MEDDELANDEN

FRÅN

STATENS SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 24. 1927—28

MITTEILUNGEN AUS DER FORSTLICHEN VERSUCHS-ANSTALT SCHWEDENS

24. HEFT

REPORTS OF THE SWEDISH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL FORESTRY

N:o 24

BULLETIN DE L'INSTITUT D'EXPÉRIMENTATION FORESTIÈRE DE LA SUÈDE

N:o 24

CENTRALTRYCKERIET ⸗ STOCKHOLM 1928

Redaktör:
Professor Dr HENRIK HESSELMAN

INNEHÅLL:

L A R S T I R É N

TILL FRÅGAN OM TALLSTAMMENS AVSMALNING OCH VOLYMBERÄKNING.

Under den senaste tiden har som bekant frågan om noggrann ståndsskogsuppskattning varit mycket dryftad i vetenskapliga tidskrifter. Orsakerna härtill skall jag i detta sammanhang icke beröra; vägande skäl äro f. ö. mycket lätta att finna. Vad jag åsyftar med denna uppsats är att komplettera en tidigare av mig i Skogsvårdsföreningens Tidskrift (1922) publicerad uppsats om en ekvation för stamkurvan. Den framkom på en tid, då frågan om trädens avsmalning och möjligheterna att beskriva denna matematiskt ännu icke utvecklats nämnvärt utöver den ståndpunkt den intog efter ingenjör HÖJERS framträdande 1903. Nu finnas ett flertal förslag till matematisk form för stammens avsmalning och ännu flera skola lätt nog kunna uppfinnas om någon ägnar sig däråt. Bland mängden förslag torde väl någon gång kanske en gallring eller gradering komma att ske och för att den av mig föreslagna ekvationen då må kunna prövas samtidigt med andra utvecklar jag den här i en något fullständigare form än tidigare skedde. Jag vill endast från början understryka, att denna ekvation, liksom HÖJERS ekvation, kommer till sin fulla rätt, endast då den tillämpas på medeltalet av ett större antal stammar. Detsamma gäller även den av PETTERSON föreslagna kombinationen mellan två logaritmiska kurvor, ehuru här dock ett steg tagits i riktning mot individuell överensstämmelse.

Ekvationen lyder i HÖJERSKT skrivsätt:

$$y = P \cdot \log\left(\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

och erhålles, om man utgår från uttrycket:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{\sqrt{k^2 + x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

P är en konstant $= \frac{P_1}{\log e}$, k är likaså konstant och $y =$ relativa dimensioner samt $x =$ det relativa avståndet från trädtoppen till den punkt där dimensionen är y.

För att ernå större likformighet är det lämpligt, att överföra (1) till en form, som är analog med den form, PETTERSON givit HÖJERS ekvation. I stället för konstanten k, som i (1) är formkvotsbestämmande, införa vi basabskissan x_b som formbestämmande faktor. (1) antager då följande utseende:

$$y = P \cdot \log\,(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Varje olika formkvot är nu karakteriserad av en bestämd basabskissa, x_b, och formkvotsdiametern ligger på avståndet $\frac{x_b}{2}$ från toppen. Konstanten P tjänar endast till att reducera logaritmerna för $(x + \sqrt{1 + x^2})$ till procent, centimeter eller dylikt. Då den t. v. är betydelselös, kunna vi utelämna den, samtidigt med att vi för vidare räkningar övergå till naturliga logaritmer, vilka här betecknas med ln. (3) erhåller nu den enkla formen:

$$y = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Från denna gestaltning sker lätt en övergång till hyperbelfunktionerna (här betecknade med frakturstil). Vi ha nämligen:

$$\mathfrak{ArcSin}\ x = ln(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

varav följer:

$$y = \mathfrak{ArcSin}\ x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Vi finna alltså, att vad formen beträffar, den ifrågavarande funktionen i enkelhet icke lämnar något övrigt att önska.

Om hyperbelfunktionerna nämnes här endast, att de stå i motsvarande relation till den liksidiga hyperbeln $xy = 1$, som de goniometriska funktionerna till cirkeln, deras period är dock imaginär. $\mathfrak{Sin}x$ definieras av serieutvecklingen:

$$\mathfrak{Sin}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

där $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ och $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, etc. $\mathfrak{Sin}x$ kan även uttryckas i exponentialform och då gäller följande relation:

$$\mathfrak{Sin}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

där e = basen i det naturliga logaritmsystemet.

För $\mathfrak{Sin}x$ finnas tabeller utarbetade, bland vilka framförallt nämnes LIGOWSKI, Tafeln der Hyperbelfunktionen, Berlin 1890. I brist på dylika tabeller, kan man ju även utan olägenhet använda ekvationen (3), som endast fordrar tillgång till vanlig logaritmtabell.

Vi skola nu beräkna volymen *(V)* hos den rotationskropp, vars meridiankurva definieras genom (5).

$$V = \int_0^x \pi . \mathfrak{ArcSin}^2 x \cdot dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Härur erhålles genom integration *per partes:*

$$V = \pi \left\{ x\ \mathfrak{ArcSin}^2 x - 2 \int_0^x \frac{\mathfrak{ArcSin} x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot x\ dx \right\} \quad \ldots \ldots (9)$$

och genom upprepning av samma förfarande på den sista termen i (9) samt efter hyfsning:

$$V = \pi \left\{ x\ (\mathfrak{ArcSin}^2 x + 2) - 2\ \mathfrak{ArcSin} x \sqrt{1 + x^2} \right\} \quad \ldots \ldots (10)$$

Hela rotationskroppens volym erhålles om $x = x_b$ och det absoluta formtalet om dessutom (10) divideras med $\pi\ x_b \cdot \mathfrak{ArcSin}^2 x_b$. För det absoluta formtalet (φ) få vi alltså följande formel:

$$\varphi = 1 + \frac{2}{\mathfrak{ArcSin}^2 x_b} - \frac{2 \sqrt{1 + x_b^2}}{x_b \cdot \mathfrak{ArcSin} x_b} \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

För att möjliggöra räkning även med ekvationens logaritmiska form meddelas här även motsvarande volymformel. Enklast erhålles den genom att i (11) sätta:

$$\mathfrak{ArcSin} x_b = ln\ \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

som slutligen ger:

$$\varphi = 1 + \frac{2}{ln^2\ \zeta} - \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \cdot \frac{2}{ln\ \zeta} \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

där $\zeta = x_b + \sqrt{1 + x_b^2}$. Man kan även integrera (4) direkt, genom substitutionen $\xi = x + \sqrt{1 + x^2}$. Efter övergång till vanliga, BRIGGSKA logaritmer skrives (13):

$$\varphi = 1 + \frac{2\ M^2}{\log^2 \zeta} - \frac{2\ M}{\log \zeta} \cdot \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right) \quad \ldots \ldots \ldots (14)$$

där alltså $M = \log e = 0{,}43429$, $2\ M^2 = 0{,}37722$ och $2\ M = 0{,}86859$. Multipliceras denna ekvations högra membrum med $\pi \cdot x_b \log^2 \zeta$ erhålles rotationskroppens volym, uttryckt i en längdenhet = enheten för x_b och en diameterenhet = enheten för $\log \zeta$:

$$V = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} \right) (\log^2 \zeta + 2\ M^2) - \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta} \right) 2\ M \log \zeta \right] \quad . (14\ a)$$

Bestämningen av x_b för olika formkvoter kan endast ske genom successiv prövning av olika x_b-värden eller genom grafisk uppritning av formkvotens funktion av x_b. Vi bestämma med hjälp av båda dessa metoder de i Tab. 1 anförda värdena.

Tab. 1. **Tabell över x_b-värden och formtal samt värden å ekv. (3) med $P = 1$.**
Table of the x_b-values, the absolute form-factors and the values of equation (3) with $P = 1$.

Formkvot Form-quotient	x_b	Formkvot Form-quotient	x_b	Formkvot Form-quotient	Absoluta formtal Absolute Form-factor	x	y
0,50	0,0000	0,633	2,433	0,50	0,3333	± 0,5	± 0,2090
0,55	1,0581	0,711	4,930	0,55	0,3684	1,0	0,3828
0,60	1,819	0,734	6,289	0,60	0,4033	2,0	0,6270
0,65	2,823	0,739	6,649	0,65	0,4401	3,0	0,7897
0,70	4,430	0,748	7,406	0,70	0,4810	4,0	0,9097
0,75	7,572			0,75	0,5288	6,0	1,0822
0,80	15,755			0,80	0,5872	8,0	1,2058
1,00	∞					10,0	1,3021
						12,0	1,3810
						14,0	1,4477
						± 16,0	± 1,5056

I tab. 1 finnes även en serie absoluta formtal uträknade samt värden å ekv. (3) med $P = 1$ för ett antal x-värden.

Av ekv. (2) framgår det, att varje värde å $\frac{dy}{dx}$ motsvaras av ett positivt och ett numeriskt lika stort negativt x-värde. Om vi räkna med den positiva roten i (2) är alltså $\frac{dy}{dx}$ alltid positiv och förlöper symmetriskt i första och andra axelvinklarna. Integralkurvan blir då också symmetrisk och belägen i första och tredje axelvinklarna. Det är under sådana förhållanden lätt, att genom en förskjutning av koordinatsystemets origo få fram en kurva, som ger en allt efter förskjutningens storlek variabel reduktion av diametrarna i den övre stamdelen. Detta är emellertid ett specialfall (möjligen tillämpligt på björk och ev. andra lövträd, ungdomsstadier bl. a. av tall, etc.), som jag här icke närmare utformar. Det är säkert, att man i lämpliga fall genom en dylik förskjutning alltid kan nå en bättre överensstämmelse, men på grund av kurvans stereotypa form blir dess anslutning till materialet dock långt ifrån alltid så god som man skulle önska. På material av björk med markerad neiloidisk insvängning i toppen har jag fått differenser om ca. 2,5 % av basdiametern. Om de verkliga stamdimensionerna icke äro så smäckra i toppartiet, att kurvan uppvisar en påtaglig inflexionspunkt, behöver man sannolikt icke riskera så stora fel.

Beträffande ekv. (3) observeras, att för ett oändligt stort värde på x blir också y oändligt. Detta är av en viss betydelse emedan kurvor, som äga en med x-axeln parallell asymptot ofta ha en tendens att ge för stora värden på y i de närmare basen belägna partierna av stammen. Så är t. ex. fallet med den tidigare av mig föreslagna ekvationen:

$$y = P \cdot \operatorname{artcg}\left(\frac{x}{k}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

och derivat av densamma (1922). Detsamma gäller den av BEHRE (1923) föreslagna ekvationen:

$$y = \frac{x}{a + bx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

I vissa fall kan det förutses, att denna omständighet är till nackdel, i vissa andra fall kan det vara tvärtom. Stamformen är ju en så pass växlande företeelse, att det ena fallet icke i alla detaljer behöver vara det andra likt. I tab. 4 återfinnes en tillämpning av BEHRES formel. Ekv. (15) torde icke vara direkt användbar annat än möjligen i vissa specialfall.

För att pröva användbarheten på tall av ekv. (3) har jag gjort en jämförelse mellan det av JONSON (1911) samlade tallmaterialet och de av mig med ekv. (3) beräknade värdena. För att samtidigt möjliggöra en jämförelse med den av PETTERSON (1925) framställda, av två logaritmiska kurvor sammansatta funktionen, har jag bestämt x_b så, att kurvan sammanfaller med materialet i punkterna 50 och 80 % från toppen. I tab. 2 meddelas först det faktiska materialet, där diametrarna angivits med brösthöjdsdiametern som enhet och i punkter, liggande på var tiondedel av stamlängden mellan topp och brösthöjd. I tab. 3 återgivas de avvikelser som uppstå vid jämförelse mellan det faktiska materialet och de teoretiska värden, som beräknas enligt JONSONS kurva för tall (HÖJERS ekvation med biologisk konstant), PETTERSONS kurva och ekv. (3). Därvid bibehålles den princip för felens tecken, som använts av JONSON och PETTERSON.

Av denna tabell framgår det att JONSONS kurva i genomsnitt för hela materialet ger det minst goda resultatet med ett genomsnittligt fel, oav-

Tab. 2. **Det av JONSON uppmätta stammaterialet.**
The stemmaterial measured by JONSON.

Formkvot Form-quotient	Sektion, section									
	0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
0,650	1,000	930	876	814	749	650	548	445	317	175
0,705	1,000	940	892	841	779	705	617	514	379	204
0,746	1,000	950	907	862	811	746	669	563	427	241
0,794	1,000	966	932	892	846	794	732	649	534	326

Tab. 3. **Jämförelse mellan mätta och beräknade diametrar.**
Comparison between measured and calculated diameters.

Author	Formkvot Form-quotient	x_b	Sektion, section									
			0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Enligt JONSON Accord. to JONSON	0,650	—	+ 0,6	— 0,7	0	+ 0,6	+ 1,5	0	— 0,7	0	+ 0,3	+ 2,3
	0,705	—	+ 1,5	— 0,1	0	+ 0,3	+ 0,3	0	— 0,4	— 0,5	— 0,9	— 0,2
	0,746	—	+ 1,5	+ 0,2	0	+ 0,1	+ 0,3	0	— 0,3	— 1,5	— 2,6	— 2,1
	0,794	—	+ 0,2	— 0,1	0	— 0,1	— 0,1	0	+ 0,3	+ 0,4	+ 0,5	— 1,1
Enligt PETTERSON Accord. to PETTERSON	0,650	—	+ 1,7	— 0,3	0	+ 0,2	+ 1,1	0	— 0,3	+ 0,5	+ 0,3	+ 0,5
	0,705	—	+ 1,9	+ 0,1	0	+ 0,2	+ 0,1	0	+ 0,1	+ 1,1	+ 1,1	— 0,1
	0,746	—	+ 1,7	+ 0,3	0	+ 0,1	+ 0,3	0	— 0,1	— 0,8	— 0,6	— 0,9
	0,794	—	+ 0,2	— 0,1	0	— 0,1	— 0,2	0	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,9	— 0,2
Enligt ekv. (3) Accord. to (3)	0,650	2,985	+ 1,0	— 0,6	0	+ 0,4	+ 1,4	0	— 0,5	+ 0,5	+ 0,8	+ 1,4
	0,705	5,236	+ 1,7	0	0	+ 0,3	+ 0,2	0	— 0,2	0	— 0,2	— 0,5
	0,746	8,4	+ 0,6	+ 0,3	0	+ 0,1	+ 0,3	0	— 0,3	— 1,4	— 2,3	— 2,6
	0,794	14,6	+ 0,2	— 0,1	0	— 0,1	— 0,2	0	+ 0,3	+ 0,4	+ 0,4	— 1,6

sett tecknet, om 0,56 % av den mätta brösthöjdsdiametern. Därnäst kommer ekv. (3) med ett genomsnittligt fel om 0,52 % och bäst visar sig PETTERSONS kurvkombination med ett fel om 0,43 %. Dessa genomsnittsprocenter gälla alla sektioner. Borttages den nedersta, vilken på grund av rotansvällningen icke kan anses tillhöra kurvan, bliva felprocenterna för JONSONS kurva, ekv. (3) och PETTERSONS kurva resp. 0,51, 0,48 och 0,32 %. PETTERSONS kurva är alltså även nu något överlägsen. För de enskilda formkvoterna ger ekv. (3) bättre värden än de andra i ett fall, nämligen för formkvoten 0,705, med ett genomsnittligt fel om 0,31 %, mot 0,42 hos JONSON och 0,47 hos PETTERSON.

Det här nämnda materialet är dock endast ett exempel på ett medeltal av förekommande stamformer. Jag är här i tillfälle att göra en jämförelse även med ett annat material, bestående av 26 st. stammar av tall, mätta med stor noggrannhet under bark. Trädens ålder ligger mellan 60 och 100 år. Rotansvällningen har på dessa stammar eliminerats bort, varför den nedersta sektionen här kan anses tillhöra kurvan. Kurvorna har därför bestämts så, att de sammanfalla med materialet i punkterna 50 och 100 % av trädlängden från toppen till basen räknat.

I tab. 4 kan en jämförelse göras mellan materialet och några olika beräkningsmetoder. Det visar sig, att i detta fall ger ekv. (3) och JONSONS formel de bästa resultaten med ett genomsnittligt fel om resp. 0,39 och 0,40 %. PETTERSONS och BEHRES formler komma här efter med ett fel om resp. 0,46 och 0,48 %.

Tab. 4. **Jämförelse mellan mätta och beräknade diametrar.**
Comparison between measured and calculated diameters.

Author	x_b	Sektion, section									
		0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Materialet The material	—	100	957	911	861	802	738	651	558	414	230
Enligt ekv. (3) Accord. to (3)	6,575	100	960	915	864	806	738	656	554	421	239
Diff.	—	0	— 0,3	— 0,4	— 0,3	— 0,4	0	— 0,5	+ 0,4	— 0,7	— 0,9
Enligt PETTERSON Accord. to PETTERSON	14,094	100	960	916	865	807	738	654	545	403	227
Diff.	—	0	— 0,3	— 0,5	— 0,4	— 0,5	0	— 0,3	+ 1,3	+ 1,1	+ 0,2
Enligt JONSON Accord. to JONSON	—	100	959	914	863	805	738	658	559	428	238
Diff.	—	0	— 0,2	— 0,3	— 0,2	— 0,3	0	— 0,7	— 0,1	— 1,4	— 0,8
Enligt BEHRE Accord. to BEHRE	—	100	962	918	868	809	738	653	547	413	238
Diff.	—	0	— 0,5	— 0,7	— 0,7	— 0,7	0	— 0,2	+ 1,1	+ 0,1	— 0,8

Det är ju alldeles uppenbart, att så små som differenserna i allmänhet äro, kan en gradering av de olika kurvornas användbarhet icke ske på grundval av jämförelser med ett så begränsat och odifferentierat material, som här kommit till användning. Det är tvivelsamt om det någonsin blir möjligt, att bestämt uttala sig om en sådan sak, emedan den ena kurvan kan passa bättre för stamformen i en viss trakt, i en viss ålder, på en viss mark etc. än den andra. Det är ju icke säkert, att den kurva, som passar bäst för genomsnittet i ett helt land i alla specialfall är den bästa. Endast så mycket kan här sägas, att BEHRES formel i fråga om detta material måste anses vara den svagaste, på grund av att den ger större differenser i stammens nedre delar än de andra. Dock kan det mycket väl hända, att den i andra fall, t. ex. för andra trädslag, kan visa sig bättre än de logaritmiska ekvationerna.

SUMMARY.

To the Question of Tapering and Volume Calculation of Pine Trunks.

Latterly the question of the close estimation of the solid content of standing trees has, as we know, been much discussed in scientific journals. I shall not here touch upon the reasons for this; in any case plenty of good reasons can easily be found. The object of the present paper is only to complete a paper on an equation for the stem-curve, previously contributed by me to Skogsvårdsföreningens Tidskrift (1922). This equation was formulated at a time when the question of expressing the stem-form mathematically had not been developed much beyond the point reached after the appearance of a paper by Engineer HÖJER in 1903. Now there are a lot of proposals for mathematical expressions for the taper of stems and still more could easily be discovered if anyone devoted the time to it. Of the multitude of propositions it might perhaps be possible some time to make a selection or a grading, and in order to make it possible to test the formula proposed by me, I shall now develope it a little more fully than has been done before. From the start I will only lay stress upon the fact that this formula, as well as HÖJER's equation, proves its full value only when applied to the average of a considerable number of stems. The same is true of PETTERSON's combination of two logarithmic curves, although here a step is taken in the direction of individual conformity.

We can write the equation as follows:

$$y = P \cdot \log \left(\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

and it is obtained by starting from the expression:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{\sqrt{k^2 + x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

P is a constant $= \dfrac{P_1}{\log e}$, k is also constant and $y =$ the relative dimensions and $x =$ the relative distance from the top of the tree to the point where the dimension is y.

In order to secure greater conformity it is convenient to bring (1) to a form analogous to the form that PETTERSON has given to HÖJER's equation. Instead of the constant k, which determines the form quotient in (1), we introduce the base-abscissa x_b as a form-determining factor. Then (1) assumes the following form:

$$y = P \cdot \log (x + \sqrt{1 + x^2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Each different form-quotient is now characterized by a certain base-abscissa x_b, and the form-quotient diameter lies at a distance $\frac{x_b}{2}$ from the top. The constant P serves only to reduce the logarithms of $(x + \sqrt{1 + x^2})$ to percentages, centimeters etc. As it is unimportant for the present, we leave it

out, at the same time passing over to natural logarithms for further calculations. Denoting natural logarithms by *ln* we have the formula:

$$y = ln\ \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

From this form it is easy to pass over to the *hyperbolic functions,* having

$$\mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}\ x = ln\ \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$

whence it follows that

$$y = \mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}\ x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

As to the form, we then find that the function in question is very simple. As to the hyperbolic functions I will only mention that they are in the same relation to the equilateral hyperbola as the goniometrical functions to the circle, although their period is imaginary. $\mathfrak{Sin}\ x$ is defined by the series

$$\mathfrak{Sin}\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

where $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, etc. $\mathfrak{Sin}\ x$ can also be expressed in exponential form, when the following holds:

$$\mathfrak{Sin}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

where $e =$ the basis of the natural logarithmic system.

For $\mathfrak{Sin}\ x$ there are tables worked out, amongst which LIGOWSKI, Tafeln der Hyperbelfunktionen, Berlin 1890, must be mentioned before all. In the absence of such tables formula (3) is to be used.

We will now calculate the volume (V) of the rotation solid, whose meridian curve is defined by (5).

$$V = \int_0^x \pi\ \mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}^2\ x \cdot dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Hence by integration *per partes:*

$$V = \pi \left\{ x\ \mathfrak{Arc}\mathfrak{Sin}^2 x - 2 \int_0^x \frac{\mathfrak{Arc}\mathfrak{Sin} x}{\sqrt{1 + x^2}}\ x \cdot dx \right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

further by repeating the same procedure and after reducing:

$$V = \pi \left\{ x\ (\mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}^2\ x + 2) - 2\ \mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}\ x \cdot \sqrt{1 + x^2} \right\} \quad \ldots \quad (10)$$

The volume of the whole rotation solid is obtained by putting $x = x_b$ and the absolute form-factor, when (10) moreover is divided by $\pi\ x_b \cdot \mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}^2\ x_b$. For the absolute-form factor φ we then have

$$\varphi = 1 + \frac{2}{\mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}^2\ x_b} - \frac{2\ \sqrt{1 + x_b^2}}{x_b\ \mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}\ x_b} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

In order to render calculation possible even with the logarithmic form of the equation, I here communicate the corresponding volume formula. It will easily be found by putting

$$\mathfrak{Arc}\ \mathfrak{Sin}\ x_b = ln\ \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

We get

$$\varphi = 1 + \frac{2}{ln^2\ \zeta} - \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \cdot \frac{2}{ln\ \zeta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

where $\zeta = x_b + \sqrt{1 + x_b^2}$. It is also possible to obtain (13) directly by integrating (4) and then substituting $x + \sqrt{1 + x^2} = \xi$. After passing over to common logarithms we write (13) thus:

$$\varphi = 1 + \frac{2\,M^2}{\log^2 \zeta} - \frac{2\,M}{\log \zeta} \cdot \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

where $M = \log e = 0{,}43429$, $2\,M^2 = 0{,}37722$ and $2\,M = 0{,}86859$.

The determination of x_b for different form-quotients can only be obtained by successive trials, or graphically by tracing the function $\varphi = f(x_b)$. By the aid of these methods we determine the values given in table 1.

From equation (2) it appears that to every value of $\frac{dy}{dx}$ there corresponds a positive and a numerically equally great negative value of x_b. When calculating with the positive root in (2) we shall therefore always have $\frac{dy}{dx}$ positive. The integral curve will then be symmetrical and will pass through the first and third quadrants. That being so, it is very easy to obtain a new curve by displacing the origin of the coordinate system in a negative direction. This curve will give a reduction of the dimensions in the upper part of the stem, which depends on the extent of the displacement. This is, however, a special case (possibly appliable to birch and possibly other foliferous trees, juvenile stages of Pine [*Pinus sylvestris*] etc.), which I do not carry further here. In suitable cases it is certain that by such a displacement better conformity is always obtainable, but because of the stereotyped form of the curve it will sometimes happen that the curve is not as applicable to the material as is desirable.

As to equation (3), it may be observed that for an infinite value of x, y also will be infinite. This is of a certain importance, since curves having an asymptote parallel to the x-axis often have a tendency to give too great values of y in the basal parts of the stem. So it is in the case of the curve earlier proposed by me:

$$y = P \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

and derivates of it (1922). The same is true of an equation proposed by BEHRE (1923):

$$y = \frac{x}{a + bx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

In certain cases it may be anticipated that this circumstance will have its disadvantages, but in certain other cases the contrary may be true. The stem-form is such a variable phenomenon that one case need not necessarily be like the other. An application of BEHRE's formula is to be found in table 4. Equation (15) need not be directly applicable to Scotch Pine, except perhaps in some special cases.

In order to prove the usefulness of equation (3), I have made a comparison between the Pine material collected by JONSON (1911) and the values of (3). For the purpose also of making possible a comparison between the combination of two logaritmic curves, proposed by PETTERSON (1925), I have determined x_0 so that the curve is brought to coincide with the material at the points 50 and 80 % from the top. In table 2 the actual material is first communicated, the unit for the diameters being the diameter at breast height, the sections marking tenths of the distance between top and breast height. The deviations arising from comparison between the actual material and the theoretical values, are given in table 3. The principle for the signs of the deviations is the same as was used by JONSON and PETTERSON.

It can be calculated from this table that JONSON'S curve (the HÖJER equation with biological constant = 2,5) gives an average deviation of 0,56 % of the breast height diameter (the signs not being taken into consideration). In the next place comes equation (3) with an average deviation of 0,53 %. PETTERSON'S curve combination turns out to be the best, having an average deviation of 0,43 %. For the separate form-quotients equation (3) gives better values than the others in one case, viz. for the form-quotient 0,705 with an average deviation of 0,31 % corresponding to 0,42 % for JONSON and 0,47 % for PETTERSON.

The material used here is, however, only one exemple of an average of stem-forms appearing. I am in a position to make a comparison with other material as well, consisting of 26 stems of Pine, measured carefully under the bark. The root-swelling is here eliminated, the curve therefore being brougth to coincide with the material at the points 50 and 100 % of the length from the top. A comparison between the material and some different calculating methods is made in table 4. It proves that in this case equation (3) and JONSON'S formula are the best, with an average deviation of 0,39 and 0,40 % respectively. The average deviations of PETTERSON'S and BEHRE'S formulae are now 0,46 and 0,48 % respectively.

As the deviations are generally so small, it is quite evident that a grading of the formulae cannot be made on the basis of a comparison with such a poor and undifferentiated material as has been used here. It is doubtful whether it will yet be possible to express a decided opinion in this matter, as one curve may better suit the stem-form in a certain district, in a certain age, on a certain soil etc. than another. It is really not certain that a curve suited to the average stem-form of a whole country is the best for every special case.

Anförd litteratur.

Cited Literature.

BEHRE, C. EDW., 1923, Preliminary Notes on Studies of Tree Form. Journal of Forestry, Washington.

JONSON, T., 1911, Taxatoriska undersökningar om skogsträdens form, II. (Taxatorical Investigations on Tree Form, II). Skogsvårdsföreningens Tidskrift, Stockholm.

PETTERSON, H., 1925, Sambandet mellan kronan och stamformen. (The Relation between Crown and Stem Form). Skogsvårdsföreningens Tidskrift, Stockholm.

TIRÉN, L., 1922, Om en ekvation för stamkurvan. (On an Equation for the Stem Curve). Skogsvårdsföreningens Tidskrift, Stockholm.