KUNGL. SKOGSHÖGSKOLANS SKRIFTER

BULLETIN OF THE ROYAL SCHOOL OF FORESTRY
STOCKHOLM, SWEDEN

Nr 14 och 15 Redaktör: Professor OLOF TAMM 1953

Intérêt simple ou intérêts composés dans le calcul de la croissance

Enkel eller sammansatt ränta vid tillväxtberäkning

Av

SVEN PETRINI

Sammansatt ränta vid tillväxtprocentberäkning i fleråriga perioder

Zinseszinsen bei der Berechnung der Zuwachsprozente in mehrjährigen Perioden

Av

EINAR STRIDSBERG

Särtryck ur "Skogshögskolan 125 år"

Reprinted from "The Royal School of Forestry of Sweden 125 Years"

SKOGSBIBLIOTEKET, SKOGSHÖGSKOLAN. STOCKHOLM

(I distribution)

Sammansatt ränta vid tillväxtprocentberäkning i fleråriga perioder

Av

EINAR STRIDSBERG

Om ett virkesförråd våren år 1 håller ett virkeskapital k_1 m^3 och under året växer med p_1 % samt nästa år med p_2 % på detta års vårkapital $k_2 = k_1 \quad 1{,}op_1$ osv. så blir förrådet om tio år $k_{11} = k_1 \,.\, 1{,}op_1 \,.\, 1{,}op_2 \ldots 1{,}op_{10} = k_1 \,.\, 1{,}o\bar{p}^{10}$.

Medeltillväxtprocenten för perioden erhålles alltså genom att beräkna det geometriska mediet av faktorerna $1{,}op_1 \ldots 1{,}op_{10}$ och man får $\log 1{,}o\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log 1{,}op_i$.

Tillväxtprocenterna bruka oftast visa en med åldern kontinuerligt sjunkande serie. Om faktorerna $1{,}op_1 \ldots 1{,}op_{10}$ visa en geometriskt fallande serie så bilda faktorerna $\log 1{,}op_1 \ldots \log 1{,}op_{10}$ en aritmetisk serie och man får

$$\log 1{,}o\bar{p} = \frac{1}{10} \cdot 10 \cdot \frac{\log 1{,}op_1 + \log 1{,}op_{10}}{2} \text{ eller}$$

$\log 1{,}o\bar{p} = \frac{1}{2} (\log 1{,}op_5 + \log 1{,}op_6)$. Värdet för $1{,}o\bar{p}$ kan då avläsas på kurvan för år 5,5 dvs. för medeltalet av åldrarna 1 till 10.

Emellertid visar det sig att log 1,op i praktiken inte blir en rät linje utan en nedåt konvex kurva, till följd varav $\bar{p}$ får ett värde som på kurvan kan avläsas för en ålder något under 5,5 år. Med stöd av en tillväxtundersökning från Eriksbergs fideikommiss skall här redovisas de felverkningar som uppkomma genom att för en viss period som medeltillväxtprocenter använda värdet på tillväxtkurvan vid periodens mitt.

Tillväxten beräknades genom borrning tio år tillbaka i tiden. För exempelvis åldersklassen 51—60 år (åkl VI) utgår man från provstammarnas nuvarande volym VI k_{55} och deras volym tio år tidigare VIk_{45} och förhållandet mellan dem $VIk_{55}: VIk_{45}$ blir tillväxtfaktorn $1{,}o\bar{p}_{VI}{}^{10}$. Tillväxtprocentserien erhålles genom att på samma sätt beräkna medeltillväxtprocenterna för övriga åldersklasser.

Vill man nu utnyttja undersökningen till att göra en beräkning framåt i tiden så är det icke fullt korrekt att på nuvarande virkesförrådet i åldersklass V (Vk_{45}) tillämpa tillväxtfaktorn $1{,}o\overline{p}_{VI}$. Även om man förutsätter att tillståndet i åldersklass V är identiskt med tillståndet i åldersklass VI för tio år sedan och att deras utveckling en tioårsperiod framåt även skulle vara densamma så måste virkesförrådet VIk_{45} vara mindre än Vk_{45} då i det förra inte ingår de träd som under perioden avverkats. Kallas de avverkade trädens kubikmassa vid periodens början för A så att $Vk_{45} — A = VIk_{45}$ så är det på förrådet Vk_{45} — A som tillväxtprocenten $\overline{p}_{VI}$ bör tillämpas under det att tillväxten på de träd som komma att avverkas är okänd och med den tillämpade undersökningsmetodiken — tillväxtberäkning bakåt i tiden — ej heller kan bestämmas. Om man ändock använder tillväxtprocenten $\overline{p}_{VI}$ för kvantiteten Vk_{45} så bygger man på antagandet att tillväxten för de träd som komma att avverkas är densamma som för dem som få stå kvar, och för avverkningskvantiteten A är $\overline{p}_{VI}$ då blott ett närmevärde grundat på en sannolikhetsbedömning.[1] Om bedömningen inte är fullt riktig bli felverkningarna härav dock ganska små om avverkningskvantiteten A utgör en ringa del av totalförrådet. Det är emellertid tydligt att det osäkerhetsmoment som här föreligger gör att det ej finns anledning att överdriva kravet på noggrannhet beträffande andra avsnitt av beräkningsmetoden.

Om man godtar att de uträknade tillväxtprocenterna även kunna användas för beräkningar framåt i tiden och att den grafiskt upplagda tillväxtprocentserien korrekt redovisar tillväxtprocentens beroende av åldern så kan man för ett förråd av en viss ålder, på kurvan avläsa den relativa tillväxtökningen för en tioårsperiod framåt. Men om man önskar tillväxten för en annan period t. ex. för ett år eller för tjugo år så ger en avläsning på kurvan inte korrekt resultat. För att i detta fall erhålla ett exakt värde är det lämpligare att i stället konstruera fram förrådsutvecklingen. Ur kvoten av VIk_{55} och $1{,}o\overline{p}_{VI}^{\,10}$ erhölls förrådet tio år tillbaka VIk_{45}. Divideras detta med $1{,}o\overline{p}_{V}^{\,10}$ fås förrådet tjugo år tillbaka VIk_{35} och genom ytterligare divisioner erhålles en förrådsutvecklingsserie som anger det nuvarande förrådets storlek 10, 20, 30 etc. år tillbaka. Fig. 1 visar en sådan förrådsutvecklingsserie varvid till utgångspunkt valts förrådet för åldersklass II (11—20 år) $k_{15,5}$ som satts lika med ett.

Det kan i detta sammanhang diskuteras till vilken ålder förrådet för åldersklass II rätteligen bör hänföras. Medeltalet av åldrarna 11 och 20 år blir 15,5 år. Genom att förrådsutvecklingsserien inte är rätlinjig kommer vidare medeltalet av förråden k_{11} till k_{20} att bli större än $k_{15,5}$ och hänföra sig till åldern $15{,}5 + \triangle$ och detta $\triangle$-värde blir olika för olika åldersklasser. En bättre beräkning skulle kunna erhållas genom att provträdsmaterialet uppdelades i årsklasser i stället för i åldersklasser och att en utjämnad

[1] Vid normal låggallring i ett kontinuerligt skogsbruk, där gallringen huvudsakligen inriktas på att ta bort de tekniskt mindre värdefulla träden samt att reducera stamantalet innan tendens till tillväxtstagnation framkommit, är det fullt möjligt att tillväxtprocenten är något högre för de utstämplade träden än de kvarlämnade eftersom tillväxtprocenten sjunker med stigande diameter. Vid gallring som nätt och jämnt föregriper självgallring är förhållandet däremot givetvis det omvända.

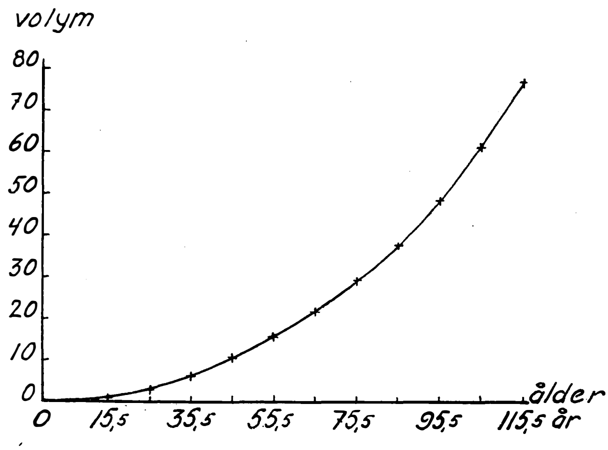

Fig. 1.
Förrådsutvecklingskurva
(för k-värdena i tabell 1)

kurva över tillväxtfaktorns storlek för olika årsklasser konstruerades. Det förefaller dock föga troligt att den noggrannhet som härvid stod att vinna skulle motsvara det ökade arbetet, varför man lämpligen bör godta de åldersklassvis beräknade tillväxtvärdena, och låta avståndet mellan två värden på abskissan, åldersaxeln, utgöra exakt åldersklassens tidrymd. Om man sedan avsätter förrådsvärdena över åldrarna 15, 25, 35 etc. år eller över 15,5, 25,5, 35,5 etc. år eller eventuellt över 15,6, 25,6, 35,6 etc. år betyder detta en förskjutning av origo med 0,5—0,6 enheter vilket om man så önskar lätt kan justeras. Av lämplighetsskäl räknas här i fortsättningen med att förråden hänföra sig till åldrarna 15,5, 25,5 etc. år.

Ur den utjämnade tillväxtprocentserien erhölls vid avläsning för de olika åldersklasserna följande värden på $\overline{p}$ och log $1{,}o\overline{p}^{10}$:

åldersklass	III	IV	V	VI	VII	VIII
	21—30	31—40	41—50	51—60	61—70	71—80
$\overline{p}$	11,5	7,5	5,4	4,2	3,4	2,9
log $1{,}o\overline{p}^{10}$	0,472749	0,314085	0,228406	0,178677	0,145205	0,124154

åldersklass	IX	X	XI	XII	
	81—90	91—100	101—110	111—120	år
$\overline{p}$	2,6	2,5	2,4	2,3	%
log $1{,}o\overline{p}^{10}$	0,111474	0,107239	0,103000	0,098756	

Dessa värden återfinnas även i tabell 1 i kolumn 2 och 5.

Genom succesiv summering av log $1{,}o\overline{p}^{10}$ erhålles värdena på log k och k vilka stå i tabell 1 kolumn 4 och 3.

Om man på den så erhållna förrådsutvecklingskurvan tager fram värdena för exempelvis åldrarna 30 och 31 år erhålles tillväxtprocenten under det 30:e året, $1{,}op_{30} = k_{31} : k_{30}$.

TABELL 1.
Värdena för förrådsutvecklingskurvan och differensvärden för log k.
Die Werte der Vorratsentwicklungskurve und die Differenzwerte für log k.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
a år	$\overline{p}_{a+4,5}$	k_a	log k_a	$\triangle^1_a$	$\triangle^2_a$	$\triangle^3_a$	$\triangle^4_a$	$\triangle^5_a$
15.5	11.5	1.000	0.000000	0.472749	— 0 158664	+ 0.072985	— 0.037035	+ 0.017342
25.5	7.5	2.970	0.472749	314085	— 85679	+ 35950	— 19693	+ 15857
35.5	5.4	6.121	0.786834	228406	— 49729	+ 16257	— 3836	— 214
45.5	4.2	10.357	1.015240	178677	— 33472	+ 12421	— 4050	+ 3976
55.5	3.4	15.628	1.193917	145205	— 21051	+ 8371	+ 74	— 8523
65.5	2.9	21.833	1.339122	124154	— 12680	+ 8445	— 8449	+ 8448
75.5	2.6	29.059	1.463276	111474	— 4235	— 4	— 1	
85.5	2.5	37.562	1.574750	107239	— 4239	— 5		
95.5	2.4	48.083	1.681989	103000	— 4244			
105.5	2.3	60.952	1.784989	098756				
115.5		76.515	1.883745					

$$\triangle^1_a = \log 1{,}0\overline{p}^{10}_{a+4,5}$$

Detta värde skall sedan jämföras med medeltillväxten för åldersklass IV (7,5 %) som erhållits ur kvoten av åldersklassens förråd nu och för tio år sedan — $1{,}0\overline{p}^{\,10}_{IV} = k_{35,5} : k_{25,5}$ — och som enligt gängse praxis hänföres till åldern 30 år, (medeltillväxtprocenten $\overline{p}_{IV}$ betecknas därför i fortsättningen $\overline{p}_{30}$).

På förrådsutvecklingskurvan känner man endast värdena $k_{15,5}$, $k_{25,5}$, $k_{35,5}$ etc. men på grund av kurvans kontinuerliga gång kunna mellanliggande värden interpoleras med stor noggrannhet om hänsyn tages inte blott till 1-differenserna $\triangle^1{}_{15,5} = k_{25,5} - k_{15,5}$; $\triangle^1{}_{25,5} = k_{35,5} - k_{25,5}$ etc., utan även till 1-differensernas differenser, 2-differenserna $\triangle^2{}_{15,5} = \triangle^1{}_{25,5} - \triangle^1{}_{15,5}$ etc. samt till dessa differensers differenser 3-differenserna $\triangle^3$ osv. Om man utgår från ett på förrådsutvecklingskurvan känt värde k_a erhålles det för åldern a+i sökta värdet k_{a+i} enligt följande formel där m betecknar klassvidden som ju i detta fall är 10 år.[1]

$$k_{a+i} = k_a + \frac{i}{m}\triangle^1_a + \frac{1}{\underline{|2}} \cdot \frac{i}{m}\left(\frac{i}{m} - 1\right) \cdot \triangle^2_a +$$

$$+ \frac{1}{\underline{|3}} \cdot \frac{i}{m}\left(\frac{i}{m} - 1\right)\left(\frac{i}{m} - 2\right) \cdot \triangle^3_a + \cdots$$

[1] Beträffande formelns härledning samt icke liniär interpolering se Yule Kendall: Introduction to the theory of statistics.

Eftersom det i detta fall gäller att erhålla värdet på tillväxtprocenten p_{30} och denna enklast erhålles ur beräkningen log $1{,}op_{30}$ = log k_{31} — log k_{30} har här valts att interpolera värdena för log k. Denna beräkningsmetod leder även i övrigt fram till avsevärda förenklingar vid beräkningen.

Man erhåller

$$\log k_{31} = \log k_{15,5} + 1{,}55 \,.\, \triangle^{1}{}_{15,5} + \frac{1}{\underline{|2}} \,.\, 1{,}55 \,.\, 0{,}55 \triangle^{2}{}_{15,5} -$$

$$\frac{1}{\underline{|3}}\, 1{,}55 \,.\, 0{,}55 \,.\, 0{,}45 \triangle^{3}{}_{15,5} + \frac{1}{\underline{|4}}\, 1{,}55 \,.\, 0{,}55 \,.\, 0{,}45 \,.\, 1{,}45 \triangle^{4}{}_{15,5}$$

$$- \frac{1}{\underline{|5}} \,.\, 1{,}55 \,.\, 0{,}55 \,.\, 0{,}45 \,.\, 1{,}45 \,.\, 2{,}45 \triangle^{5}{}_{15,5}$$

och $\log k_{30} = \log k_{15,5} + 1{,}45 \triangle^{1}{}_{15,5} + \frac{1}{\underline{|2}} \,.\, 1{,}45 \,.\, 0{,}45 \triangle^{2}{}_{15,5} -$

$$- \frac{1}{\underline{|3}}\, 1{,}45 \,.\, 0{,}45 \,.\, 0{,}55 \triangle^{3}{}_{15,5} + \frac{1}{\underline{|4}}\, 1{,}45 \,.\, 0{,}45 \,.\, 0{,}55 \,.\, 1{,}55 \triangle^{4}{}_{15,5}$$

$$- \frac{1}{\underline{|5}} \,.\, 1{,}45 \,.\, 0{,}45 \,.\, 0{,}55 \,.\, 1{,}55 \,.\, 2{,}55 \triangle^{5}{}_{15,5}$$

varför man får

$$\log 1{,}op_{30} = \log k_{31} - \log k_{30} = 0{,}1 \triangle^{1}{}_{15,5} + 0{,}1 \triangle^{2}{}_{15,5} -$$

$$- \frac{0{,}1 \,.\, 0{,}45 \,.\, 0{,}55}{2 \cdot 3} \triangle^{3}{}_{15,5} + \frac{0{,}1 \,.\, 0{,}45 \,.\, 0{,}55 \,.\, 1{,}45 \,.\, 1{,}55}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \triangle^{5}{}_{15,5}$$

$$= 0{,}1\,(\triangle^{1}{}_{15,5} + \triangle^{2}{}_{15,5}) - 0{,}004125 \triangle^{3}{}_{15,5} + 0{,}0004635 \triangle^{5}{}_{15,5}$$

$$= 0{,}1 \triangle^{1}{}_{25,5} - 0{,}004125 \triangle^{3}{}_{15,5} + 0{,}0004635 \triangle^{5}{}_{15,5}$$

Då den sista termen visar sig vara av sådan storleksordning att den kan försummas och den första termen är detsamma som log $1{,}o\overline{p}_{30}$ får man alltså fram följande mycket enkla samband mellan tillväxtprocenten för år 30 (p_{30}) och medeltillväxtprocenten för tioårsperioden kring år 30 ($\overline{p}_{30}$)

$\log 1{,}op_{30} = \log 1{,}o\overline{p}_{30} - 0{,}004125 \triangle^{3}{}_{15,5}$ eller

$\log 1{,}op_{30} = \log 1{,}o\overline{p}_{30} - 0{,}04125\,(\log 1{,}o\overline{p}_{20} + \log 1{,}o\overline{p}_{40} - 2 \log 1{,}o\overline{p}_{30})$.

I beräkningen har hänsyn då tagits till punkterna $\overline{p}_{20}$, $\overline{p}_{30}$, $\overline{p}_{40}$ och $\overline{p}_{50}$ varvid den senares värde emellertid saknar betydelse.

Den generella formeln kan skrivas:

$$\log 1{,}op_{a} = \log 1{,}o\overline{p}_{a} - 0{,}04125\,(\log 1{,}o\overline{p}_{a-10} + \log 1{,}o\overline{p}_{a+10} - 2 \log 1{,}o\overline{p}_{a}) \qquad (1)$$

Värdena på p_{a} och $\overline{p}_{a}$ redovisas i tabell 2 kol. 3 och 2.

Tabell 2.

Jämförelse mellan medeltillväxtprocenter vid olika periodlängd.

Vergleich zwischen mittleren Zuwachsprozenten bei verschiedenen Periodenlängen.

a år	$\bar{p}_a$ %	p_a %	$^{5}\bar{p}_a$ %	$^{30}\bar{p}_a$ %	$^{50}\bar{p}_a$ %	$^{20}\bar{p}_{a+5}$ %	$\bar{p}_{a+5}$ %
1	2	3	4	5	6	7	8
20	11.5	11.42	11.44	—	—	9.48	9.19
30	7.5	7.43	7.44	8.10	—	6.44	6.30
40	5.4	5.36	5.37	5.69	6.36	4.80	4.74
50	4.2	4.18	4.19	4.33	4.67	3.80	3.76
60	3.4	3.39	3.39	3.50	3.70	3.15	3.12
70	2.9	2.89	2.89	2.97	3.12	2.75	2.71
80	2.6	2.59	2.59	2.67	2.76	2.55	2.55
90	2.5	2.50	2.50	2.50	2.54	2.45	2.45
100	2.4	2.40	2.40	2.40	—	2.35	2.35

Önskar man medeltillväxtprocenten för en 5-års period ($^{5}\bar{p}$) kan man på samma sätt bestämma log k_{33} och log k_{28} och härur beräkna log $1{,}0{}^{5}\bar{p}_{30} = \frac{1}{5}$ (log k_{33} — log k_{28}). Man kommer med liknande beräkningsmetodik som förut fram till följande formel.

$$\log 1{,}0{}^{5}\bar{p}_a = \log 1{,}0\bar{p}_a - 0{,}003125\, \triangle^{3}_{a-14,5} + 0{,}0003437\, \triangle^{5}_{a-14,5} \quad (2)$$

där den sista termen kan negligeras.

Det visar sig alltså att den sökta medeltillväxtprocenten för en femårsperiod även den är mindre än den erhållna medeltillväxtprocenten för en tioårs period men att skillnaden denna gång är mindre än i förra fallet då det gällde en ettårsperiod. Värdena på $^{5}\bar{p}_a$ framgå av tabell 2 kolumn 4.

För en tjugoårsperiod erhålles exempelvis medeltillväxtprocenten $^{20}\bar{p}_{25}$ med kännedom om förråden $k_{35,5}$ och $k_{15,5}$ då man får log $1{,}0{}^{20}\bar{p}_{25} = \frac{1}{20}$ (log $k_{35,5}$ — log $k_{15,5}$)

$$= \frac{1}{20} (\log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{20} + \log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{30}) = \frac{1}{2} (\log 1{,}0\bar{p}_{20} + \log 1{,}0\bar{p}_{30}).$$

Medeltillväxtprocenten för samma tidpunkt under en tio-årsperiod erhålles genom interpolering ur tillväxtprocentserien.

$$\log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{25} = \log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{20} + 0{,}5\, \triangle^{2}{}_{15,5} - \frac{1}{\underline{|2}}\, 0{,}5 \cdot 0{,}5 \triangle^{3}{}_{15,5} + \frac{1}{\underline{|3}}$$

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5\, \triangle^{4}{}_{15,5} - \frac{1}{\underline{|4}}\, 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5\, \triangle^{5}{}_{15,5}$$

Då $0{,}5\, \triangle^{2}{}_{15,5} = 0{,}5\, (\log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{30} - \log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{20})$ så blir

$$\log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{25} = \frac{1}{2} (\log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{20} + \log 1{,}0\bar{p}^{10}{}_{30}) - 0{,}125\, \triangle^{3}{}_{15,5} +$$

$$+ 0{,}0625\, \triangle^{4}{}_{15,5} - 0{,}039\, \triangle^{5}{}_{15,5}$$

Man finner alltså att medeltillväxtprocenten för tjugoårs-perioden blir större än för tio-årsperioden.

$$\log 1{,}0\overset{20}{\overline{p}}_{25} - \log 1{,}0\overline{p}_{25} = 0{,}0125 \triangle^3_{15,5} - 0{,}00625 \triangle^4_{15,5} + 0{,}0039 \triangle^5_{15,5} \quad (3)$$

Värdena på ${}^{20}\overline{p}_{a+5}$ och $\overline{p}_{a+5}$ med hänsyn tagen till $\triangle^3$ och $\triangle^4$ framgår av tabell 2 kolumn 7 och 8.

För trettioårs-perioden beräknas medeltillväxtprocenten ${}^{30}\overline{p}_{30}$ sålunda.

$$\log 1{,}0\overset{30}{\overline{p}}_{30} = \frac{1}{30}(\log k_{45,5} - \log k_{15,5}) = \frac{1}{30}\,(\log 1{,}0\overset{10}{\overline{p}}_{20} + \log 1{,}0\overset{10}{\overline{p}}_{30}$$

$$+ \log 1{,}0\overset{10}{\overline{p}}_{40}) = \frac{1}{3}\,(\log 1{,}0\overline{p}_{20} + \log 1{,}0\overline{p}_{30} + \log 1{,}0\overline{p}_{40})$$

Man får därför

$$\log 1{,}0\overset{30}{\overline{p}}_{30} - \log 1{,}0\overline{p}_{30} = (\log 1{,}0\overline{p}_{20} + \log 1{,}0\overline{p}_{40} - 2 \log 1{,}0\overline{p}_{30}) = \frac{1}{30} \triangle^3_{15,5} \quad (4)$$

För femtioårs-perioden erhålles

$$\log 1{,}0\overset{50}{\overline{p}}_{40} - \log 1{,}0\overline{p}_{40} = (\log 1{,}0\overline{p}_{20} + \log 1{,}0\overline{p}_{30} + \log 1{,}0\overline{p}_{50} + \log 1{,}0\overline{p}_{60} - 4 \log 1{,}0\overline{p}_{40}) =$$

$$= 0{,}1 \triangle^3_{25,5} + 0{,}02 \triangle^5_{15,5} \quad (5)$$

Värdena på ${}^{30}\overline{p}_a$ och ${}^{50}\overline{p}_a$ redovisas i tabell 2 kolumn 5 och 6.

Av undersökningens resultat så som detta redovisats i tabell 2 framgår att om man hänför medeltillväxtprocenten för en tioårsperiod till periodens mitt så är värdet på medeltillväxtprocenten något högre än tillväxtprocenten för ifrågavarande år. Felet är emellertid av så ringa storleksordning att den upplagda tillväxtprocentserien med mycket god approximation kan användas för tidsperioder under tio år då man erhåller ett endast obetydligt högre tillväxtbelopp än det rätta. Om man för längre tidsperioder än tio år såsom medeltillväxtprocent använder det för periodens mitt avlästa värdet på tillväxtprocentkurvan erhålles ett systematiskt negativt fel som ökar med periodens längd och för en period över 20 år i de yngre åldersklasserna uppnår en sådan storlek att det knappast bör tolereras.

Zusammenfassung

ZINSESZINSEN BEI DER BERECHNUNG DER ZUWACHSPROZENTE IN MEHRJÄHRIGEN PERIODEN

Bei Zuwachsberechnungen pflegt man im allgemeinen den relativen Zuwachs dem absoluten vorzuziehen. Der absolute Zuwachs zeigt grosse Variationen für ungleiche Bonitäten, während der relative Zuwachs davon ziemlich unberührt bleibt. Da man im allgemeinen den Holzvorrat in Bonitätsklassen weder aufgeteilt hat, noch aufgeteilt wünscht, gibt eine Berechnung nach dem Zuwachsprozent darum sicherere Resultate. Die grundlegende Aufteilung des Materials ist gewöhnlich die in Altersklassen. Für verschiedene Altersklassen erhält man wesentlich verschiedene Zuwachsprocentwerte. Darum berechnet man die Zuwachsprozentwerte für einen recht begrenzten Altersabschnitt. Nach Ausgleichung bilden die erhalten Prozentwerte eine mit dem Alter kontinuierlich sinkende Kurve.

Bei der Zinseszinsrechnung wird dann der Prozentwert auf die Mitte der untersuchten Periode bezogen. Kennt man z. B. den Holzvorrat bei den Altern 55 und 45 Jahre, errechnet man die Prozente gemäss der Formel

$$1{,}0\overline{p}_{50}^{\,10} = VIk_{55} : VIk_{45}$$

und bezieht sie auf das Alter 50 Jahre. Dieser Prozentsatz kann auch aufgefasst werden als der Mittelwert der Jahreszuwachsprozente p_{45}, $p_{46} \ldots p_{54}$. Will man dann das untersuchte Material für Zuwachsberechnung in der Zukuft gebrauchen, benutzt man die Ausgleichskurve für die Zuwachsprozente und liest auf ihr den Wert ab, der sich die Mitte der Periode bezieht, über die man die Rechnung erstrecken will.

Wenn jedoch die Zukuftsprognose sich auf andere Lägenperioden, z. B. 5-oder 20-Jahres-Perioden, beziehen soll, treten gewisse Fehlangaben auf. Eine genaue Auffassung von der relativen Vorratsentwicklung lässt sich erhalten, wenn man von einen Vorrat ausgeht und ihn von 10-Jahres- zu 10-Jahres-Periode rückwärts durch den Zuwachsfaktor dividiert. Man bekommt z. B.

$$VIk_{45} = VIk_{55} : 1{,}0\overline{p}_{50}^{\,10} \text{ und } VIk_{35} = VIk_{45} : 1{,}0\overline{p}_{40}^{\,10} \text{ etc.}$$

Fig. 1 zeigt eine Serie einer derartigen Vorratsentwicklung, bei der zum Ausgangspunkt der Vorrat für die Alterklasse II (11—20 Jahre) $k_{15,5}$ gewählt ist. Dieser ist gleich 1 gesetzt. Die Werte sind angegeben in Spalte 3 in Tab. 1. Die Spalte 1 gibt das Alter an und Spalte 2 die Zuwachsprozente, die einem um 4,5 Jahre höherem Alter entsprechen. Diese Werte haben sich ergeben bei einer Untersuchung des Zuwaches auf dem Fideikommiss Eriksberg in Södermanland.

Die Zwischenwerte auf der Kurve können mit hoher Genauigkeit durch numerische Interpolation berechnet werden. Der Vorrat beim Alter a + i lässt sich berechnen gemäss der Formel

$$k_{a+i} = k_a + \frac{i}{m} \overset{1}{\underset{a}{\triangle}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{m} \left(\frac{i}{m} - 1\right) \overset{2}{\underset{a}{\triangle}} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{i}{m} \left(\frac{i}{m} - 1\right) \left(\frac{i}{m} - 2\right) \overset{3}{\underset{a}{\triangle}} + \ldots$$

wobei m die Klassenbreite bezeichnet, die im vorliegenden Falle 10 Jahre betrug.

Indem man in dieser Weise das Vorrat von Jahr zu Jahr bestimmt, kann auch das Jahreszuwachsprocent berechnet werden. Man bekomt z. B. $\log 1{,}0p_{30} = \log k_{31} - \log k_{30}$. Da diese Bestimmung durch Logarithmenrechnung erfolgt, ist die obenstehende Interpolation nicht auf k sonder auf log k bezogen. Die Werte für log k sind in Tabelle 1 Spalte 4 angegeben und die ersten bis fünften Differenzen dieser Werte stehen in Spalte 5—9.

Bei Anwendung der Interpolationsformel erhält man (Vgl. Seite 47)

$$\log 1{,}0p_{30} = \log k_{31} - \log k_{30} = 0{,}1 \overset{1}{\underset{25,5}{\triangle}} - 0{,}004125 \overset{3}{\underset{15,5}{\triangle}} + 0{,}0004635 \overset{5}{\underset{15,5}{\triangle}}$$

wobei der Schlussausdruck vernachlässigt werden kann. Dies lässt sich auch schreiben

$$\log 1{,}0p_{30} = \log 1{,}0\overline{p}_{30} - 0{,}04125 \left(\log 1{,}0\overline{p}_{20} + \log 1{,}0\overline{p}_{40} - 2 \log 1{,}0\overline{p}_{30}\right).$$

Es ergibt sich, wie in Tab. 2 Spalte 3 und 2 gezeigt, dass das Jahreszuwachsprozent p_{30} (7,43 %) etwas niedriger wird als das mittlere Zuwachsprozent für die 10-jahresperiode 25,5—35,5 $\overline{p}_{30}$ (7,5 %). Der Prozentsatz des mittleren Zuwachses $\overline{p}_{30}$, kann aufgefasst werden als das geometrische Mittel der Jahreszuwachsprozente $p_{25,5}\ p_{26,5} \ldots p_{31,5}$ da

$$k_{25,5}\ 1{,}0p_{25,5}\ 1{,}0p_{26,5} \ldots 1{,}0p_{34,5} = k_{35,5} = k_{25,5} \cdot 1{,}0\overline{p}_{30}^{\,10}.$$

Werden die Jahreszuwachprozente $p_{25,5}\ p_{26,5} \ldots p_{34,5}$, graphisch dargestellt, ergibt sich daher dass der Wert ihres geometrischen Mittels auf dieser Kurve ein Alter von etwas unter 30 Jahren anzeigt.

Der mittlere Zuwachsprocent für die Fünfjahrperiode 28—32 Jahre, $5\overline{p}_{30}$, wird dadurch erhalten, dass man in gleicher Weise die Werte $\log k_{33}$ und $\log k_{28}$ berechnet. Mit gleicher Berechnungsmethodik wie vorher kommt man dann zu folgender Formel

$$\log 1{,}0^5\overline{p}_{30} = \log 1{,}0\overline{p}_{30} - 0{,}003125 \triangle^3_{15,5} + 0{,}0003437 \triangle^5_{15,5} \tag{2}$$

Wie aus Spalte 4 in Tabelle 2 hervorgeht, wird auch der mittlere Zuwachsprozent ${}^5\overline{p}_{30}$ (7,44 %) niedriger als für die Zehnjahrperiode (7,5 %) aber etwas höher als für die Einjahrperiode (7,43 %). Die Differenzen verschwinden bei den höheren Altern und sind am grössten bei den niedrigen Altersklassen. Aber der systematische positive Fehler, den man durch Anwendung der Zehnjahreswerte bei Perioden unter zehn Jahren erhält, muss durchgehend als von geringer Grössenordnung angesehen werden.

Die Werte der mittleren Zuwachsprozente für die 20- 30- und 50-Jahr-Perioden sind aus Spalte 7, 5 und 6 in tabelle 2 ersichtlich und sind mit Hilfe folgender Formeln berechnet worden

$$\log 1{,}o\overset{20}{\overline{p}}_{25} - \log 1{,}o\overline{p}_{25} = 0{,}0125 \,\triangle^{3}{}_{15,5} - 0{,}00625 \,\triangle^{4}{}_{15,5} + 0{,}0039 \,\triangle^{5}{}_{15,5} \qquad (3)$$

$$\log 1{,}o\overset{30}{\overline{p}}_{39} - \log 1{,}o\overline{p}_{30} = \frac{1}{30} \triangle^{3}{}_{15,5} \qquad (4)$$

$$\log 1{,}o\overset{50}{\overline{p}}_{40} - \log 1{,}o\overline{p}_{40} = 0{,}1 \,\triangle^{3}{}_{25,5} + 0{,}02 \,\triangle^{5}{}_{15,5} \qquad (5)$$

Diese Zuwachsprozentwerte werden also grösser als die entsprechenden Prozentwerte für die Zehnjahrperiode. Benutzt man die Prozentwerte der Zehnjahrperioden für Berechnungen über längere Perioden, erhält man einen systematischen negativen Fehler. Aus Tabelle 2 geht hervor, dass Berechnungen für längere Perioden als 20 Jahre nur empfohlen werden können, soweit es sich um Ueberschlagsrechnungen handelt. Wünscht man genauere Berechnungen für so lange Perioden, ist es notwendig, erst diese systematischen Fehler gemäss den oben gegebenen Formeln zu verbessern.