföras i vattnet endast några mm djupt (se 1. fig. 3.22!). Man erhåller då, som vi visat, formel (3.12). Om nu pelarens bas föres ned $\frac{h_0}{0}$ cm under vattenytan (se 2. fig. 3.22!), huru förändras då formel (3.12)?

Lösning: Vi utföra härledningarna eller ge lösningarna i anslutning till figur 3.22, där våtfrentens läge för pelaren 2. vid tiden t schematiskt blivit angiven.



1. 2.

Fig. 3.22.

Momentanekvationen för strömningen ögonblicket efter det våtfronten nått höjden z erhålles lätt. Den blir, om vattenhalten antages nå värdet w procent och rörarean betecknas med a

$$\frac{w}{100} dz \cdot a = k \frac{h_c + h_o - z}{z} \cdot a dt \quad (a)$$

Våtfrontens hastighet erhålles härav till

$$v_c = \frac{dz}{dt} = \frac{100k}{w} \cdot \frac{h_c + h_o - z}{z} \quad (b)$$

Denna ekvation integreras i analogi med den integration, som gav oss ekvationen (3.12). Lösningen blir

$$t = \frac{w(h_c + h_o)}{100k} \left(\ln \frac{h_c + h_o}{h_c + h_o - z} - \frac{z}{h_c + h_o} \right) \quad (c)$$

som för $h_o = 0$ ger oss ekvationen (3.12) och för $h_c = 0$ ger oss en fullständigt analog ekvation. Jämför detta med vad som längre fram säges om ekvationen 3.18!

35. Horisontell kapillär strömning.

Det av kapillariteten förorsakade undertrycket kan vid lämpliga försöksbetingelser fås att verka i rummets alla riktningar. Om en horisontellt utbredd bädd med viss tjocklek hålles vattenmättad i en punkt av sitt inre, kan man iakttaga, huru vattnet kapillärt breder ut sig i alla riktningar mer eller mindre tydligt påverkat av tyngdkraften alltefter bäddens (jordartens) högre eller lägre kapillaritet. Vi skola emellertid icke här omedelbart behandla detta intressanta och mera generellt formulerade problem utan fortsätta på den redan inslagna vägen att följa rörelseförloppet under enklast möjliga gräns — eller randvillkor, varvid vi skilja på 1. vertikal rörelse uppåt (redan behandlat i avdeln. 34.), 2. horisontell rörelse och 3. vertikal rörelse nedåt. Den horisontella rörelsen undersöka vi i två

etapper a. horisontell rörelse i liggande pelare med konstant tvärsnitt och b. horisontell rörelse över ett plan med konstant bäddtjocklek.

351. Horisontell kapillär strömning i liggande pelare med konstant tvärsnitt.

På figur 3.23 återges schematiskt den försöksanordning, som kan användas vid experimentella studier av den horisontella kapillära rörelsen (se också närmare Markf. unders. XII!). Det med en viss jordart packade röret A_0 överflödas i horisontellt läge med vatten. Vatten insuges då genom nätbotten vid A_1 , samtidigt som luft kan avgå genom röret A_2 . Den del av pelaren, som kapillärt mättats, blir mörkare, och våtfrontens rörelse kan lätt observeras. Den mättade pelarlängden x uppmättes vid olika tidpunkter t .

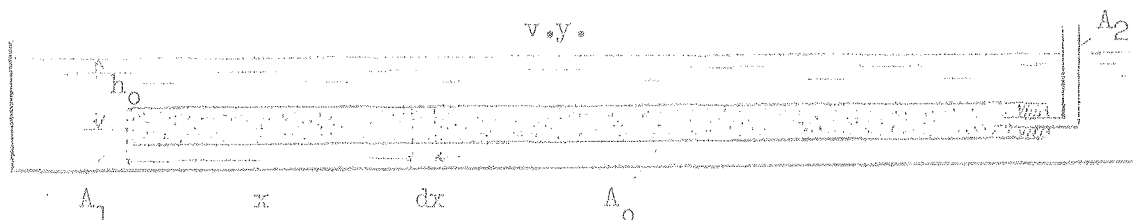


Fig. 3.23.

Centrum av röret antages ligga $\frac{h_0}{2}$ (längdenheter) under vattenytan ($v.y.$) och rörarean betecknas med a . Rördiametern bör ej vara för stor. Varför? Vid våra försök har den inre rördiametern varit 34 mm.

Vid tiden t antages vattnet ha mättat (S är dock som regel $< 100\%$!) sträckan x , och under det därpå följande tidsintervallet dt antas denna sträcka växa med dx . Om Darcys lag — såsom experimenten synas visa — gäller och vattenhalten blir w volymprocent, erhålles den lätt uppställda momentanekvationen (differentialekv.)

$$\frac{w}{100} \cdot a \, dx = k a \frac{h_0 + h_c}{x} dt \quad (a)$$

där k är den gällande permeabilitetskoefficienten. Jämför här dock med stycket 341!

Enligt denna ekvation är således våtfrontens hastighet bestämd av uttrycket

$$v_c = \frac{dx}{dt} = \frac{100 k}{w} \cdot \frac{h_0 + h_c}{x} \quad (3.17)$$

Av denna ekvation framgår, att våtfrontens hastighet v_c avtar hyperboliskt med den vätta pelarlängden. Såsom vi senare skola visa, avtar den

också hyperboliskt med kvadratroten ur t eller är omvänt proportionell mot kvadratroten ur t (se ex. 3.31!).

Separeras variablerna, kan differentialekvationen (3.17) lätt integreras. Vi erhålla

$$\frac{x^2}{2} + C = \frac{100 k (h_c + h_o)}{w} \cdot t \quad (b)$$

För $t = 0$ är $x = 0$ och således även integrationskonstanten $C = 0$.

Om vi, som naturligt är, betrakta x som beroende variabel och lösa ut x , d.v.s. framställa x som explicit funktion av t (jfr med ekv. (3.12) och (3.15)!, erhålles

$$x = \sqrt{\frac{200 k (h_c + h_o)}{w} \cdot \sqrt{t}} = C \sqrt{t} \quad (3.18)$$

Ekvationen (3.18) visar, att vid horisontell kapillär strömning genom en pelare med konstant tvärsnitt den vätta pelarlängden växer proportionellt med kvadratroten ur tiden t . Denna ekvation har experimentellt prövats av många olika forskare, varvid mer eller mindre god överensstämmelse erhållits. För en inledande diskussion härom hänvisas läsaren till Keen, B. (1931). Se också Taylor, D.W. (1948)! Våra egna undersökningar ha givit en god bekräftelse av ekvationen (se också härom närmare Markf. unders. XIII!).

Det kan vara värt att observera, att i ekvationen (3.18) h_c och h_o äro fullständigt ekvivalenta med avseende på sina verkningar. Detta betyder, att den av de krökta meniskerna förorsakade tensionen h_c icke principiellt i detta avseende skiljer sig från det hydrauliska övertrycket h_o . Det funna sambandet äger därför giltighet även om h_c skulle vara försumbart i förhållande till h_o , och således det drivande trycket vara rent hydrauliskt (hydrostatiskt).

Vid experimentella prövningar av denna ekvation kan protokollet föras enligt nedanstående uppställning tabell 3.03

Tabell 3.03.

Tid kl.	Tid s. el. min.	\sqrt{t}	x cm	$C = \frac{x}{\sqrt{t}}$	Anm.
-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-

Resultatet av ett av våra försök återges i tabellen 3.04 härunder

Tabell 3.04. Horisontell kapillär inströmning i liggande pelare. Fraktionen: $d_m = 0,02 \leq d \leq 0,06 = d_M$ (mm), finno. Försöket startat den 23.9.1954.

Tid	Tid min.	Pelare c l = 255 cm		Pelare d l = 253,5 cm	
		x cm	$\frac{x}{\sqrt{t}}$	x cm	$\frac{x}{\sqrt{t}}$
10 min.	10	8,5	2,69	9,0	2,85
35 "	35	18,0	3,04	18,0	3,04
60 "	60	23,5	3,03	23,5	3,03
120 "	120	34,5	3,15	34,5	3,15
5 tim.	300	55,0	3,18	56,0	3,23
7 "	420	66,0	3,22	68,5	3,34
24 "	1440	124,0	3,27	130,0	3,43
31 "	1860	142,0	3,29	149,0	3,45
48 "	2880	177,5	3,31	185,5	3,46
56 "	3360	191,5	3,30	201,5	3,48
74 "	4440	220,0	3,30	232,0	3,48
81 "	4860	230,0	3,30	242,0	3,47
96 "	5760	249,0	3,28	-	-

Värdena för $\underline{C} = \frac{x}{\sqrt{t}}$ äro tämligen jämna och konstanta. \underline{C} -värdena synas emellertid växa i början eller vara genomgående lägre för de mindre \underline{x} -värdena. Utan att här ingå på någon närmare analys av orsakerna härtill vilja vi endast påpeka, att vi vid härledningen av ekvationen (3.18) icke tagit hänsyn till luftens motstånd, när den av den framträngande våtfronten drives ut ur pelaren. Jämför med exemplen 3.28 och 3.29!

Ur tabellen erhålles som medeltal för pelare c $\underline{C} = 3,18$ och för pelare d $\underline{C} = 3,28$ eller för de två pelarna tillsammans $\underline{C} = 3,23$. På diagrammet 3.24 har den räta linjen

$$x = 3,23 \sqrt{t} = 3,23 \sqrt{t}$$

ritats in med \underline{x} som ordinata och \underline{t} som abscissa, varvid abscissan grade-rats i överensstämmelse med funktionsskalan

$$\underline{t} = \sqrt{t}$$

På diagrammet har också på analogt sätt en del andra av våra experimentella bestämningar över horisontell kapillär inströmning ritats in.

Linjernas lutning ökar regelbundet med växande kornstorlekar.

Vi införa nu i överensstämmelse med tidigare angivelser uttrycken på \underline{k} och \underline{h}_c samt sätta $\underline{w} = \underline{n} = 50\%$ i ekvationen (3.18) och erhålla

$$c^2 = \frac{200 \cdot 5 d^2 \left(\frac{0,6}{d} + h_o \right)}{50} \quad (a)$$

eller

$$x = d \sqrt{20 h_o + \frac{12}{d}} \cdot \sqrt{t} \quad (3.19)$$

I denna ekvation skola ingående storheter angivas i c-g-s-enheter. Om i anslutning till diagrammet på figur 3.24 \underline{t} tänkes uppmätt eller an-
given i minuter, erhålles

$$x = d \sqrt{20 h_o + \frac{12}{d}} \cdot \sqrt{60 t} \quad (3.19')$$

Denna ekvation tillåter oss att upprätta nedanstående tabell 3.05 över sammanhörande \underline{d} - och \underline{c} -värden. \underline{h}_o sättes i anslutning till våra egna försök (se Märkf. unders. XIII!) = 5 cm.

Tabell 3.05.

\underline{d} i mm	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
100 · \underline{d} i cm	20	10	5,0	2,5	1,25	0,63	0,31	0,16	0,08
\underline{c}	19,6	11,5	7,14	4,67	3,15	2,18	1,48	1,07	0,75

Överensstämmelsen mellan \underline{c} i denna tabell och de experimentella värden, som återges i diagrammet på figur 3.24 är i betraktande av osäkerheten i värdena för \underline{k} och \underline{h}_c tämligen god.

En jämförelse mellan de teoretiska värdena ovan och diagrammets värden kan också göras så att vi med utgångspunkt från (3.19') beräkna den partikeldiameter, "effektiv partikeldiameter", som fordras för att erhålla ett visst \underline{c} -värde. I diagrammet är \underline{c} -värdet för fraktionen $0,02 \leq \underline{d} \leq 0,06$ mm 2,72. Härur erhålles ekvationen (obs! $h_o = 5$)

$$d \sqrt{100 + \frac{12}{d}} \cdot \sqrt{60} = 2,72 \quad (a)$$

eller

$$d^2 + 0,12 d - 0,00123 = 0 \quad (b)$$

$$d = 0,009 \text{ cm} = 0,09 \text{ mm} \quad (c)$$

Observera, att den funna "effektiva diametern" enligt denna uträkning är större än den betraktade fraktionens \underline{d}_M , som är lika med 0,06 mm!

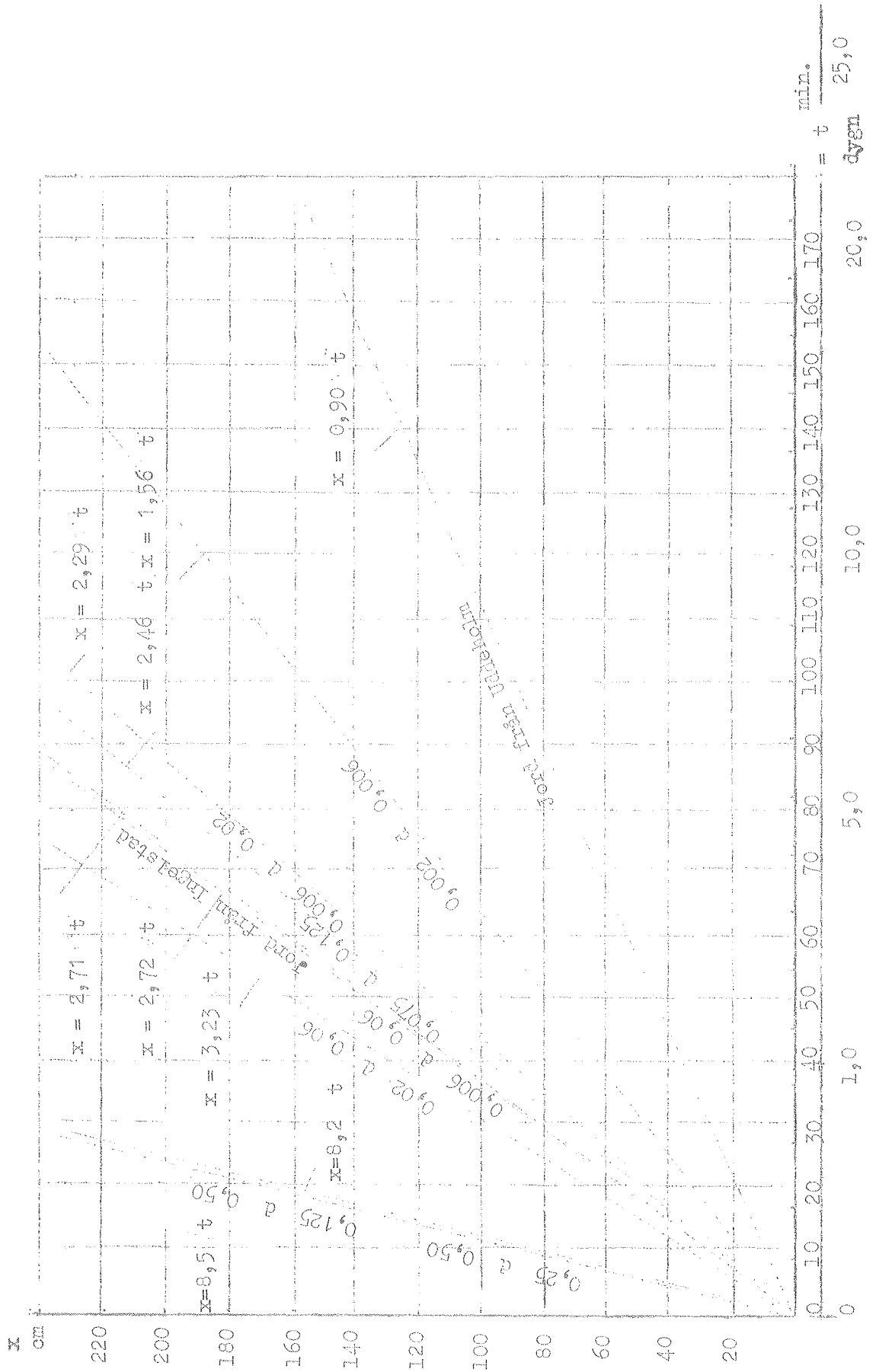


Fig. 3.24.

352. Några exempel.

Här följ nu några genomräknade exempel, vilka äro formulerade med tanke på att i vissa avseenden fullständiga det i föregående avdelning genomgångna men också att antyda de utvidgade frågeställningar, som här osökt överallt skymta fram.

Ex. 3.24. Vilken dimension har C i ekvationen (3.18)?

Lösning: Med gängse beteckningar (se Andersson, S., Komp. i elem. Hydromekanik 1952!) erhålles

$$[C] = \sqrt{\frac{200 k (h_c + h_o)}{w}} = \frac{1 \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot T^{-\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{3}}}{1} = LT^{-\frac{1}{2}} \quad (a)$$

Observera, att detta betyder att, om t.ex. C' är beräknat med hjälp av sorterne meter och timma men man vill ha C'' i centimeter och sekund, man då omedelbart får relationen

$$C'' = \frac{100}{\sqrt{3600}} C' = \frac{5}{3} C' \quad (b)$$

Ex. 3.25. Beräkna det C -värde, som svarar mot $d = 0,5$ mm, om $h_o = 5$ cm och t mätes i minuter.

Lösning: Alla mått överföras i c-g-s-enheter.

$$x = d \sqrt{20 h_o + \frac{12}{d} \cdot \sqrt{60 t}} = d \sqrt{1200 h_o + \frac{720}{d} \cdot \sqrt{t}}$$

$$C = 0,05 \sqrt{60 + 14200} = 7,14$$

Ex. 3.26. Visa, att den väta pelarlängden vid vertikal kapillär stigning och vid horisontell kapillär strömning blir lika stor under relativt långa tider, om h_o är stort.

Lösning: Enligt exempel 3.16 gäller föt t vid kapillära stigförsök

$$t = \frac{w \cdot z^2}{100 c d a} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{a} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{dz}{a} \right)^{n-2} \right] \quad (a)$$

där z är den väta längden, stighöjden.

Enligt ekvationen (3.18) gäller för den horisontelle kapillära strömningen, om $h_o = 0$

$$x = \sqrt{\frac{200 k h_c}{w}} \cdot \sqrt{t} \quad (b)$$

som ger

$$t = \frac{w x^2}{200 k h_c} \quad (c)$$

eller med

$$k = c d^2 \quad \text{och} \quad h_c = a/d \quad (d)$$

$$t = \frac{w x^2}{200 c d a} \quad (e)$$

Om nu d är ett litet tal, vilket innebär att h_c är stort, och $a \approx 0,6$, så är dz/a ett litet tal för relativt små värden på z . Termerna i serieutvecklingen (a) kunna då försummas från och med termen dz/a och vi erhålla approximativt

$$t = \frac{w z^2}{200 c d a} \quad (f)$$

varav synes att $z = \underline{x}$

V.S.B.

Ex. 3.27. Beräkna i anslutning till föregående exempel och med utnyttjande av serieutvecklingen (a) den tid det tar för vattnet att kapillärt stiga 8 cm i den korniga massa, som har $d = 0,06$ mm. Jämför sedan med diagrammet på figur 3.16! $w = 50 \%$.

Lösning: Vi uppskriva givna data; $w = 50 \%$, $c = 5 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $d = 0,006$ cm, $a = 0,6 \text{ cm}^2$ och $z = 8$ cm.

Vi hålla tillsvidare z obestämt och erhålla den till exemplet specialiserade serien

$$t = \frac{z^2}{36} \cdot 10^3 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{100} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{100} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{100} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{100} \right)^{n-2} \right] \quad (a)$$

Om vi i denna serie insätta $z = 8$ och medtaga fem termer få vi $t = 939,3$ s. Detta värde skiljer sig från det i tabellen 3.02 angivna med icke fullt fyra enheter. Överensstämmelsen är således god.

Ex. 3.28. I kommentarerna till tabell 3.04 har påpekats, att vi vid härledningen av ekvationen 3.18 icke tagit hänsyn till motståndet hos den luftpelare, som drives ut ur jordpelaren samtidigt med att vattnet kapillärt suges in.

Jämför mot bakgrunden av detta större problem förhållandet mellan strömningsmotståndet i två identiskt lika jordpelare, av vilka den ena genomströmmas av luft och den andra av vatten. Hastigheten antages vara densamma i bägge fallen, och luftens stora sammantryckbarhet antages kunna försummas.

Lösning: Enligt Markf. unders. II gäller generellt

$$v = \frac{K}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{l} \quad (a)$$

Vi indicera de storheter som hänföra sig till luft med l och till vatten med v . Då gäller

$$v_1 = \frac{K}{\mu_1} \cdot \frac{\Delta P_1}{l} \quad (\text{b}) \quad \text{samt} \quad v_v = \frac{K}{\mu_v} \cdot \frac{\Delta P_v}{l} \quad (\text{c})$$

Enligt förutsättningarna äro $v_1 = v_v$. Härur erhålles

$$\frac{K}{\mu_1} \cdot \frac{\Delta P_1}{l} = \frac{K}{\mu_v} \cdot \frac{\Delta P_v}{l} \quad (\text{d})$$

som ger

$$\Delta P_1 = \frac{\mu_1}{\mu_v} \cdot \Delta P_v \quad (\text{e})$$

Enligt Handb. of Ch. & Ph. 13. uppl. 1946 är vid 20°C $\mu_1 = 0,000180$ poise och $\mu_v = 0,0101$ poise. Insättas dessa värden i ekvationen (e), erhålles

$$\Delta P_1 = 0,018 \Delta P_v \quad (\text{f})$$

Sättes i ekvationerna (b) och (c) $\Delta P_1 = \Delta P_v$, erhållas de ekvivalenta pelarlängderna l

$$l_v = \frac{\mu_1}{\mu_v} l_1 \quad (\text{g})$$

eller med insatta siffervärden

$$l_v = 0,018 l_1 \quad (\text{h})$$

Ex. 3.29. Härled ekvationen (3.18) under hänsynstagande till den vid luftens strömning uppkommande tryckförlusten! Utnyttja härvid de i föregående exempel 3.28 funna sambanden (g) och (h).

Lösning: Vi ansluta vår härledning till figuren 3.23 och utnyttja där införda beteckningar.

När våtfronten tillryggalagt sträckan x , är den luftfyllda pelarlängden $l-x$. Dennes motstånd omräknad i ekvivalent pelarlängd av strömmande vatten är enligt relationen (g) exempel 3.28.

$$l_v = \frac{\mu_1}{\mu_v} l_1 = f \cdot (l-x) \quad (\text{a})$$

Den sammanlagda ekvivalenta pelarlängden strömmande vatten är då $x + f(l-x) = (1-f)x + fl$ (b). Differentialekvationen (a) för horisontell kapillär strömning blir då

$$\frac{w}{100} a dx = k a \frac{h_c + h_o}{(1-f)x + fl} dt \quad (\text{c})$$

Vi separera variablerna och integrera!

$$\int [(1-f)x + fl] dx = \frac{100 k (h_c + h_o)}{w} dt \quad (\text{d})$$

$$(1-f)x^2 + 2flx = \frac{200k(h_c + h_o)}{w} \cdot t + C \quad (e)$$

För $t = 0$ är $x = 0$ och således $C = 0$. Efter några enkla omskrivningar erhålles

$$x = -\frac{fl}{1-f} + \sqrt{\frac{200k(h_o + h_c)}{(1-f)w} t + \left(\frac{fl}{1-f}\right)^2} \quad (f)$$

Om luftens motstånd försummas är $f = 0$ och ekvationen (f) reduceras till ekvationen (3.18). Den mot konstanten C i ekvationen (3.18) svarande konstanten C' får nu formen

$$C' = \sqrt{\frac{(1-f)x^2 + 2flx}{t}} = C \sqrt{(1-f) + \frac{2fl}{x}} \quad (g)$$

Ex. 3.30. Undersök, om de i tabell 3.04 införda värdena på kvoterna x/\sqrt{t} kunna förbättras, d.v.s. om de, med hjälp av det i föregående exempel funna uttrycket (g), ännu bättre kunna fås att bekräfta de vid härledningarna gjorda antagandena.

Lösning: Vi införa i uttrycket för sambandet mellan C' och C gällande siffervärden. Tydligen är enligt exempel 3.28 $f = 0,018$ (experimenten ha utförts vid rumstemperatur c:a $+20^\circ\text{C}$). De aktuella pelarlängderna äro enligt tabellen 255 cm och 253,5 cm och vi sätta $l = 255$ cm. Då erhålles

$$C' = C \sqrt{(1-0,018) + \frac{2 \cdot 0,018 \cdot 255}{x}} \quad (a)$$

$$C' = C \sqrt{0,982 + \frac{9,18}{x}} \quad (b)$$

Med hjälp av detta uttryck och tabellen 3.04 kunna vi uträkna och sammanställa nedanstående tabell 3.05. I tabellen har rotuttrycket i formel (b) betecknats med a. Således $C' = a \cdot C$.

Vi göra icke här några närmare kommentarer till det resultat, som vi uppnått medelst denna korrektion av C-värdena utan hänvisa till Markf. undersökn. XIII (i manus). Emellertid vilja vi påpeka, att en störning av något slag uppträdde i pelaren c, när våtfronten nådde x -värdet 55 cm. Se med stjärna markerat C' -värde i tabellen! I övrigt ha C' -värdena särskilt för pelaren d uppnått en med hänsyn till försökstekniken synnerligen god konstans. Analyserade på detta sätt ge alltså våra experiment ett starkt stöd åt riktigheten av de antaganden, som ligga bakom uppställandet av differentialekvationen (3.17) och motsvarande differentialekvation (c) i exempel 3.29.

Ex. 3.31. Bevisa den i anslutning till härledningen av ekvation (3.17) gjorda kommentaren: "Såsom vi senare skola visa, avtar den också

Tabell 3.05.

Pelare c				Pelare d			
x cm	$C = \frac{x}{t}$	a	C'	x cm	$C = \frac{x}{t}$	a	C'
8,5	2,69	1,436	(3,86)	9,0	2,85	1,414	(4,03)
18,0	3,04	1,221	(3,71)	18,0	3,04	1,221	(3,71)
23,5	3,03	1,172	3,55	23,5	3,03	1,172	3,55
34,5	3,15	1,117	3,52	34,5	3,15	1,117	3,52
55,0	3,18	1,072	3,41	56,0	3,23	1,071	3,46
66,0	3,22	1,059	3,41	68,5	3,34	1,056	3,53
124,0	3,27	1,027	3,36	130,0	3,43	1,026	3,52
142,0	3,29	1,023	3,37	149,0	3,45	1,022	3,53
177,5	3,31	1,017	3,37	185,5	3,46	1,015	3,51
191,5	3,30	1,015	3,35	201,5	3,48	1,014	3,53
220,0	3,30	1,012	3,34	232,0	3,48	1,011	3,52
230,0	3,30	1,011	3,34	242,0	3,47	1,010	3,50
249,0	3,28	1,010	(3,31)	-	-	-	-

hyperboliskt med kvadratroten ur t eller är omvänt proportionell mot kvadratroten ur t ." "Den" syftar här på våtfrontens hastighet v_c vid horisontell kapillär strömning i en liggande pelare.

Bevis: Enligt (3.17) gäller för v_c ekvationen

$$v_c = \frac{100 k}{w} \cdot \frac{h_c + h_0}{x} \quad (a)$$

och enligt ekvationen (3.18) gäller

$$x = C \sqrt{t} \quad (b)$$

varav följer

$$v_c = \frac{100 k (h_c + h_0)}{C w \sqrt{t}} = \frac{C'}{\sqrt{t}} \quad (c)$$

och således det i kommentaren antydda beviset är genomfört.

353. Horisontell kapillär rörelse över ett plan med konstant bäddtjocklek.

I närmast föregående avdelningar ha vi behandlat teorien för vattnets kapillära strömning i en horisontellt liggande rät cirkulär cylindrisk pelare av kornigt material eller av en lös massa. De härvid funna

sambanden och relationerna gälla helt naturligt oberoende av formen på basytan (jfr med härledningarna!). Basytans maximala utsträckning i vertikal riktning bör emellertid vara förhållandevis liten. Däremot är dess utsträckning i horisontell riktning ur teoretisk synpunkt oväsentlig. De experimentella svårigheterna tilltaga dock med basytans tillväxt i horisontell riktning. Så t.ex. öka svårigheterna att vid packningen uppnå homogenitet och isotropi.

Om vi tänka oss pelarens basyta ha en långsträckt rektangulär form (t.ex. 4 cm hög och 100 cm lång) få vi det fall, som vi kunna kalla kapillär rörelse eller strömning över ett brett plan med lineär våtfront. Detta fall innefattas således i och beskrives av ekvationerna i styckena 351 och 352. Annorlunda gestalta sig förhållandena, om vi tänka oss vattnet tillfört endast i en punkt eller om vi tänka oss bädden hållas mättad i något mindre cirkulärt område. Om detta område ligger centralt i bädden t.ex. dess mitt, kommer vattnet att kapillärt breda ut sig i planets alla riktningar, d.v.s. radiellt. Vi kunna kalla denna rörelse eller strömning för radiell kapillär strömning över ett horisontellt plan. De vid denna strömning gällande relationerna och sambanden inneslutas således icke i våra tidigare funna ekvationer. I det följande avsnittet behandla vi nu denna strömning som ett större mera utförligt genomräknat och analyserat exempel eller problem.

354. Radiell kapillär strömning över ett horisontellt plan.

Emellan två apermeabla plan med stor utsträckning är en jordart i enkelkornstruktur utbredd och packad. Jordartens begynnelse- eller initialvattenhalt betecknas i överensstämmelse med det föregående med w_1 och sättes för enkelhetens skull = 0. Packningen är möjligast likformig i alla riktningar, d.v.s. statistiskt homogen. Det av jordart, lagring (struktur) och packning bestämde systemet kan därför anses vara horisontellt isotropt. Avståndet mellan de apermeabla planen är D (cm), vilket då också blir jordlagrets tjocklek. I en viss punkt av detta system anbringas en källa, d.v.s. jorden hålles där mättad ($S = 100$). Se också figur 3.25!

Källans väggar kan t.ex. bestå av ett cirkulär cylindriskt format nät. Nätets (källans) radie antages vara r (cm). Vattenståndet eller den fria vattenytan i källan tänkes stå h_0 (cm) över det imaginära horisontella plan, som halverar avståndet D . Detta tillstånd kan lätt uppnås därigenom, att källan (se fig.!) står i förbindelse med en höj- och

sänkbar behållare för vatten. Vår uppgift är att studera den kapillära strömning, som måste uppkomma i detta system.

Vi upprita den schematiska bild, som finnes återgiven på figur 3.25. a och b äro de givna apermeabla planen. Systemet är avbildat vid tidpunkten \underline{t} efter strömningens början. De i figuren införda beteckningarnas innebörd torde — i den mån de icke omedelbart framgå av bilden — bli klara, alltefter som vi utreda den förelagda uppgiften.

Vi göra oss först en allmän bild av strömningen genom att införa lämpliga symboliska funktionsbeteckningar mellan ingående och experimentellt uppmätbara storheter. Det är tydligt, att den från källan insugna vattenmängden per tidsenhet \underline{q} (cm^3/s) måste vara en funktion av tiden \underline{t} eller \underline{x} , som är det radiella avståndet mellan källans centrum och våtfronten. Således

$$\underline{q} = f_1(\underline{t}) \quad (\text{a})$$

Vi kunna dessutom a priori säga, att denna funktion måste vara monotont avtagande, enär den radiella strömningsvägen $\underline{x-r}$ växer men tryckförlusten är konstant $\underline{h} = \underline{h}_c + \underline{h}_o \cdot \underline{h}_c$ betecknar härvid i överensstämmelse med föregående utredningar den i systemet verkande kapillariteten och \underline{h}_o medelvärdet av det rådande hydrauliska övertrycket. Jämför också med förutsättningarna och figuren!

Den observerbara radiella utbredningen av våtfronten måste likaså vara en funktion av tiden \underline{t} d.v.s.

$$\underline{x} = f_2(\underline{t}) \quad (\text{b})$$

med villkoret $\underline{x} \geq \underline{r}$.

För Darcyhastigheten \underline{v}_D (cm/s) (jämför här också med avdelning 341!) måste vid en godtycklig tidpunkt \underline{t} sekunder efter strömningens början och i en likaså godtycklig punkt $\underline{\xi}$ bakom våtfronten gälla

$$\underline{v}_D = f_3(\underline{t}, \underline{\xi}) \quad (\text{c})$$

där $\underline{\xi}$ är avståndet från centrum, varvid för funktionen (c) tydligen då definitionsintervallet

$$\underline{r} \leq \underline{\xi} \leq \underline{x}$$

gäller.

Våtfrontens hastighet \underline{v}_c (cm/s) måste även vara en funktion av tiden \underline{t} (el. \underline{x}) d.v.s.

$$\underline{v}_c = \frac{d\underline{x}}{d\underline{t}} = f_4(\underline{t}) \quad (\text{d})$$

Den vid varje tidpunkt och för varje $\underline{\xi}$ rådande gradienten \underline{I} (cm

v. p./cm) måste vara en funktion av våtfrontens aktuella läge eller radiella avstånd \underline{x} och av $\underline{\xi}$. Således

$$I = f_5(x, \xi) \quad (e)$$

De fem symboliskt tecknade funktionerna (a) till (e) ha vi således jämförelsevis lätt kunnat teckna, endast därigenom att vi helt allmänt infört beteckningar på de variabler, som omedelbart visa sig vara nödvändiga för beskrivningen av strömningsförloppet. Någon eftertanke ger oss sedan de uppställda funktionerna såsom enkla och direkta uttryck för deras inbördes beroende. Vi söka nu de analytiska uttrycken för dessa funktioner.

Vi undersöka den momentana strömningen vid en godtycklig tidpunkt \underline{t} , d. v. s. för $\underline{t} = \text{konst}$. Då måste i anslutning till figuren tydligen gälla

$$\begin{cases} q = v_D \cdot 2\pi\xi \cdot D & \text{Kontinuitetsekv. (f)} \\ v_D = k \frac{dh}{d\xi} & \text{Darcys lag (g)} \end{cases}$$

Härav erhålles

$$q = 2\pi k D \cdot \xi \frac{dh}{d\xi} \quad (h)$$

eller

$$\frac{2\pi k D}{q} dh = \frac{d\xi}{\xi} \quad (i)$$

Vi integrera och beakta att $h = h_o + h_c$ (se det föreg.!)

$$\frac{2\pi k D}{q} (h_o + h_c) = \int_r^x \frac{1}{\xi} d\xi = \ln \frac{x}{r} \quad (j)$$

d. v. s.

$$q = f(x) = \frac{2\pi k D (h_c + h_o)}{\ln x - \ln r} \quad (3.20)$$

Uttrycket (3.20) ger oss alltså den per tidsenhet insugna vattensmängden som funktion av våtfrontens läge eller radiella utbredning.

Under tiden \underline{dt} måste då tydligen mängden \underline{dQ} insugas eller

$$dQ = q dt \quad (a)$$

Om under tiden \underline{dt} våtfronten utbreder sig sträckan \underline{dx} , måste också för mängden \underline{dQ} gälla

$$dQ = \frac{w}{100} \cdot 2\pi x D \cdot dx \quad (b)$$

där \underline{w} är den vattenhalt systemet uppnår. Härvid gäller dessutom att $\underline{w} \leq \underline{n}$, som är systemets porositet.

Kombineras ekvationerna (a) och (b) och insättes uttrycket för \underline{q} enligt ekvationen (3.20), erhålles

$$\frac{w}{100} \cdot 2\pi x D \cdot dx = \frac{2\pi k D (h_c + h_o)}{\ln x - \ln r} dt \quad (c)$$

Härav fås efter viss förenkling

$$v_c = \frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{100 k (h_c + h_o)}{w x (\ln x - \ln r)} \quad (3.21)$$

Om variablerna separeras, kan ekvationen (3.21) skrivas

$$dt = \frac{w}{100 k (h_c + h_o)} (x \ln x - x \ln r) dx \quad (d)$$

Integreras ekvationen (d) erhålles

$$t = f(x) = C \left[\int_x^x x \ln x dx - \int_r^x x \ln r dx \right] \quad (e)$$

eller

$$t = f(x) = \frac{w}{200 k (h_c + h_o)} \left[x^2 \ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (x^2 - r^2) \right] \quad (3.22)$$

Denna ekvation motsvarar de tidigare härledda ekvationerna 3.16 och 3.18.

Gradienten I i en godtycklig punkt bakom våtfronten vid tiden t är tydligen definierad av uttrycket

$$I = \frac{dh}{d\xi} \quad (a)$$

Uttrycket $dh/d\xi$ erhålls vi ur ekvationen (i). Således

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{q}{2\pi k D \xi} \quad (b)$$

Om vi här införa uttrycket på q enligt ekvationen (3.20), få vi

$$I = \frac{dh}{d\xi} = \frac{h_c + h_o}{\xi (\ln x - \ln r)} \quad (3.23)$$

Denna ekvation ger oss omedelbart möjlighet att skriva upp uttrycket på v_D som funktion av x och ξ eller

$$v_D = k I = \frac{k (h_c + h_o)}{\xi (\ln x - \ln r)} \quad (3.24)$$

Vi ha därmed funnit de analytiska uttrycken på våra inledningsvis symboliskt uppställda funktionssamband. Samtliga funktioner äro uttryckta med x och ξ som oberoende variabler. Om vi i överensstämmelse med de ursprungligen antagna sambanden sökte införa t som oberoende variabel, skulle detta emellertid icke vara explicit möjligt. Vi behålla därför x och ξ som oberoende variabler.

Vi summera resultatet av den genomförda analysen i följande översiktliga sammanställning av de funna sambanden.

a. Funktioner av enbart x.

$$q = \frac{2\pi k D (h_c + h_o)}{\ln x - \ln r} \quad (3.20)$$

$$v_c = \frac{dx}{dt} = \frac{100 k (h_c + h_o)}{w x (\ln x - \ln r)} \quad (3.21)$$

$$t = \frac{w}{200 k (h_c + h_o)} \left[x^2 \ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (x^2 - r^2) \right] \quad (3.22)$$

b. Funktioner av x och ξ .

$$I = \frac{h_c + h_o}{\xi (\ln x - \ln r)} \quad (3.23)$$

$$v_D = \frac{k (h_c + h_o)}{\xi (\ln x - \ln r)} \quad (3.24)$$

355. Radiell kapillär strömning i ett kornigt system med
 $d = 0,02$ mm (ett exempel).

De i föregående avdelning härledda ekvationerna kunna vi genom insättning av uttrycken för \underline{k} och $\underline{h_c}$ erhålla i en för vissa beräkningar något användbarare form

$$k = c d^2 \quad (a) \quad \text{och} \quad h_c = a/d \quad (b)$$

Om dessa uttryck på \underline{k} och $\underline{h_c}$ införas i ekvationerna, få vi efter någon förenkling följande översikt:

a. Funktioner av enbart x.

$$q = \frac{2\pi c d D (a + h_o d)}{\ln x - \ln r} \quad (3.20')$$

$$v_c = \frac{dx}{dt} = \frac{100 c d (a + h_o d)}{w x (\ln x - \ln r)} \quad (3.21')$$

$$t = \frac{w}{200 c d (a + h_o d)} \left[x^2 \ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (x^2 - r^2) \right] \quad (3.22')$$

b. Funktioner av x och ξ .

$$I = \frac{dh}{d\xi} = \frac{a + h_o d}{\xi d (\ln x - \ln r)} \quad (3.23')$$

$$v_D = k \frac{dh}{d\xi} = \frac{c a d + h_o c d^2}{\xi (\ln x - \ln r)} \quad (3.24')$$

Om vi tänka oss den experimentella prövningen så anordnad att $\underline{r} = 1$ cm och $\underline{D} = 1$ cm, förenklas dessa formler ytterligare. Här kan för övrigt nämnas, att vi företagit vissa inledande experimentella prövningar av formlerna (3.20) till (3.24). Frågan gäller ju här, med vilken noggrannhet de studerade förloppen beskrivas av ekvationerna.

Vi erhålla, om \underline{h}_0 sättes = 0

$$q = \frac{2\pi c a d}{\ln x} \quad (3.20'')$$

$$v_c = \frac{dx}{dt} = \frac{100 c a d}{w x \ln x} \quad (3.21'')$$

$$t = \frac{w}{200 c a d} \left[x^2 \ln x - \frac{1}{2} (x^2 - 1) \right] \quad (3.22'')$$

$$I = \frac{dh}{d\xi} = \frac{a}{\xi d \ln x} \quad (3.23'')$$

$$v_D = k \frac{dh}{d\xi} = \frac{c a d}{\xi \ln x} \quad (3.24'')$$

Observera, att vi i ekvationerna (3.20) - (3.24) icke ur experimentell synpunkt behöva skilja på \underline{h}_c och \underline{h}_0 , utan att dessas inbördes storlek är oväsentlig ur synpunkten av ekvationernas beskrivande innebörd. Däremot måste de hållas isär, om vi såsom i ekvationerna (3.20'') till (3.24'') vilja studera förloppens beroende av \underline{d} , d.v.s. betrakta \underline{d} som parameter (jfr även med stycket 351!).

Vi genomräkna nu ett numeriskt exempel, vilket på olika sätt är ägnat att konkretisera våra föreställningar utav de processer, som beskrivas av ekvationerna (3.20) - (3.24''). Observera, att vi här icke utsagt något om deras strängare giltighet vid ett visst givet förlopp. Att de på ett tillfredsställande sätt beskriva och även tillåta halvkvantitativa utsagor är säkert; mera problematiskt är däremot, i vad mån vi äga möjligheter att definiera ett givet system så, att vi med önskvärd noggrannhet kunna beräkna de aktuella förloppen. Vi lämna emellertid dessa frågeställningar tillsvi vidare och antaga i fortsättningen ekvationernas giltighet.

Antag att \underline{d} är = 0,02 mm = 0,002 cm (motsvarande den "effektiva korndiametern" i en viss finmofraktion). Vi antaga dessutom, att ekvationen (3.20'') till (3.24'') gälla samt att \underline{w} blir = \underline{n} = 50 volymprocent. Enligt det föregående sätta vi \underline{a} = 0,6 och \underline{c} = 5. Då gäller

$$q = \frac{0,0377}{\ln x} = \frac{0,0164}{\log x} \quad (a)$$

$$v_c = \frac{0,012}{x \ln x} = \frac{0,0052}{x \log x} \quad (b)$$

$$t = 41,67 \left[x^2 \ln x - \frac{1}{2} (x^2 - 1) \right] \quad (c)$$

$$I = \frac{dh}{d\xi} = \frac{300}{\xi \ln x} = \frac{130}{\xi \log x} \quad (d)$$

$$v_D = \frac{0,006}{\xi \ln x} \quad (e)$$

I dessa ekvationer skall \underline{t} anges i sekunder. Ur översiktssynpunkt är det bättre att ange \underline{t} i timmar. Vi erhålla då också $\underline{v_c}$ i cm/tim. De tre första ekvationerna bliva då med angivna sorter

$$q = \frac{136}{\ln x} \text{ cm}^3/\text{tim} \quad (a')$$

$$v_c = \frac{43,2}{x \ln x} \text{ cm/tim} \quad (b')$$

$$t = 0,0116 \left[x^2 \ln x - \frac{1}{2} (x^2 - 1) \right] \text{ tim} \quad (c')$$

Med hjälp av dessa ekvationer beräkna vi och sammanställa tabellen 3.06. I tabellen ha dock ej \underline{q} -värdena blivit införda men däremot $\underline{v_c}$ och \underline{t} .

I diagrammet på figur 3.26 äro kurvorna för \underline{t} och $\underline{v_c}$ uppritade. Med en passare kunna vi ur diagrammet ta ut och avsätta i form av koncentriska cirklar våtfrontens läge för $\underline{t} = 5$ tim, $\underline{t} = 15$ tim, o.s.v. Vi erhålla då en åskådlig bild av våtfrontens utbredning. Observera i detta fall i skalan 1:5! För givna \underline{x} kunna vi sedan lätt avläsa våtfrontens hastighet vid de aktuella lägena. De avlästa värdena ha sedan med oförändrad skala avsatts som pilar, vilka dragits från sammanhörande våtfront. Vi få då en demonstrativ bild av huru snabbt hastigheten avtar i början av strömingen men också av att den rätt snart blir relativt konstant med tiden. De för de omnämnda konstruktionerna nödvändiga avläsningarna finnas an-tydda i diagrammet.

Tabell 3.06. Beräkningsschema för funktionerna q , v_c och t . Närmare se texten!

a	b	c	d	e	f	g	h	i
x cm	x^2	$\ln x$	$x^2 \ln x$	$\frac{x^2-1}{2}$	d - e	t tim.	$x \ln x$	v_c cm/tim.
1	1	0,000	0	0	0	0	0	∞
10	100	2,303	230	50	180	2,1	23,0	1,88
20	400	2,996	1198	200	998	11,6	59,9	0,72
30	900	3,401	3061	450	2611	30,3	102	0,42
40	1600	3,689	5902	800	5102	59,2	148	0,29
50	2500	3,912	9780	1250	8530	98,9	196	0,22
60	3600	4,094	14738	1800	12938	150	246	0,18
70	4900	4,249	20820	2450	18370	213	297	0,15
80	6400	4,382	28045	3200	24845	288	351	0,12
90	8100	4,500	36450	4050	32400	376	405	0,11
100	10000	4,605	46050	5000	41050	476	461	0,09
110	12100	4,700	56870	6050	50820	590	517	0,08
120	14400	4,787	68933	7200	61733	716	574	0,08
130	16900	4,868	82269	8450	73819	856	633	0,07
140	19600	4,942	96863	9800	87063	1010	692	0,06
150	22500	5,001	112748	11250	101498	1177	752	0,06
160	25600	5,075	129920	12800	117120	1359	812	0,05
170	28900	5,136	148430	14450	133980	1554	873	0,05
180	32400	5,193	168253	16200	152053	1764	935	0,05
190	36100	5,247	189417	18050	171367	1988	997	0,04
200	40000	5,298	211920	20000	191920	2226	1060	0,04

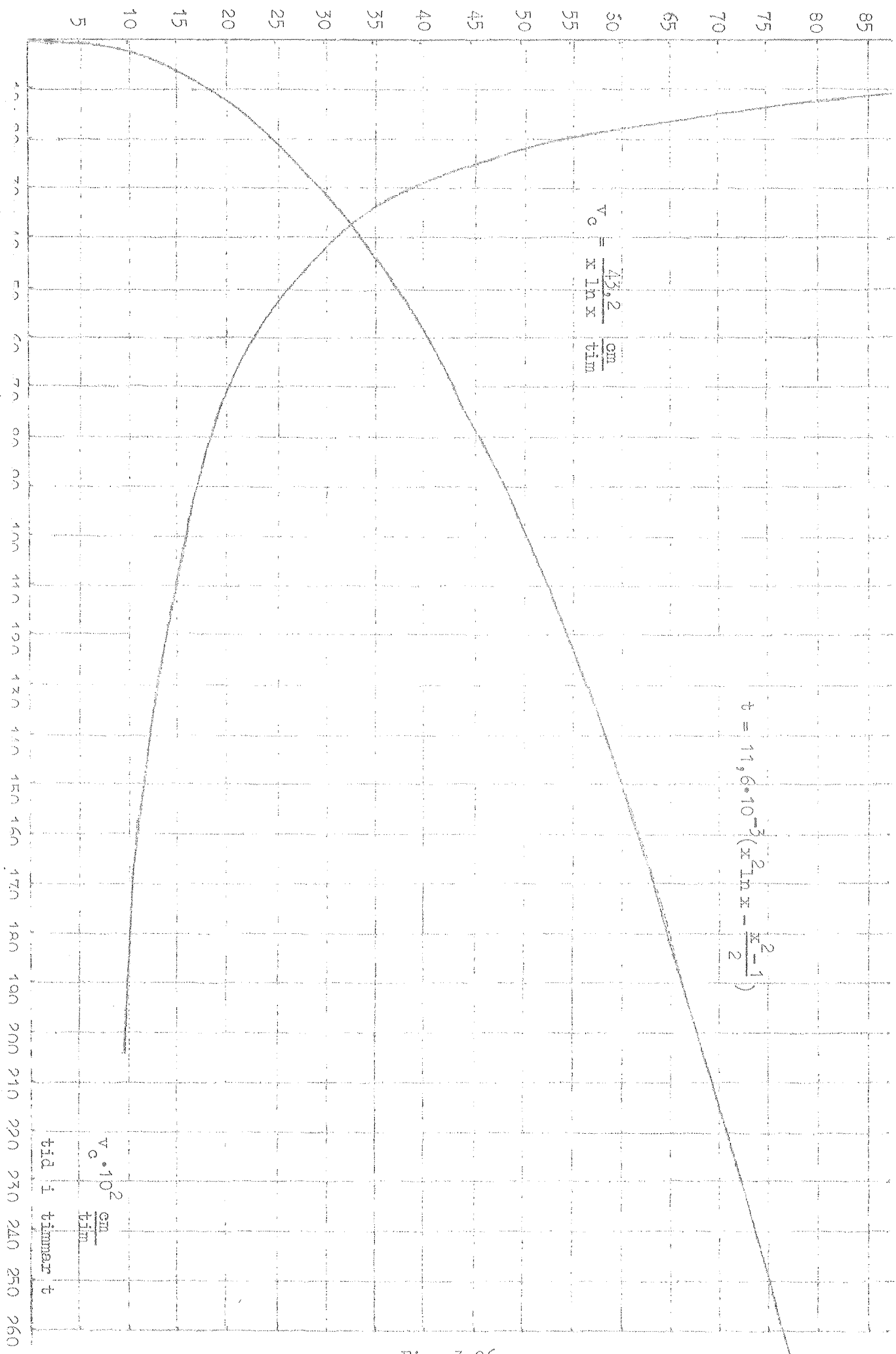
356. Några exempel.

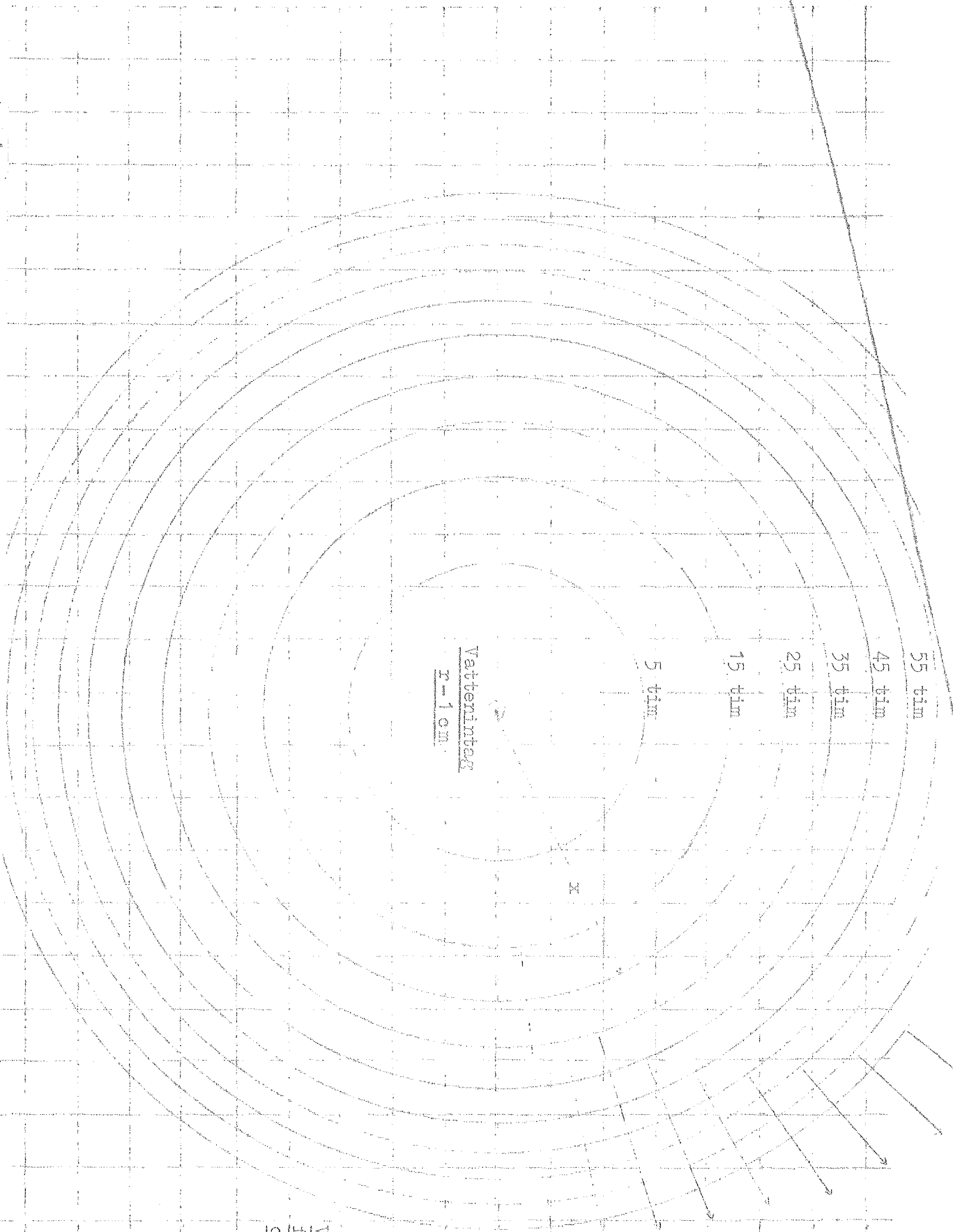
Här följä nu några blandade exempel, vilka på olika sätt kunna bidra att befästa och förtydliga de i föregående stycke behandlade frågeställningarna.

Ex. 3.32. Beräkna våtfrontens hastighet v_c , om sambandet mellan t och x är bestämt av uttrycket

$$t = 0,0116 \left[x^2 \ln x - \frac{1}{2} (x^2 - 1) \right]$$

x = väta avst. från centrum i cm.





Våtfrentens avstånd
från centrum vid
olika tider

Lösning: Vätfrontens hastighet definieras av uttrycket

$$v_c = \frac{dx}{dt} \quad (a)$$

Vi differentiera därför det givna uttrycket och bilda derivatan dx/dt . Således

$$dt = 0,0116 \left[2x \ln x + \frac{x^2}{x} - x \right] dx \quad (b)$$

eller

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{0,0232 x \ln x} = \frac{43,1}{x \ln x} \quad (c)$$

Jämför med det föregående! Förekommande avvikelser beror på avrundningar.

Ex. 3.33. Visa i anslutning till de formler, som lagts till grund för beräkningen av tabellen 3.06, att om

$$v_c = \frac{43,2}{x \ln x} \text{ cm/tim}$$

så är

$$q = \frac{136}{\ln x} \text{ cm}^3/\text{tim}$$

för $w = 50\%$ och $D = 1 \text{ cm}$

Bevis: Den vattenmängd q som per tidsenhet transporteras fram till vätfronten är tydligen

$$q = v_c \cdot 2\pi x \cdot 1 \cdot \frac{w}{100} \quad (a)$$

eller

$$q = \frac{50}{100} \cdot 2\pi x \cdot \frac{43,2}{x \ln x} = \frac{136}{\ln x}$$

V.S.B.

Ann. Observera, att dessa exempel egentligen äro ett sätt att pröva, om sifferkoefficienterna i formlerna överensstämna. De använda formlerna ha ju erhållits ur mera komplicerade formler genom successiv insättning av gällande värden och förenkling.

Ex. 3.34. Integrera uttrycket (d), som leder till formel (3.22).

Lösning: Uttrycket lyder

$$dt = \frac{w}{100 k (h_c + h_o)} (x \ln x - x \ln r) dx$$

Vi sätta

$$\frac{w}{100 k (h_c + h_o)} = C_1$$

och erhålla

$$\frac{dt}{C_1} = x \ln x \, dx - x \ln r \, dx$$

Partiell integration av första termen i högra ledet ger, om vi sätta

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \quad \text{samnt} \quad dv = x \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2$$

eller

$$\begin{aligned} t &= C_1 \left[\int x \ln x \, dx - \int x \ln r \, dx \right] = C_1 \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{r^2}{2} \ln r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln r + \frac{r^2}{2} \ln r \right] \\ t &= C_1 \left[\frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{r} - \frac{1}{4} (x^2 - r^2) \right] \end{aligned}$$

och slutligen

$$t = \frac{w}{200 k (h_c + h_o)} \left[x^2 \ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (x^2 - r^2) \right]$$

Ex. 3.35. I stycket 355 ha vi specialiserat våra ekvationer till fallet $\underline{d} = 0,02$ mm. Bestäm den hastighet våtfronten enligt dessa ekvationer har för $\underline{t} = 8$ tim.

Lösning: I ekvationen (c') stycket 355 kunna vi insätta $\underline{t} = 8$ och medelst passning beräkna \underline{x} , varefter vi genom insättning av det funna värdet i ekvationen (b') beräkna \underline{v}_c .

I detta fall genomföra vi icke det skisserade lösningsförfarandet utan erhålla den sökta hastigheten genom direkt avläsning i diagrammet på figur 3.26. Vi erhålla $\underline{v}_c = 0,91$ cm/tim.

Ann. Med utgångspunkt från det mot $\underline{t} = 8$ i diagrammet svarande värdet på $\underline{x} = 17$ erhålla vi genom några relativt enkla passningar ett noggrannare värde $\underline{x} = 17,15$. Insättes detta x -värde i ekvationen (c') få vi $\underline{t} = 8,00$ (7,996) och \underline{v}_c beräknas enligt ekvationen (b') till 0,89 cm/tim.

Ex. 3.36. Enligt formel (3.21') är våtfrontens hastighet

$$v_c = \frac{dx}{dt} = \frac{100 c d (a + h_o d)}{w x (\ln x - \ln r)} \quad (a)$$

a. Beräkna våtfrontens acceleration! Sätt $x = 1$ cm!

b. Visa dessutom att under angivna förutsättningar är förhållandet mellan accelerationen för $x = 2$ cm a_2 och för $x = 4$ cm a_4 bestämt av uttrycket

$$\frac{a_2}{a_4} = 64 \cdot \frac{\ln 2 + 1}{2 \ln 2 + 1} = 45,4 \quad (b)$$

Lösning: a. Vi skriva

$$a = \frac{dv_c}{dt} = \frac{dv_c}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv_c}{dx} \cdot v_c \quad (c)$$

och beräkna dv_c/dt . Således

$$\frac{dv_c}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{100 c d (a + h_0 d)}{w x (\ln x - \ln r)} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{C}{x \ln x} \right] \quad (d)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = 0 \left[-\frac{1}{x^2 \ln x} - \frac{1}{x^2 \ln x^2} \right] = \frac{-C (\ln x + 1)}{x \ln x^2} \quad (e)$$

$$a = \frac{dv_c}{dx} \cdot v_c = \frac{-C (\ln x + 1)}{x \ln x^2} \cdot \frac{C}{x \ln x} \quad (f)$$

$$a = -\frac{C^2 (\ln x + 1)}{x \ln x^3} \quad (g)$$

b. För $x = 2$ erhålles

$$a_2 = -\frac{C^2 (\ln 2 + 1)}{2 \ln 2^3} \quad (a)$$

och för $x = 4$

$$a_4 = -\frac{C^2 (\ln 4 + 1)}{4 \ln 4^3} = -\frac{C^2 (2 \ln 2 + 1)}{8 \ln 2^3} \quad (b)$$

Det sökta förhållandet blir

$$\frac{a_2}{a_4} = 64 \frac{\ln 2 + 1}{2 \ln 2 + 1} = 45,4 \quad (c)$$

V.S.B.

Observera, att tecknet för a är negativt, vilket betyder att våtfrontens hastighet är avtagande, d.v.s. den är retarderad. Retardationen avtar emellertid mycket snabbt med växande x , såsom formeln (g) visar

och sifferberäkningen ytterligare belyser.

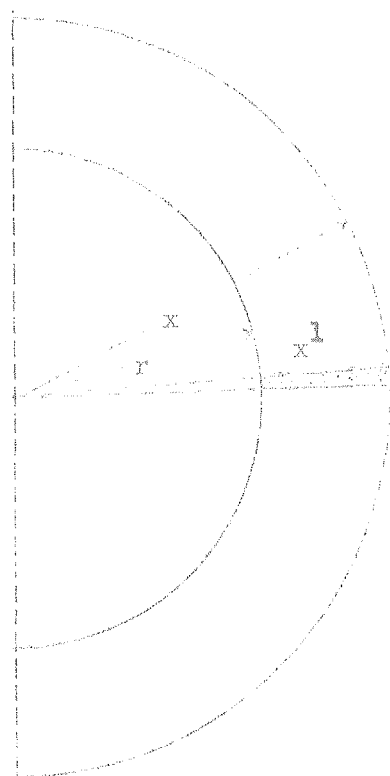
Ex. 3.37. Vid experimentella och teoretiska studier av vattnets kapillära och radiella utbredning över ett horisontellt plan, varvid vattnet utan övertryck insuges från ett centralt beläget cirkulärt hål med radien r , har man funnit våtfrontens hastighet vara

$$v_c = \frac{100 k h_c}{w x (\ln x - \ln r)} \quad (a)$$

Jämför också med figuren 3.27 och formeln 3.21!

Visa, att om r är mycket stort övergår formeln för v_c i motsvarande uttryck för kapillär inströmning i horisontell pelare.

Lösning: Vi förtydliga förutsättningarna genom att upprita figuren



3.27. Den tänkta horisontella pelaren finnes där markerad genom streckning av en del av bädden.

För horisontell inströmning i en pelare gäller formeln

$$v_c = \frac{100 k h_c}{w x} \quad (b)$$

enligt ekvationen (3.17), om h_c sättes = 0.

I formel (a) skall x (se också figuren!) mätas från centrum och i formel (b) från pelarens bas. Vi införa nu substitutionen $x = x' + r$ i formeln (a) och erhålla

Fig. 3.27.

$$v_c = \frac{100 k h_c}{w (x' + r) \ln \frac{x' + r}{r}} = \frac{C}{(x' + r) \ln (1 + \frac{x'}{r})}$$

Nämnaren i detta uttryck kunna vi skriva

$$\begin{aligned} & r \left(1 + \frac{x'}{r}\right) \left[\left(\frac{x'}{r}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{r}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x'}{r}\right)^3 - \dots - \frac{1}{n} \left(\frac{x'}{r}\right)^n \right] = \\ & = \left(1 + \frac{x'}{r}\right) \cdot x' \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{r}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x'}{r}\right)^2 - \dots - \frac{1}{n} \left(\frac{x'}{r}\right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Om här x'/r är ett litet tal i förhållande till 1, kan således nämnaren approximeras till \underline{x}' och följaktligen

$$v_c = \frac{100 k h_c}{w x'} \quad (c)$$

men detta uttryck är lika med formeln för v_c enligt (b). Enligt den gjorda substitutionen skall också \underline{x}' betyda avståndet mellan pelarens bas och våtfronten i likhet med \underline{x} i ekvationen (b). Beviset är således presterat.

Ex. 3.38. Enligt formel 3.23 gäller för sambandet mellan t och \underline{x} vid vattnets radiella utbredning över ett horisontellt plan

$$t = \frac{w}{200 k h_c} \left[x^2 \ln \frac{x}{r} - \frac{1}{2} (x^2 - r^2) \right] \quad (a)$$

om vi sätta $\underline{h}_0 = 0$.

Visa, att om \underline{r} är mycket stort övergår formeln för v_c i motsvarande uttryck för kapillär inströmning i horisontell pelare.

Lösning: Om substitutionen $\underline{x} = x' + r$ införes i ekvationen (a), kan den begärda demonstrationen genomföras i analogi med den i föregående exempel utförda. Vi utskriver därför icke beviset här utan överlämna åt läsaren att fullfölja detsamma efter givna anvisningar.

LITTERATURFÖRTECKNING.

- Adam, N.K., 1941. The physics and chemistry of surfaces. - Oxford University Press, New York.
- Andersson, S., 1952. Kompendium i agronomisk hydroteknik. I. Elementär hydromekaniik. - Uppsala.
- " 1952. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. I. Marken som ett fysikaliskt system. - Grundförbättring, årg. 5, nr 4.
- " 1953. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. II-V. Om markens permeabilitet. - Grundförbättring, årg. 6, nr 1-4.
- " 1954. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. VI. En rationell metod att studera och fotografera makrostrukturen i marken. - Grundförbättring, årg. 7, nr 1.
- " 1954. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. VII. Markens struktur och om en metod att analysera markens makroaggregering. - Grundförbättring, årg. 7, nr 2.
- " 1955. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. VIII. En experimentell metod. - Grundförbättring, årg. 8, Specialnummer 2.
- " 1955. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. IX. Studier av några gyttjejordsprofiler i Örebro län. - Grundförbättring, årg. 8, nr 2-3.
- " 1956. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. Markfotot i färg och dess reproduktion. - Grundförbättring, årg. 9, nr 2.
- " 1956. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. Allmän sammanfattning av delarna I-X. - Uppsala.
- " 1957. Kapillära stighöjder och kapillära vattentransporter i mo- och mjälajordarter. - N.J.F., årg. 39 (Kongressberättelse 1956).
- " 1958. Några teoretiska synpunkter på lösa massors finfördelningskaraktär. - I manusk. på Inst. f. Agr. Hydroteknik, Uppsala.
- " 1958. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. (XII). Experimentella studier av kapillära vattentransporter och vattenhaltsjämvikter i jord. - I manusk. på Inst. f. Agr. Hydroteknik, Uppsala.
- Andersson, S. och Wiklert, P., 1960. Markfysikaliska undersökningar i odlad jord. XI. Studier av några markprofiler på Ultuna egendom. - Grundförbättring, årg. 12, Specialnummer 3.
- Baver, L.D., 1956. Soil Physics. - John Wiley & Sons, Inc. New York and London.
- Beskow, G., 1929. Dräneringens betydelse för vägarnas tjälförhållanden. - Svenska Vägintitutet. Medd. nr 15.

- Beskow, G., 1930 (1929). Om jordarternas kapillaritet. En ny metod för bestämning av kapillärkraften. - S.G.U. Ser. C, nr 356.
- "-" 1935 (1932). Tjälbildningen och tjällyftningen med särskild hänsyn till vägar och järnvägar. - S.G.U. Ser. C, nr 375.
- Briggs, L.J., 1897. The mechanics of soil moisture. - U.S. Dept. Agr. Bur. Soils, Bull. 10.
- Buckingham, E., 1907. Studies on the movement of soil moisture. - U.S. Dept. Agr. Bur. Soils Bull. 38.
- Courant, R. och Robbins, H., 1953. What is mathematics? - Oxford University Press. London, New York, Toronto.
- Grafts, A.S. et alii, 1949. Water in the physiologi of plants. - Waltham, Mass. U.S.A.
- Dallavalle, J.M., 1948. Micrometrics. The technology of fine particles. - Pitman Publishing Company. New York, Toronto, London.
- Daniels, F. and Alberty, R.A., 1957. Physical chemistry. - John Wiley & Sons, Inc. New York and London.
- Ekström, G., 1938. Preliminärt nordiskt förslag till jordvattnets terminologi. - Beretning fra N.J.F:s Kongress i Uppsala.
- Ference, M. Jr., Lemon, H.B. and Stephenson, R.R., 1956. Analytical experimental physics. - The University of Chicago Press, Chicago.
- Fischer, R.A., 1926. On the capillary forces in an ideal soil. - Journ. Agr.Sci., 16, 1926.
- Getman, F. and Daniels, F., 1945. Physical chemistry. - John Wiley & Sons, Inc. New York and London.
- Graton, L.C. and Fraser, H.J., 1935. Systematic packings of spheres; With particular relation to porosity and permeability. - Journ. Geol., vol. 43, no. 8.
- Haines, R.A., 1925. Studies in the physical properties of soils. I. Mechanical properties concerned in cultivation. - Journ. Agr. Sci. 15. II. A note on the cohesion developed by capillary forces in an ideal soil. - Journ. Agr. Sci. 15.
- "-" 1927. Studies in the physical properties of soils. IV. A further contribution to the theory of capillary phenomena in soils. - Journ. Agr. Sci. 17.
- "-" 1930. Studies in the physical properties of soils. V. The hysteresis effect in capillary properties, and the modes of moisture distribution associated therewith. - Journ. Agr. Sci. 20.
- Handbook of chemistry and Physics, 1946. - 13. uppl. Cleveland, Ohio.
- Herdan, G., 1953. Small particle statistics. - Amsterdam, Boston, New York and Paris.
- Höber, R., 1945. Physical chemistry of cells and tissues. - Blakiston, Philadelphia.
- Keen, B.A., 1931. The physical properties of the soil. - Longmans, Green & Co, London.
- Kohlrausch, F., 1947. Praktische Physik. Band 1. - Mary S. Rosenberg, New York.

- Kramer, P.J., 1949. Plant and soil water relationships. - Mac Graw-Hill New York.
- Krumbein, W.C. and Pettijohn, F.J., 1938. Manual of sedimentary petrography. - New York.
- Lamb, H., 1949. Statics. - Cambridge University Press, London.
- Maxwell, J.C.I., 1877. Matter and motion. - Dover Publications, Inc. New York.
- Richards, L.A. and Weaver, L.R., 1944. Moisture retention by some irrigated soils as related to soil-moisture tension. - J. Agr. Research, 69.
- Schofield, R.K., 1935. The pF of the water in soil. - Trans. 3d Intern. Congr. Soil Sci., 2.
- Schofield, R.K. and da Costa, J.V.B., 1935. The determination of pF at permanent wilting and the moisture equivalent by freezing point method. - Trans. 3d Intern. Congr. Soil Sci., 1.
- Slichter, C.S., 1898. Theoretical investigation of the motions of ground water. - U.S. Geol. Surv., 19th Ann. Rept.
- Speakman, J.C., 1948. Den moderna valensteoriens grunder. - Natur och Kultur, Stockholm.
- Taylor, D.W., 1948. Fundamentals of soil mechanics. - John Wiley & Sons, Inc. New York and London.
- Taylor, H.S. and Glasstone, S., 1951. States of matter, vol. two. - D. Van Nostrand Company, Inc. New York, Toronto and London.
- Terzaghi, K., 1946. Theoretical soil mechanics. - John Wiley and Sons, Inc. New York and London.
- Tomaschek, R., 1936. Grimsehl's Lehrbuch der Physik. Erster Band. - B.G. Teubner, Leipzig und Berlin.
- Versluys, J., 1917. Die Kapillaritet der Boden. - Intern. Mitt. Bodenk., 7.
- Wollny, E., 1884. Untersuchungen über die kapillare Leitung des Wassers in Boden. - Forsch. Gebiete. Agr.-Phys., 7.
- Wollny, E., 1885. Untersuchungen über die kapillare Leitung des Wassers in Boden. - Forsch. Gebiete. Agr.-Phys., 8.
- Zunker, F., 1930. Des Verhalten des Bodens zum Wasser. - Handbuch der Bodenlehre, B. VI.

