MEDDELANDEN

FRÅN

STATENS SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 24. 1927—28

MITTEILUNGEN AUS DER FORSTLICHEN VERSUCHS-ANSTALT SCHWEDENS

24. HEFT

REPORTS OF THE SWEDISH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL FORESTRY

N:o 24

BULLETIN DE L'INSTITUT D'EXPÉRIMENTATION FORESTIÈRE DE LA SUÈDE

N:o 24

CENTRALTRYCKERIET — STOCKHOLM 1928

Redaktör:
Professor Dr HENRIK HESSELMAN

INNEHÅLL:

SVEN PETRINI

SEKTIONSKUBERINGENS NOGGRANNHET.

Vid så gott som alla noggranna kuberingar av fällt virke användes sektionsmätning, och å försöksväsendets provytor har hitintills även det kvarvarande beståndet kuberats på grundval av sektionsmätta provstammar.

Frågan om sektionsmätningens noggrannhet är emellertid ej utredd. I allmänhet synes man antaga, att 1 meter långa sektioner, då man kuberar varje sektion med användning av grundytan på mitten, ge praktiskt taget exakta värden på trädstammens kubikinnehåll. Detta antagande gäller emellertid icke för korta stammar, såvida ej deras form är nära överensstämmande med den kvadratiska paraboloidens.

ALEX. MAASS har år 1902 i Tidskrift för Skogshushållning i uppsatsen »Om kubering av liggande träd» framlagt resultaten av praktiskt utförda prövningar med en mängd kuberingsformler. Det visade sig bl. a., att 3 m långa sektioner gåvo en kubikmassa, som var 2 % lägre än det värde, som erhölls med 1 m långa sektioner. Härvid anges dock icke trädens längd och ej heller deras form.

Det kan vara av praktiskt värde att studera felmöjligheterna närmare. Med ledning av resultaten i dessa avseenden blir det nämligen möjligt att bedöma huru mycket arbete som behöver nedläggas på en viss mätning, om man ej vill riskera fel som överstiga en fastställd procent. För långa träd reduceras felen mycket snabbt, varför man härvidlag kan tänkas göra besparingar i arbete genom att använda längre sektioner än som är nödvändigt vid mätning av smärre träd. För dessa senare kan man behöva minska sektionslängden, exempelvis till en halv meter, om goda värden skola kunna erhållas.

Och om det gäller att utröna noggrannheten av enklare kuberingsmetoder, är det av stort värde att kunna jämföra dem i detta avseende med sektionskubering. En metod som är enklare än sektionsmätningen eller som har vissa andra fördelar framför denna, bör givetvis ha företräde, om den ej medför en försämring av noggrannheten. Det är således av en icke ringa grundläggande betydelse att lära känna huru sektioneringen verkar under olika förhållanden.

Matematiskt kan en prövning härav genomföras, om blott man har till förfogande en god ekvation för stamkurvan. Här kunna vi välja på den klassiska paraboloidiska formeln och HÖJERS ekvation. Ehuru det torde vara ställt utom tvivel, att den senare ger en mera trogen utjämning av trädens stamform, har jag likväl ansett det vara av intresse att genomföra en undersökning för båda dessa ekvationer.

För undersökningens utförande erfordras först härledandet av vissa nya formler, och för klarhetens skull vill jag börja med att angiva de beteckningar som komma att användas.

V = stammens totala volym, beräknad efter formeln för paraboloiderna $\left(V = \frac{GH}{\nu + 1}\right)$.

W = stammens totala volym, beräknad efter HÖJERS ekvation ($W = GHF$).

V_1 = » » » enligt sektionsmätning.

v = volymen av en viss sektion enligt formel.

v_1 = » » » » » » mittkubering.

H = stammens totala längd.

h = avståndet från toppen till ett visst tvärsnitt.

h_1 = » » » » närmaste ändytan av en viss sektion.

h_2 = » » » » bortre » » » » »

$\overline{h}_n$ = » » » » grundytan på mitten av n^{te} sektionen.

$l = h_2 - h_1$ = sektionslängden, lika för alla sektioner i ett visst fall.

$\lambda = \frac{l}{H}(x_b - 1)$ = sektionslängden, uttryckt i de enheter, som användas med PETTERSONS framställningssätt.

G = stammens basgrundyta vid marken.

g = en grundyta som ligger på avståndet h från toppen.

$g_1, g_2 \overline{g}_n$ = grundytorna på avstånden h_1, h_2, resp. $\overline{h}^n$ från toppen.

d och D = motsvarande diametrar till g och G.

$n = \left(\frac{H}{l} + \frac{1}{2}\right)$ sektionernas antal, där n alltid är ett helt tal (decimalerna strykas efter additionen).

φ = formkvoten, här = basformkvoten.

x_b, ν och F betyda resp. basabskissan med funktionen $y = \log x$, formexponenten och absoluta formtalet.

M = modylen = ${}^{10}\log e = 0{,}434 \cdot 2945$.

Formeln för sektionernas antal erhålles på följande sätt.

Första sektionsmåttet förlägges på avståndet $\frac{l}{2}$ m från basen. Övriga måttställen komma därpå med ett mellanrum $= l$ m, och antalet måttställen blir sålunda

$$n = \frac{H - \frac{l}{2}}{l} + 1 = \frac{H}{l} + \frac{1}{2}.$$

Eftersom n alltid är ett helt tal, är det heltalssiffran för n, som anger huru många sektionsmått, som tagas i ett visst fall.

Exempel: Ett träd är 17,3 m långt och sektioneras med $l = 3$ m. Vi erhålla $\frac{17{,}3}{3} + 0{,}5 = 6{,}2$, och alltså är $n = 6$.

Härvid räknas som om ett sektionsmått tages även då trädets topppunkt ligger vid måttstället. En dylik toppsektion har emellertid diametern $= 0$, varför även kubikmassan av sektionen blir $= 0$.

Formler för beräkning av noggrannheten vid sektionering av paraboloider.

Den verkliga volymen av en viss sektion kan skrivas

$$v = \int_{h_1}^{h_2} g dh = \int_{h_1}^{h_2} a h^{\nu} dh = a \Big/_{h_1}^{h_2} \frac{h^{\nu+1}}{\nu+1} = \frac{a}{\nu+1}(h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1}).$$

Vid mittkubering av sektionen är

$$v_1 = \bar{g} l = \bar{g}(h_2 - h_1).$$

Mittgrundytan $\bar{g}$ är belägen på avståndet $\bar{h} = \frac{h_2 + h_1}{2}$ från toppen, och alltså är

$$\bar{g} = a \bar{h}^{\nu} = \frac{a}{2^{\nu}}(h_2 + h_1)^{\nu}.$$

Härav följer att

$$v_1 = \frac{a}{2^{\nu}}(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)^{\nu}.$$

Förhållandet mellan den verkliga och den sektionsmätta volymen för en viss sektion är alltså

$$\frac{v}{v_1} = \frac{2^{\nu}}{(\nu + 1)} \frac{(h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1})}{(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)^{\nu}} \quad \text{(I)}$$

Ur formel (I) får man direkt en formel för beräknande av felet som begås vid mittkubering av hela trädet. I detta fall är nämligen $h_2 = H$ och $h_1 = 0$. Formeln blir följande.

$$\frac{V}{V_1} = \frac{2^{\nu}}{\nu + 1} \quad \text{(I a)}$$

Mittkubering av den kvadratiska paraboloiden, då ν har värdet 1, ger $V = V_1$, d. v. s. exakt resultat; av konen, med $\nu = 2$, ger $V = \frac{4}{3} V_1$, d. v. s. $\frac{1}{3}$ för lågt resultat, etc.

Formel (I) utvisar felkuberingens storlek i en sektion vilken som helst. Felet blir olika stort inom olika sektioner utom för det fallet att ν har värdet 1. För att kunna beräkna totala felet för stammen i dess helhet, då vi använda oss av ett flertal sektioner, måste man också ha en formel för beräknande av huru stor del av hela trädets volym varje sektions volym utgör. Genom att väga de resp. sektionernas felprocenter med de tal som uttrycka hur stor del varje sektion utgör av hela trädets volym kunna vi därefter beräkna medeltalet av felen för stammen som helhet. En dylik formel kan ha sitt värde även för andra beräkningar och meddelas här nedan (formel II).[1]

Hela stammens volym är $V = \frac{GH}{\nu + 1}$, $a = \frac{G}{H^\nu}$, och enligt det föregående är

$$v = \frac{a}{\nu + 1} \cdot (h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1}) = \frac{G \cdot (h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1})}{H^\nu (\nu + 1)}.$$

Följaktligen är
$$\frac{v}{V} = \frac{h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1}}{H^{\nu+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Emellertid kan man för här ifrågavarande ändamål beräkna formler, som med mindre arbete direkt ge det önskade resultatet. Då sektioneringen utföres från rotändan mot toppen, är första sektionens mittgrundyta belägen på ett avstånd från toppen, som är $\overline{h}_1 = H - \frac{l}{2}$; den andra sektionens mittgrundyta ligger en sektionslängd närmare toppen, varför $\overline{h}_2 = H - \frac{3\,l}{2}$ o. s. v. Generellt erhålles $\overline{h}_n = H - \frac{2\,n - 1}{2} \cdot l$. Summan av alla sektionernas volym är $V_1 = l \sum_1^n \overline{g}$ och vidare är $\overline{g}_1 = a\overline{h}_1^{\,\nu}$; $\overline{g}_2 = a\overline{h}_2^{\,\nu}$; $\overline{g}_n = a\,\overline{h}_n^{\,\nu}$. Insättas de förut erhållna uttrycken för $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2 \ldots \overline{h}_n$, få vi följande formel för den sektionsmätta volymen.

$$V_1 = al\left[\left(H - \frac{l}{2}\right)^\nu + \left(H - \frac{3\,l}{2}\right)^\nu + \ldots + \left(H - \frac{2\,n - 1}{2} \cdot l\right)^\nu\right].$$

Eftersom volymen av en paraboloid kan skrivas $V = \frac{aH^{\nu+1}}{\nu + 1}$, så är förhållandet mellan den rätta volymen och den sektionerade:

[1] Vid användning av denna metod är det riktigare att invertera Formel (I) och räkna felprocenten inom varje sektion på den rätta volymen: $\frac{v_1}{v} = \frac{(\nu + 1)\,(h_2 - h_1)\,(h_2 + h_1)^\nu}{2^\nu\,(h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1})}$.

$$\frac{V}{V_1} = \frac{H^{\nu+1}}{l(\nu+1)\left[\left(H-\frac{l}{2}\right)^{\nu} + \left(H-\frac{3\,l}{2}\right)^{\nu} + \ldots + \left(H-\frac{(2\,n-1)\,l}{2}\right)^{\nu}\right]} \qquad \text{(III)}$$

Med hjälp av formel (III) kan felkuberingen beräknas i procent av den sektionsmätta volymen genom insättande av de värden på H, l och ν som gälla i varje särskilt fall.

Sektionsmätningen bör naturligtvis alltid börja vid rotändan, ty en överskjutande del av en sektion i toppen kan i allmänhet försummas, vilket ej är fallet med ett motsvarande stamstycke nedtill. Då trädets längd är jämnt delbar med sektionslängden, falla emellertid måttställena på samma avstånd från toppen, vare sig man förlägger det första sektionsmåttet en halv sektionslängd från rotändan eller från toppen. I detta fall kan formel (III) förenklas och får då följande utseende.

$$\frac{V}{V_1} = \frac{2^{\nu} H^{\nu+1}}{l^{\nu+1}(\nu+1)\left[1 + 3^{\nu} + 5^{\nu} + 7^{\nu} + \ldots + (2\,n-1)^{\nu}\right]} \qquad \text{(III a)}$$

Vid beräkningen av felet i alla sådana fall, då stammens längd är jämnt delbar med sektionslängden, exempelvis enmeterssektionering av träd med längder i hela meter, tvåmeterssektionering av träd med längder i jämna meter, tremeterssektionering av träd med längder som äro multipler av 3 m etc. kan formel (III a) komma till användning. Därvid upprättas lämpligen en hjälptabell över $\sum 1^{\nu} + 3^{\nu} + 5^{\nu} + \ldots + (2\,n-1)^{\nu}$ för de olika ν-värden som komma ifråga. På detta sätt ha siffrorna i Tab. I nedan erhållits.

Tab. 1. **Felkubering i procent av sektionerad volym med en meters sektioner.**
Fehler in Prozent des mit 1 m langen Sektionen kubierten Stammvolumen.

Trädets längd i m Baumlänge in Metern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu = 3$ Neiloid ...... —	100	14,30	5,88	3,23	2,00	1,41	1,03	0,79	0,62
$\nu = 2$ Kon Kegel —	$33^1/_3$	$6^2/_3$	2,86	1,59	1,01	0,70	0,51	0,39	0,31
$\nu = {}^2/_3$ Kub. Paraboloid .... +	4,76	1,83	1,01	0,70	0,47	0,35	0,28	0,23	0,19
Trädets längd i m Baumlänge in Metern	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**20**	**25**	**30**
$\nu = 3$ Neiloid ...... —	0,50	0,41	0,35	0,30	0,26	0,22	0,13	0,08	0,06
$\nu = 2$ Kon Kegel —	0,25	0,21	0,17	0,15	0,13	0,11	0,06	0,04	0,03
$\nu = {}^2/_3$ Kub. Paraboloid .... +	0,16	0,14	0,12	0,105	0,095	0,083	0,053	0,036	0,023

Tecknet — anger att sektionskuberingen ger för lågt resultat, tecknet + att den sektionsmätta volymen är större än den verkliga. Felprocenten för trädlängden 1 m anger det fel, som uppstår vid mittkubering av kroppen.

Formler för beräkning av noggrannheten vid sektionskubering av kroppar, uppbyggda i överensstämmelse med HÖJERS ekvation.

I enlighet med PETTERSONS uppställning av HÖJERS ekvation utgå vi från kurvan $y = \log x$, där y representerar stammens diameter eller radie, x är abskissan och $x_b - 1$ är ett uttryck för stammens totala längd. Sektionslängden λ måste uttryckas i samma enhet som stamlängden, och med enkel regula de tri erhåller man reduktionsformeln $\lambda = (x_b - 1) \cdot \frac{l}{H}$, där l är sektionslängden i m och H är totala stamlängden i m. På samma sätt fås $h' = (x_b - 1)\frac{h_1}{H}$ och $h'' = (x_b - 1)\frac{h_2}{H}$, där h_1 och h_2 äro de resp. avstånden i m från toppen till sektionens båda ändgrundytor. För räkningarna behöva vi emellertid abskissevärdena, och dessa äro resp. $x_1 = h' + 1$ och $x_2 = h'' + 1$, eftersom stammens topp är förlagd i punkten $x = 1$. Sektionslängden λ är $= x_2 - x_1$ och är även $= h'' - h'$.

Verkliga volymen i enheter av en sektion vilken som helst kan skrivas

$$v = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \, dx = \pi M^2 \int_{x_1}^{x_2} ({}^e\log_x)^2 \, dx = \pi M^2 \Big/_{x_1}^{x_2} x\,[({}^e\log x - 1)^2 + 1)] =$$

$$= \pi \{\lambda M^2 + x_2 (\log x_2 - M)^2 - x_1 (\log x_1 - M)^2\}.$$

På samma sätt erhålles en formel för hela stammens kubikmassa genom att integrera mellan gränserna 1 och x_b. Kubikmasseformeln för hela stammen får då följande utseende.

$$W = \pi M^2 \left\{ x_b \left[\left(\frac{\log x_b}{M} - 1 \right)^2 + 1 \right] - 2 \right\} \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

Sektionens kubikmassa enligt mittkubering är $v_1 = \bar{g}\lambda = \bar{g}(x_2 - x_1)$, och $\bar{g} = \pi \bar{y}^2 = \pi \left(\log \frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2$ Således är

$$v_1 = \pi\lambda \left(\log \frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2.$$

Vid mittkubering av hela trädet är $\lambda = x_b - 1$, $x_1 = 1$ och $x_2 = x_b$, varför

$$V_1 = \pi (x_b - 1) \left(\log \frac{x_b + 1}{2} \right)^2$$

Formeln för felet vid mittkubering av hela träd blir följaktligen

$$\frac{W}{V_1} = \frac{x_b [(\log x_b - M)^2 + M^2] - 2 M^2}{(x_b - 1) \left(\log \frac{x_b + 1}{2} \right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

Med hjälp av formel (V) har nedanstående Tab. 2 upprättats, och till jämförelse meddelas här även de värden som erhållas med användande av formel (I a), då paraboloidisk form förutsättes.

Tab. 2. **Procentuellt fel vid mittkubering av en hel stam.**
Prozentuale Fehler bei Kubierung nach dem Durchmesser an der Mitte des Stammes.

Formklass Basalformklasse	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
Enl. HÖJERS ekv.... Nach HÖJERS Gleichung	(— 33¹/₃)	— 21,40	— 11,93	— 4,49	+ 1,17	+ 5,19	+ 7,58
Enl. formeln för paraboloiderna ...... Nach der Formel $g = ah^{\nu}$.	— 33¹/₃	— 21,32	— 12,28	— 5,52	— 0,58	+ 2,86	+ 4,95

Som synes är i de lägsta formklasserna felet vid mittkubering mycket nära lika, vare sig den ena eller andra stamformen förutsättes. Från och med formklass 0,60 skilja sig resultaten för de båda olika ekvationerna, och skillnaden blir allt större, ju högre formklassen är. Accepteras den HÖJER'ska ekvationen såsom varande det riktigaste uttrycket för stamkurvan, blir resultatet av denna undersökning följande.

Då basformkvoten har ett lägre värde än 0,69, $x_b = \sim 5{,}3$, motsvarande för träd över 16 meters längd brösthöjdsformklass 0,68 à 0,69, ger mittkubering av hela stammen för lågt resultat, i motsatt fall för högt. Felen blir avsevärt stora, så snart formklassen avviker från det medelvärde då rätt resultat erhålles.

I analogi med den förut för paraboloiderna deducerade formel (III) kan man lätt få fram en formel vilken anger felprocenten vid sektionskubering av en kropp som är uppbyggd efter ekvationen $y = \log x$. Vi räkna i de enheter som förut angivits, och λ är sektionslängden, uttryckt i dessa enheter, x_b är basdiameterns abskissavärde.

Formeln får följande utseende.

$$\frac{W}{V_1} + \frac{x_b\left[(\log x_b - M)^2 + M^2\right] - 2\,M^2}{\lambda \sum\limits_{1}^{n} \left[\log\left(x_b - \frac{\lambda}{2}\right)\right]^2 + \left[\log\left(x_b - \frac{3\,\lambda}{2}\right)\right]^2 + \ldots + \left[\log\left(x_b - \frac{(2\,n - 1)\,\lambda}{2}\right)\right]^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Det bör observeras, att täljaren i formel (VI) är konstant för ett och samma värde på x_b. Undersökningen bör därför genomföras för varje formklass särskilt. Kallas täljaren T och sättes $x_b - \frac{\lambda}{2} = \varkappa$, kan formeln skrivas

$$\frac{W}{V_1} = \frac{T}{\lambda \{[\log \varkappa]^2 + [\log(\varkappa - \lambda)]^2 + [\log(\varkappa - 2\lambda)]^2 + + [\log(\varkappa - 3\lambda)]^2 + \ldots\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI a)}$$ [1]

De följande räkningarna äro utförda efter formel (VI a) med användande av VEGAS sjuställiga logaritmtabeller och en vanlig multiplikationsmaskin. Felen uttryckas i procent av den genom sektionskubering erhållna kubikmassan, och tecknet — betyder att sektionskuberingen ger för låga resultat, tecknet + att man vid sektionering får en större volym än HÖJERS ekvation anger.

Då formklassen är lika, blir felprocenten densamma för ett träd som är 10 m långt och mätes i enmeterssektioner och för ett träd som är 20 m långt och uppmätes i 2 m långa sektioner, d. v. s. felet beror — förutom av formklassen — på huru många sektioner som användas. Utan inskränkning gäller emellertid detta blott om stammen uppdelas i sektioner som alla ha samma längd.

Då sektionslängden ej går jämnt upp i trädets längd, få vi antingen ett överskjutande toppstycke, maximalt lika långt som sektionslängden, som blir alldeles omätt, eller också faller sista sektionsmåttet på ett ställe som är närmare toppändan än en halv sektionslängd. I dessa fall uppträda oregelbundenheter med avseende på de erhållna felen, och inverkan härav blir olika inom olika formklasser. Innan vi gå över till de mera komplicerade förhållanden som av dessa anledningar uppstå vid sektionsmätning, finnes det därför anledning att utreda i vilken grad resultatet är beroende av antalet sektioner, då dessa alla äro av samma längd. Det förtjänar att påpekas, att detta fall är precis detsamma som enmeterssektionering av träd, vilkas längder endast variera i hela meter.

Vid beräkning av felen inom formklass 0,50 har formel (III a) begagnats, för de övriga formel (VI a). Värdena för x_b ha tagits direkt från PETTERSONS uppsats 1925: »Sambandet mellan kronan och stamformen».

---

[1] För T erhållas följande värden

Formklass ...	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
T	0,0055 · 7122	0,065 · 5173	0,352 · 8340	1,497 · 9516	6,241 · 755	30,761 · 706

Tab. 3. **Felkuberingsprocent vid sektionering med lika långa sektioner enligt Höjers stamkurva.**

Prozentuale Fehler bei Kubierung mit gleichlangen Sektionen nach der HÖJERschen Stammkurve.

Antal sektioner Anzahl der Sektionen	Basformkvot Basalformklasse						
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
1	— 33 1/3	— 21,4	— 11,9	— 4,5	+ 1,15	+ 5,2	+ 7,6
2	— 6 2/3	— 4,8	— 3,35	— 2,0	— 0,6	+ 0,9	+ 2,35
3	— 2,85	— 2,1	— 1,55	— 1,0	— 0,5	+ 0,18	+ 1,00
4	— 1,60	— 1,2	— 0,85	— 0,6	— 0,35	+ 0,004	+ 0,50
5	— 1,00	— 0,75	— 0,55	— 0,4	— 0,25	— 0,045	+ 0,30
10	— 0,25	— 0,19	— 0,14	— 0,10	— 0,07	— 0,039	+ 0,03
15	— 0,11	— 0,08	— 0,06	— 0,05	— 0,034	— 0,022	+ 0,002
20	— 0,06	— 0,05	— 0,04	— 0,03	— 0,019	— 0,013	— 0,008

Vid grafisk uppläggning av siffrorna i Tab. 3 kan man se huru många sektioner som erfordras — oberoende av trädens längd — för att en stam med en viss formklass skall kunna kuberas med en viss angiven grad av noggrannhet. Vissa formklasser kunna — från matematisk synpunkt sett — kuberas exakt, om man blott väljer det rätta antalet sektioner. Sålunda visar det sig att en stam, som har basformkvoten ~ 0,69 och vilkens avsmalning följer HÖJERS ekvation, blir rätt kuberad med en enda sektion, d. v. s. medelst mittkubering. På samma sätt framgår, att

basformkvot ~ 0,72 blir rätt kuberad, om 2 sektioner användas;
» ~ 0,737 » » » » 3 » » ;
» ~ 0,75 » » » » 4 » » ;
» ~ 0,76 » » » » 5 » » ;
» ~ 0,78 » » » » 10 » » ;
» ~ 0,80 » » » » 15 » » .

För formklasser under 0,69 ger sektionskuberingen alltid för lågt resultat, även om 20 sektioner användas. Felet blir emellertid allt mindre ju flera sektionerna äro.

För högre värden på basformkvoten än 0,69 inträffar det egendomliga förhållandet, att felet byter om tecken, då sektionernas antal ökas. Se vi exempelvis på siffrorna för 0,80 i Tab. 3, finna vi, att en kropp med denna form mittkuberas 7,6 % för högt. Vid uppdelande av kroppen i 2, 3 etc. sektioner blir felet mindre och mindre till dess att felkuberingen med 15 sektioner endast uppgår till två tusendels procent av den sektionsmätta volymen. Om vi emellertid uppdela kroppen i 20 sektioner, blir felet — 0,008 %, d. v. s. det övergår till att vara negativt, och det uppgår till ett numeriskt större belopp, då vi öka sektionernas antal. Denna egendomlighet uppträder även inom de övriga högre formklasserna. Sedan felet en gång har bytt om tecken, bibehålles det nya tecknet, och med ökat antal sektioner minskas återigen felets numeriska värde. Felprocentens numeriska maximum på den negativa sidan ligger exempelvis vid sektionsantalet 7 för formklass 0,75.

Det är av teoretiskt intresse att närmare undersöka varför sektionskuberingen i vissa formklasser ger för lågt värde och varför man inom andra med ett ringa antal sektioner får ett positivt fel, som minskas ju flera sektioner som användas, tills det går över på den negativa sidan och uppnår ett numeriskt maximum, från vilket värde det sedan sakta sjunker mot noll.

Med Henrik Petterssons uppställning av den logaritmiska funktionen, som möjliggör en behandling av alla formklasser samtidigt, representerade av en och samma kurva med olika x_b-värden, går det relativt lätt för sig att studera denna fråga.

Då det gäller kubering, är det fördelaktigt att i stället för kurvan $y = \log x$ hålla sig till kurvan $y = (\log x)^2$. Kvadraterna på de logaritmerade x-värdena representera grundytorna på olika ställen av stammen, om de multipliceras med π. Vid division förkortas π bort, och man kan då fritt laborera enbart med kvadraterna.

Henrik Petterson har år 1926 studerat kurvan $y = (\log x)^2$ och funnit, att den har en inflexionspunkt vid $x = e$, då e är basen för de naturliga logaritmerna $= 2,718 \cdot 2818$. Toppdelen av kurvan förlöper konvext mot x-axeln fram till inflexionspunkten. För högre x-värden än $x = e$ är kurvan konkav mot x-axeln.

Härav följer omedelbart, att en sektionskubering inom formklasser som äro lägre än 0,62 (motsvarande $x_b = e$), alltid måste ge ett för lågt värde på kubikmassan.

För formklasser motsvarande högre värden än $x = e$ bli förhållandena mera komplicerade. Toppkurvan blir alltjämt för lågt kuberad, men den del av stammen som ligger längre från toppen än punkten $x = e$, blir i stället för högt kuberad. Resultatet sammansättes på grund härav så, att det i vissa fall blir för högt i andra för lågt, beroende på om toppsektionernas negativa fel dominerar eller ej. Och detta beror i sin tur dels på hur stor del av kubikmassan toppstycket utgör — olika inom olika formklasser — dels på felkuberingens procentuella storlek inom toppdelen, resp. basdelen.[1] Därvid är att märka, att ju högre x-värdena äro för en viss sektion, desto mindre bli felen med en och samma sektionslängd, då man räknar i procent, eftersom ett större x-värde motsvarar en grövre dimension. Detta gör exempelvis, att man för basdelen icke får något maximum för det procentiska felet, om man använder en enhet som sektionslängd, ehuru ett dylikt maximum kan konstateras i fråga om felkuberingens absoluta storlek, vilket maximum är beläget i 4:e sektionen från toppen ($x_1 = 4$; $x_2 = 5$). Det procentiska felet inom olika belägna, mittkuberade sektioner med längden = 1 enhet ändras hastigt. Det uppgår till nära — 14,5 % i översta toppsektionen ($x_1 = 1$; $x_2 = 2$). Därefter faller det inom nästa sektion till — 0,15 %, övergår inom tredje

[1] Beräkningen av felet för hela trädet i Tab. 4 har dock utförts genom att sätta total volymen enligt formel i procentförhållande till total sektionerad volym.

Tab. 4. **Felkuberingsprocent vid sek-**
Fehler in Prozent bei sektionsweiser

Formklass 0,701 / Formklasse 0,701						Form- / Form-		
$x_b = 6{,}154 \cdot 8454$ Toppdelens volym = 8,69 % av hela trädets. Das Volumen der konvexen Partie = 8,69 % des gesamten Baumvolumens.						$x_b =$ Toppdelens volym = Das Volumen der konvexen Par-		
Antal sektioner / Anzahl der Sektionen			Felkuberingsprocent / Prozentualer Fehler			Antal sektioner / Anzahl der Sektionen		
Toppdel / Konvexer Partie	Basdel / Konkaver Partie	Summa / Summe	Toppdel / Konvexer Partie	Basdel / Konkaver Partie	Summa / Summe	Toppdel / Konvexer Partie	Basdel / Konkaver Partie	Summa / Summe
1	2	3	— 8,71	+ 0,2480	— 0,475	1	5	6
2	4	6	— 2,80	+ 0,c602	— 0,182	2	10	12
4	8	12	— 0,76	+ 0,0149	— 0,052	4	20	24

Tab. 5. **Fel i procent vid sektionskubering av**
Prozentuale Fehler bei sektionsweiser Kubierung von Baum-

Stammens längd i meter / Baumlänge in Metern	Basform- (Basalform-								
	0,50			0,55			0,60		
	Sektionslängd / Sektionslänge			Sektionslängd / Sektionslänge			Sektionslängd / Sektionslänge		
	1 m	2 m	3 m	1 m	2 m	3 m	1 m	2 m	3 m
1	— 33 1/3	—	—	— 21,4	—	—	— 11,9	—	—
2	— 6 2/3	— 33 1/3	—	— 4,8	— 21,4	—	— 3,35	— 11,9	—
3	— 2,85	— 12,5	— 33 1/3	— 2,1	— 9,5	— 21,4	— 1,55	— 7,9	— 11,9
4	— 1,60	— 6 2/3	— 13,75	— 1,2	— 4,8	— 8,95	— 0,85	— 3,35	— 5,7
5	— 1,00	— 4,2	— 11,1	— 0,75	— 3,15	— 8,95	— 0,55	— 2,45	— 7,7
10	— 0,25	— 1,00	— 2,17	— 0,19	— 0,75	— 1,55	— 0,14	— 0,55	— 1,12
15	— 0,11	— 0,45	— 1,00	— 0,08	— 0,33	— 0,75	— 0,06	— C,19	— 0,55
20	— 0,06	— 0,25	— 0,58	— 0,05	— 0,19	— 0,44	— 0,035	— 0,14	— 0,35
25			— 0,35			— 0,26			— 0,19
30			— 0,25			— 0,19			— 0,14

sektionen, som ligger kring inflexionspunkten, till att bli positivt: + 0,11 %, samt faller sedan ganska jämnt till allt mindre belopp med positivt tecken. I den sjätte sektionen är det sålunda nere vid mindre än 0,05 %, och i den 25:e ($x_1 = 25$; $x_2 = 26$) når det ej högre än till + 0,00286 %.

För att klarlägga huru det kommer sig, att man vid högre formklasser för hela stammen får ett negativt fel vid tillräckligt stort antal sektioner, har jag

tionsmätning inom högre formklasser.
Kubierung innerhalb höheren Formklassen.

klass 0,749 klasse 0,749			Formklass 0,789 Formklasse 0,789					
= 11,309 · 6908 = 2,224 % av hela trädets. tie = 2,224 % des gesamten Baumvolumens.			x_b = 21,619 · 3816 Toppdelens volym = 0,638 % av hela trädets. Das Volumen der konvexen Partie = 0,638 % des gesamten Baumvolumens.					
Felkuberingsprocent Prozentualer Fehler			Antal sektioner Anzahl der Sektionen.			Felkuberingsprocent Prozentualer Fehler		
Toppdel Konvexer Partie	Basdel Konkaver Partie	Summa Summe	Toppdel Konvexer Partie	Basdel Konkaver Partie	Summa Summe	Toppdel Konvexer Partie	Basdel Konkaver Partie	Summa Summe
— 8,71	+ 0,1223	— 0,0585	1	11	12	— 8,71	+ 0,0470	— 0,0044
— 2,80	+ 0,0302	— 0,0310	2	22	24	— 2,80	+ 0,0126	— 0,0048
— 0,76	+ 0,0076	— 0,0093	4	44	48	— 0,76	+ 0,0032	— 0,0017

stammar, uppbyggda enligt HÖJERS ekvation.
stämmen, die nach der HÖJERschen Gleichung konstruiert sind.

kvot quotient								
0,65			0,70			0,75		
Sektionslängd Sektionslänge			Sektionslängd Sektionslänge			Sektionslängd Sektionslänge		
1 m	2 m	3 m	1 m	2 m	3 m	1 m	2 m	3 m
— 4,5	—	—	+ 1,15	—	—	+ 5,2	—	—
— 2,0	— 4,5	—	— 0,6	+ 1,15	—	+ 0,9	+ 5,2	—
— 1,0	— 7,5	— 4,5	— 0,5	— 8,3	+ 1,15	+ 0,18	— 10,4	+ 5,2
— 0,6	— 2,0	— 3,75	— 0,35	— 0,6	— 3,05	+ 0,004	+ 0,9	— 3,7
— 0,4	— 2,1	— 7,05	— 0,25	— 2,2	— 6,5	— 0,045	— 2,83	— 5,7
— 0,10	— 0,4	— 0,68	— 0,07	— 0,25	— 0,38	— 0,039	— 0,045	— 0,23
— 0,05	— 0,17	— 0,40	— 0,034	— 0,16	— 0,25	— 0,022	— 0,165	— 0,045
— 0,03	— 0,10	— 0,29	— 0,019	— 0,07	— 0,27	— 0,013	— 0,039	— 0,29
		— 0,13			— 0,08			— 0,031
		— 0,10			— 0,07			— 0,039

för tre olika formklassvärden beräknat den felprocent, med vilken toppdelen, resp. basdelen blir kuberad samt den relativa storleken av toppdelens och basdelens volymer. Det lägsta undersökta formklassvärdet borde förläggas omkring 0,70, nästa vid ungefär 0,75 och det högsta i närheten av 0,80.

För att få talen komparabla och ändringarna kontinuerliga har jag utgått ifrån att toppdelen indelas i en, två eller flera sektioner, varefter ett sådant

x_b-värde väljes för hela stammen att även basdelen blir jämnt uppdelad i sektioner av samma längd som sektionslängden inom toppdelen. Resultatet av beräkningarna är framlagt i Tab. 4.

Inom samtliga exempel visar sig den negativa tendensen hos toppdelen överväga över den positiva tendensen hos basdelen. Med en viss sektionslängd, räknad i enheter, blir ju felkuberingsprocenten hos toppdelen konstant, oberoende av formklassen för hela trädet, medan däremot toppdelens volym i förhållande till basdelen snabbt minskar med stigande formklass. Det positiva felet hos basdelen, räknat i procent av dennas volym, avtager emellertid i hastigare tempo än volymen ökar i förhållande till toppdelen, varför alltså det negativa felet inom toppdelen kommer att dominera för hela trädet. Med samma antal sektioner för hela trädet (6, 12, 24), blir emellertid totala felprocentens belopp lägre, ju högre formklassen är.

Vid sektioneringens tillämpande på träden händer det ytterst sällan att både den konvexa toppdelen och den konkava basdelen med den valda sektionslängden kommer att bli jämnt uppdelade i sektioner. I stället kommer i regel en sektion, som faller i närheten av inflexionspunkten, att gripa över på båda sidorna om denna punkt, och en mängd olika kombinationer uppstå därigenom.

För att i någon mån belysa detta kunna vi undersöka den i Tab. 4 angivna formklassen 0,749. Då ett träd i denna formklass uppdelas i 6 lika långa sektioner, blir den konvexa toppdelen en hel sektion som mittkuberas med ett fel av — 8,7 %. Totalfelet för hela stammen blir negativt och uppgår till — 0,06 %.

Dela vi in ett sådant träd i endast 5 sektioner, kommer toppsektionen att omfatta ej blott den konvexa delen av kurvan $y = (\log x)^2$ utan även en del till höger om inflexionspunkten. Det översta måttstället faller nämligen vid $x = 2{,}031$, och inflexionspunkten ligger vid $x = 2{,}71828$. Översta sektionen får därigenom ett stort negativt fel, då den mittkuberas, nämligen — 6,8 %, och de positiva felen inom de övriga sektionerna räcka ej heller i detta fall till för att kompensera det. Resultatet blir ett negativt totalfel, som är = — 0,05 % av hela den sektionerade volymen.

Även med 4 sektioner träffar sista sektionsmåttet till vänster om inflexionspunkten nämligen vid $x = 2{,}289$. Då emellertid detta mått ligger närmare inflexionspunkten, blir felet mindre än i förra fallet, då måttstället låg närmare toppen. Översta sektionen får ett fel av — 4,5 %, men detta är alltjämt för stort för att kunna fullt kompenseras av de övriga sektionernas positiva fel. Totalfelet blir därför — 0,003 %.

En indelning av ifrågavarande kropp i 3 lika långa sektioner, medför, att det översta sektionsmåttet träffar exakt i inflexionspunkten. Den översta sektionen får därvid ett kuberingsfel av c:a — 1,9 %, som kompenseras av de övriga två sektionerna, så att totalfelet för hela stammen blir + 0,17 %.

Med två och en sektioner för hela kroppen faller intet mått på den konvexa delen av kurvan, varför kuberingen ger högre positiva fel.

Vilka fel begås vid sektionering av olika långa träd med användande av 1, 2 och 3 meters sektioner?

Vid praktisk användning av metoden med kubering sektionsvis blir frågeställningen ändrad jämfört med den vi hade i närmast föregående kapitel, och den fråga som skall besvaras är följande: vilka fel riskeras inom olika formklasser då sektionslängden hålles konstant?

Svaret på denna fråga blir olika, beroende på trädens längd, ty ju längre träden äro, desto flera måttställen blir det och desto mindre bli felen inom vilken formklass vi än ha materialet samlat.

Formklass 0,80 anses i detta sammanhang sakna intresse, ty dels förekommer den ytterst sällan och dels höra ofta de högsta formklasserna till de längsta träden, i vilket fall således felen alltid bli mycket små.

I Tab. 5 sid. 174 meddelas siffror över de procentuella fel som erhållas vid sektionskubering med användande av 1 m, 2 m och 3 m långa sektioner. För formklasserna 0,55 till 0,75 har vid uträkningen av dessa siffror begagnats formel (VI a) och för formklass 0,50 formel (III).

Tab. 5 anger endast felen för stammar, vilkas längder utgöra hela metertal, och härav framgår alltså ej vilka maximifel som erhållas under förutsättning av mätning å stammar i naturen. För en grov avgränsning av det lämpliga området för sektionering med de olika sektionslängderna duga dock uppgifterna i denna tabell, och det blir sedan en särskild uppgift att bestämma vilka maximifel som begås inom varje område.

Under hela tiden förutsättes, att stamkurvan följer den logaritmiska funktionen. De avvikelser från den givna kurvan som kunna förefinnas ha alltså icke tagits i betraktande,

Likaså antagas alla sektionsmått vara tagna med exakt noggrannhet. Den omständigheten, att slarv kan förekomma vid sektionsmätningen, då en mängd mått skola tagas i följd, torde i praktiken spela en viss roll.

Sektionskuberingen kan sägas praktiskt taget alltid ge för lågt resultat. Endast om formklassen är högre än 0,75 eller om träden äro kortare än 5 m och ha en formklass $>$ 0,70, kan felet komma över på den positiva sidan.

I allmänhet äro felen störst inom de lägsta formklasserna, och detta gäller vilken trädhöjd vi än ha att göra med. I fråga om ungskog, då både höjden och formklassen antaga låga värden, blir alltså resultatet av en sektionskubering minst noggrannt.

Som en första avgränsning kan man säga, att träd som äro kortare än 10 m ej böra mätas med större sektionslängd än 1 m. För träden med 5 meters höjd och lägre synes ännu kortare sektioner vara önskvärda.

Vidare framgår, att 3 meters sektioner ej böra komma till användning för träd som äro kortare än 20 m. Det område som skulle kunna anvisas för 2 meters sektionering, skulle alltså ligga mellan 10 och 20 meters längder.

Förutsatt att denna preliminära uppdelning godtages, behöva maximifelen ej beräknas annat än för varje sektionslängd inom dess område.

Först ha vi alltså att taga reda på maximifelen vid 1 meters sektioner för träd som äro 10 m eller mindre. Det är givet att vi för dessa små träd måste räkna med att även formklass 0,50 förekommer. Däremot ha vi ingen anledning att tänka på de allra högsta formklasserna, och eftersom de största felen uppträda med det lägsta formklassvärdet, räcker det att undersöka enbart formklass 0,50. De största felen kunna väntas uppstå, då trädets längd har ett sådant värde, att toppen slutar precis där ett sektionsmått skulle ha tagits, i vilket fall den sista halva sektionen blir okuberad. De trädlängder då detta inträffar med 1 meters sektioner äro: $1^1/_2$, $2^1/_2$, $3^1/_2$ etc. m.

Vid mätning med 2 meters sektioner kunna maximifel beräknas uppträda för alla trädlängder i udda m, varför vi närmast ha att undersöka höjderna 11, 13, 15, 17 och 19 m. Härvid kan formklass 0,50 anses vara utesluten. Felen för mellanklasserna 0,60—0,70 ligga emellan felen för klasserna 0,55 och 0,75, varför blott dessa två klasser undersökas.

Slutligen gäller det sektionslängden 3 m för träd som äro mer än 20 m långa, och härvid skulle utan större risk även formklass 0,55 kunna uteslutas. För säkerhets skull medtages dock klassen 0,55 även här. Maximifelen böra inträffa vid trädlängderna $22^1/_2$, $25^1/_2$ etc. m. För fullständighetens skull medtagas dock även de närmaste längderna i hela m.

I Tab. 6 framläggas beräkningarnas resultat.

Maximifelen framträda på olika sätt inom låga resp. höga formklasser. Inom formklass 0,50 se vi att felet vid kubering av ett 1 m långt träd med 1 meterssektionering blir betydligt större än motsvarande fel för ett träd som är $1^1/_2$ m långt (jfr Tab. 5). Och ändå blir ju i det senare fallet en halv sektion alldeles okuberad, vilket borde sänka resultatet av sektionskuberingen. Men det 1 m långa trädet blir mittkuberat, under det att den på $1^1/_2$ meterssträdet mätta grundytan ligger på en tredjedel av höjden, nedifrån räknat. Denna omständighet höjer i det senare fallet resultatet av kuberingen så mycket, att inverkan av den borttappade halva sektionen i toppen ej framträder. Inom formklass 0,75 däremot ger kubering på nyssnämnda sätt av 1 meterssträdet 5,2 % för högt resultat, medan vi för $1^1/_2$ meterssträdet erhålla ett 10,4 % för lågt värde. De översta stampartierna äro här fylligare och spela större roll för kuberingen.

Tab. 6. **Maximifel i procent vid sektionskubering enligt HÖJERS stamkurva.**
Prozentuale Maximalfehler bei sektionsweiser Kubierung nach HÖJERS Gleichung.

Sektionslängd Sektionslänge							
1 m		2 m			3 m		
Trädlängd i meter Baumlänge in Metern	Basformkvot Basalformquotient	Trädlängd i meter Baumlänge in Metern	Basformkvot Basalformquotient		Trädlängd i meter Baumlänge in Metern	Basformkvot Basalformquotient	
	0,50		0,55	0,75		0,55	0,75
1,5	— 12,5	10	— 0,75	— 0,045	19,5	—	— 0,24
2,5	— 4,2	11	— 0,62	— 0,37	20	— 0,44	— 0,29
3,5	— 2,1	12	— 0,525	— 0,056	21	— 0,38	— 0,055
4,5	— 1,25	13	— 0,44	— 0,24	22	— 0,33	— 0,038
5,5	— 0,83	14	— 0,38	— 0,055	22,5	— 0,33	— 0,165
6,5	— 0,60	15	— 0,33	— 0,165	23	— 0,33	— 0,21
7,5	— 0,45	17	— 0,26	— 0,12	25	— 0,26	— 0,031
8,5	— 0,35	19	— 0,21	— 0,09	25,5	— 0,26	— 0,12
9,5	— 0,28	20	— 0,19	— 0,039	26	—	— 0,16
10,5	— 0,23						

Vid användning av 3 m långa sektioner får man maximalt ett $1^1/_2$ m långt okuberat toppstycke. Inom de lägsta formklasserna spelar detta ej så stor roll, men för formklass 0,75 kan man lätt spåra dess inverkan på siffrorna i Tab. 6. Emellertid uppträder ej det maximala felet vid de tillfällen, då trädets topp slutar just där ett sektionsmått skulle ha tagits, utan det förskjutes till ett något högre värde på höjden. Sålunda blir felet för ett 19,5 m långt träd — 0,24 % men för ett träd som är 20 m, där man alltså får ett sektionsmått till, utgör felet — 0,29 %. Samma sak går igen för alla motsvarande längder. Felkuberingen av toppsektionen blir i ett mellanläge här så stor, att resultatet blir sämre än då halva sektionen ej alls kommer med.

Om vi uppställa såsom fordran att maximala felet ej bör få överstiga $^1/_2$ procent, finna vi att det ej går för sig att uppfylla denna fordran med enmeterssektioner, om icke träden äro längre än 7 m. Då vi komma upp i 10 meters längder och högre, bli felen emellertid mycket små.

Tremeterssektioner kunna anses ge tillräckligt noggranna resultat för träd över 20 meters längd. Det ökade arbete som enmeterssektioneringen bereder för långa träd synes ej medföra en så avsevärd minskning av felen att det i allmänhet kan löna sig att utföra detta arbete. Då man redan har pressat ned felet till ett par tiondels procent, förefaller det opraktiskt att genom tredubbling av arbetet sträva efter ytterligare någon tiondels procents lägre fel, då enbart kubering av resp. stammar åsyftas.

Området för tvåmeterssektionering blir mycket litet. Det enklaste synes därför vara att endast välja mellan sektioner av 1 eller 3 meters längd.

Som sammanfattning kan det alltså framhållas, att en ny metod är behövlig för att man skall kunna på ett enkelt och noggrant sätt kubera korta träd med låga formklasser. Så snart höjden kommer upp till 10 m, kan man med stor fördel begagna sektionsmätning med 1 m långa sektioner, och då trädens längd överstiger 20 m kan sektionslängden utan risk ökas till 3 m.

Dessa uttalanden gälla under förutsättning att stamkurvan följer HÖJERS ekvation. Har man att göra med oregelbundet vuxna träd gör man naturligtvis klokt i att taga måtten tätare än eljest. Ju flera sektioner man använder, desto noggrannare måste ju i allmänhet resultatet av mätningarna bli.

Sammanfattning.

Föreliggande undersökning avser att matematiskt klarlägga noggrannheten vid sektionskubering. Härvid har HÖJERS ekvation för stamkurvan blivit använd, sedan först erforderliga formler härletts för den klassiska paraboloidekvationen. Det är visserligen en känd sak, att man i vissa fall kan uppnå en större överensstämmelse med naturen med hjälp av andra matematiska funktioner än HÖJERS, men det har å andra sidan blivit till fullo ådagalagt, att inga mycket stora avvikelser behöva riskeras med HÖJERS ekvation, vilket däremot är fallet med paraboloiderna. De skillnader som kunna beräknas uppstå, om någon annan modärn stamkurveekvation lägges till grund för en undersökning av detta slag, äro av högre ordning och kunna utan tvivel försummas.

De generella formlerna för beräkning av felet vid sektionskubering äro för paraboloiderna (III) och (III a) å sid. 168, för HÖJERS ekvation (VI) och (VI a) å sid. 170—171. Hela tiden räknas felen i procent av den sektionsmätta volymen. Positivt tecken anger att detta sektionsmätta värde är för stort, negativt tecken att det är för litet.

I Tab. 1 anges felen vid 1 meters sektionering av de vanliga rotationskropparna, av vilka den kvadratiska paraboloiden kuberas utan fel.

Tab. 2 utvisar de fel som uppstå vid mittkubering av hela stammar, räknat i procent av den mittkuberade volymen, om resp. HÖJERS ekvation och paraboloidekvationen antagas gälla.

Tab. 3 innehåller de mest allmängiltiga siffrorna, angivande vilka fel man har att räkna med inom olika formklasser, då ett visst antal lika långa sektioner användas. Av tabellen framgår, att felen snabbt avtaga med stigande antal sektioner, och att man med 10 sektioner alltid får en noggrannhet inom ett par tiondels procent av den mätta volymen, då ingen hänsyn tages till eventuella felmätningar och då stammen förutsättes vara regelbundet formad i överensstämmelse med HÖJERS stamkurva. I medeltal för ett stort material kan detta anses vara fallet.

I Tab. 5 demonstreras inverkan inom olika formklasser av sektionslängderna 1 m, 2 m och 3 m på träd av olika längd, och i Tab. 6 äro uträknade de maximifel som riskeras i det enskilda fallet — dock alltjämt naturligtvis utan hänsyn till felmätningar eller oregelbundenheter på stammen. Med ledning av de båda sistnämnda tabellerna kan man uppställa följande regler. Sektionslängden 3 m kan användas för träd över 20 meters längd, då man ej riskerar högre felprocent än 0,5 % av den mätta volymen. För övrigt bör sektionslängden 1 m begagnas. Då trädens längd understiger 10 m, blir emellertid även denna sektionslängd snart otillfredsställande. Här framträder ett behov av en enklare metod för de korta trädens uppskattning, ty en ytterligare minskning av sektionslängden ställer sig av många skäl opraktisk.

Litteraturförteckning.

HÖJER, A. G.: 1903. Tallens och granens tillväxt. Bihang till FREDR. LOVÉN: »Om våra barrskogar». Stockholm.

MAASS, ALEX: 1902. Om kubering av liggande träd. Tidskrift för Skogshushållning.

MÜLLER, UDO: 1915. Lehrbuch der Holzmesskunde. Berlin.

PETTERSON, HENRIK: 1925. Sambandet mellan kronan och stamformen. Svenska skogsvårdsföreningens tidskrift.

——: 1926. Studier över stamformen. (Studien über die Stammform). Medd. fr. Statens skogsförsöksanstalt. N:o 23.

TISCHENDORF, WILHELM: 1927. Lehrbuch der Holzmassenermittlung. Berlin.

RESÜMEE.

Die Genauigkeit der sektionsweisen Kubierung.

Folgende Bezeichnungen werden hier verwendet.

$V =$ das Volumen nach der Formel $\frac{GH}{\nu + 1}$, wo ν der Formexponent ist.

$W =$ » » » » » GHF (HÖJER).

$V_1 =$ » » mit Hilfe sektionsweiser Kubierung ermittelt.

$v =$ wirkliches Volumen einer gewissen Sektion, nach Formel berechnet.

$v_1 =$ Volumen » » » kubiert nach der Grundfläche in der Mitte.

$H =$ gesamte Baumlänge.

h = Abstand vom Gipfel eines gewissen Querschnittes.
h_1 = » » » nach der nächsten Endfläche einer gewissen Sektion.
h_2 = » » » nach der fernsten Endfläche einer gewissen Sektion.
$\bar{h}_n$ = » » nach der Mitte der n^{ten} Sektion.
$l = h_2 - h_1$ = die Sektionslänge in Metern.
$\lambda = \frac{l}{H} \cdot (x_b - 1)$ = die Sektionslänge, in den Einheiten der logarithmischen Funktion ausgedrückt. x_b = die Basisabszisse (PETTERSON).
G = die basale Grundfläche des Stammes.
g = die Grundfläche im Abstand h vom Gipfel.
g_1, g_2, $\bar{g}_n$ = die Grundflächen im Abstand h_1, h_2, bzw. $\bar{h}_n$ vom Gipfel.
d, D = die g und G entsprechenden Durchmesserwerte.
$n = \frac{H}{l} + \frac{1}{2}$ = Anzahl der Sektionen (die Dezimalen fallen weg).

Formeln für sektionsweise Kubierung der Paraboloide.

Das Volumen einer Sektion ist

$$v = \int_{h_1}^{h_2} g\,dh = \int_{h_1}^{h_2} ah^\nu\,dh = a \left| \frac{h^{\nu+1}}{\nu+1} \right|_{h_1}^{h_2} = \frac{a}{\nu+1}(h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1}).$$

Die Grundfläche in der Mitte der Sektion, $\bar{g}$, befindet sich im Abstand $\bar{h}$ vom Gipfel, und $\bar{h} = \frac{h_2 + h_1}{2}$. Daraus ergibt sich

$$\bar{g} = a\bar{h}^\nu = \frac{a}{2^\nu}(h_2 + h_1)^\nu \therefore v_1 = \frac{a}{2^\nu}(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)^\nu.$$

Das Verhältnis zwischen dem wirklichen und dem gemessenen Volumen ist folglich

$$\frac{v}{v_1} = \frac{2^\nu (h_2^{\nu+1} - h_1^{\nu+1})}{(\nu + 1)(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)^\nu} \quad \text{(I)}$$

Formel I gibt unmittelbar eine Formel zur Berechnung des Fehlers bei Kubierung eines ganzen Stammes mit Hilfe der Formel HUBER'S:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{2^\nu}{\nu + 1} \quad \text{(I a)}$$

Bei sektionsweiser Kubierung nach HUBERS Formel beginnt man immer am Stock und fährt fort nach dem Gipfel zu. Die erste Messungsstelle liegt $\frac{1}{2}$ l von der Basis entfernt, d. h. $H - \frac{l}{2}$ vom Gipfel aus. Man erhält also $\bar{h}_1 = H - \frac{l}{2}$, $\bar{h}_2 = H - \frac{3l}{2}$, ... $\bar{h}_n = H - \frac{2n - 1}{2} \cdot l$. Die Summe der

Volumina der an der Mitte gemessenen Sektionen ist $V_1 = l \sum_1^n \bar{g}$. Weiter ist $\bar{g}_1 = a\bar{h}_1^\nu$; $\bar{g}_2 = a\bar{h}_2^\nu$; .... $\bar{g}_n = a\bar{h}_n^\nu$. Setzen wir die Werte von $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \ldots\ldots \bar{h}_n$ ein, so erhalten wir folgende Formel für das mit sektionsweiser Kubierung erhaltene Volumen:

$$V_1 = al\left[\left(H - \frac{l}{2}\right)^\nu + \left(H - \frac{3\,l}{2}\right)^\nu + \ldots\ldots + \left(H - \frac{2\,n - 1}{2} \cdot l\right)^\nu\right].$$

Das wirkliche Volumen eines Paraboloids ist $V = \dfrac{aH^{\nu+1}}{\nu + 1}$, und also ist

$$\frac{V}{V_1} = \frac{H^{\nu+1}}{l(\nu + 1)\left[\left(H - \frac{l}{2}\right)^\nu + \left(H - \frac{3\,l}{2}\right)^\nu + \ldots\ldots + \left(H - \frac{2\,n - 1}{2} \cdot l\right)^\nu\right]} \quad \text{(III)}$$

Ist die Baumlänge H ein Mehrfaches von der Sektionslänge l, so fallen die Messungsstellen in derselben Weise, gleichgültig ob die Sektionierung am Stock oder am Gipfel beginnt. Die Formel kann in diesem Fall vereinfacht werden und sieht folgendermassen aus:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{2^\nu H^{\nu+1}}{l^{\nu+1}(\nu + 1)\left[1 + 3^\nu + 5^\nu + \ldots\ldots + \overline{2\,n - 1}^\nu\right]} \ldots \text{(IIIa)}$$

Tabelle 1 gibt an, welche Fehler entstehen bei sektionsweiser Kubierung mit 1 m Sektionslänge, wenn der Stamm ein Neiloid, ein Kegel oder ein kubisches Paraboloid ist. Das quadratische Paraboloid wird mit sektionsweiser Kubierung immer völlig richtig gemessen.

Formeln zur sektionsweisen Kubierung nach der logarithmischen Funktion.

In der Funktion $y = \log x$ bezeichnet y den Durchmesser oder Radius, $x = 1$ ist der Gipfelpunkt des Stammes, und $x_b - 1$ ist die totale Baumlänge in Einheiten ausgedrückt. Die Sektionslänge in denselben Einheiten ist also $\lambda = (x_b - 1) \cdot \frac{l}{H}$, l und H in Metern gerechnet. Die Abstände vom Gipfel nach den Endflächen einer gewissen Sektion werden in derselben Weise in Einheiten transformiert mit Hilfe der Reduktionsformeln $h' = (x_b - 1) \cdot \frac{h_1}{H}$ und $h'' = (x_b - 1)\frac{h_2}{H}$. Für die Berechnungen der Durchmesserwerte brauchen wir die Abszissenwerte $x_1 = h' + 1$ und $x_2 = h'' + 1$.

Das wirkliche Volumen einer Sektion wird in Einheiten folgenderweise ausgedrückt:

$$v = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2\, dx = \pi M^2 \int_{x_1}^{x_2} ({}^e\log x)^2\, dx = \pi M^2 \Big|_{x_1}^{x_2} x\,[({}^e\log x - 1)^2 + 1] =$$

$$= \pi \{\lambda M^2 + x_2 (\log x_2 - M)^2 - x_1 (\log x_1 - M)^2\}.$$

$$M = {}^{10}\log e = 0{,}4342945$$

In derselben Weise erhält man eine Formel für das gesamte Volumen eines Stammes, wenn man die Integrationsgrenzen 1 und x_b einsetzt

$$W = \pi M^2 \left\{ x_b \left[\left(\frac{\log x_b}{M} - 1 \right)^2 + 1 \right] - 2 \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Das Volumen einer Sektion nach der Grundfläche in der Mitte ist

$$v_1 = \bar{g}\,\lambda = \bar{g}\,(x_2 - x_1), \quad \text{und } \bar{g} = \pi \bar{y}^2 = \pi \left(\log \frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2.$$

Folglich wird

$$v_1 = \pi \lambda \left(\log \frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2.$$

Kubierung des ganzen Stammes nach HUBER's Formel ergibt

$$V_1 = \pi\,(x_b - 1) \left(\log \frac{x_b + 1}{2} \right)^2.$$

Als Formel zur Berechnung des Fehlers, wenn ein ganzer Stamm mit Hilfe der Höhe und der Grundfläche in der Mitte kubiert ist, ergibt sich somit:

$$\frac{W}{V_1} = \frac{x_b\,[(\log x_b - M)^2 + M^2] - 2\,M^2}{(x_b - 1) \left(\log \frac{x_b + 1}{2} \right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

Formel V und Formel I a sind für die Berechnungen der Tabelle 2 angewendet worden.

Nach demselben Prinzip wie für die Paraboloide kann eine Formel zur Berechnung des Fehlers der sektionsweisen Kubierung ganzer Stämme hergeleitet werden. Sie lautet:

$$\frac{W}{V_1} = \frac{x_b\,[(\log x_b - M)^2 + M^2] - 2\,M^2}{\lambda \left\{ \left[\log \left(x_b - \frac{\lambda}{2} \right) \right]^2 + \left[\log \left(x_b - \frac{3\,\lambda}{2} \right) \right]^2 + \ldots\ldots + \left[\log \left(x_b - \frac{(2\,n - 1)\,\lambda}{2} \right) \right]^2 \right\}} \quad \text{(VI)}$$

Der Zähler der Formel VI ist für einen gewissen Wert von x_b konstant.

Nennt man den Zähler T und setzt $x_b - \frac{\lambda}{2} = x$, so kann die Formel in einfacher Weise geschrieben werden:

$$\frac{W}{V_1} = \frac{T}{\lambda \{[\log x]^2 + [\log (x-\lambda)]^2 + [\log (x - 2\lambda)]^2 + [\log (x - 3\lambda)]^2 + \ldots\}} \quad \text{(VI a)}$$

Die Werte von T in verschiedenen Basalformklassen sind in der Fussnote Seite 171 angegeben.

In Tabelle 3 finden sich die Resultate der Berechnungen mit Hilfe der Formel VI a. Bei graphischer Darstellung dieser Zahlen kann man leicht ersehen, wieviele Sektionen nötig sind, um eine gewisse Genauigkeit zu sichern — unter der Voraussetzung jedoch, dass die Baumstämme nach der logarithmischen Funktion konstruiert sind, was für grössere Mittelwerte auch ganz richtig ist, wenigstens wenn es sich um Fichte und Kiefer handelt.

Es ergibt sich, dass man für Formklassen, die niedriger als 0,69 sind, immer zu kleine Werte mittelst der sektionsweisen Kubierung erhält. In den höheren Formklassen trifft es ein, dass das Vorzeichen des Fehlers sich von + zu — verändert, wenn die Anzahl der Sektionen vermehrt wird, und man kann sogar von einem kleinen positiven Wert zu einem grösseren negativen kommen.

Diese Eigentümlichkeit kann durch ein Studium der Kurve $y = (\log x)^2$ erklärt werden. Die Werte von y repräsentieren hier die Grundflächen. Die Kurve $y = (\log x)^2$ hat einen Inflexionspunkt für $x = e = 2{,}71828$. Für kleinere x-Werte verläuft die Kurve konvex gegen die Abszisse, und für $x > e$ ist sie konkav. Wenn die Basalformklasse kleinere Werte als 0,62 $(x_b = e)$ hat, gibt eine Sektionierung also negative Fehler, und für höhere Formklassenwerte kommt es darauf an, wieviel der positive Fehler des konkaven Teils bedeutet im Verhältnis zu dem negativen Fehler der Gipfelpartie des Stammes. Man kann daher einen positiven oder negativen Gesamtfehler erhalten, und das Resultat wird bestimmt nicht nur durch die prozentuale Grösse der Kubierungsfehler in den zwei Stammteilen, sondern auch durch die relative Grösse der Volumina der konvexen Partie bzw. der konkaven Partie.

In Tabelle 4 sind einige Beispiele zusammengestellt. Innerhalb dreier Formklassen wird der konvexe Teil der Kurve in eine, zwei bzw. vier Sektionen geteilt. Damit ist die Sektionslänge in Einheiten bestimmt, und für jeden dieser drei Fälle wird der negative Fehler des konvexen Teils konstant. Überall erhalten wir hier negative Gesamtfehler, obgleich die konkave Partie ein viel grösseres Volumen hat. Dieses grössere Volumen ist mit einem positiven Fehler behaftet, aber der Fehler ist gering.

Die Werte sind so gewählt, dass sowohl die konvexe als auch die konkave Partie der Kurve in ebene Sektionen eingeteilt werden. Wenn dies nicht der Fall ist, z. B. wenn der ganze Körper in Formklasse 0,749 mittels 3 gleich langer Sektionen kubiert wird — in welchem Falle die Messungsstelle der Gipfelsektion gerade in den Inflexionspunkt fällt — kann der Gesamtfehler positiv werden. In dem genannten Fall beträgt er + 0,17 %.

Mit welchen Fehlern werden einzelne Bäume kubiert bei Verwendung der Sektionslängen 1, 2 und 3 Meter?

Man darf behaupten, dass die Stammform der Bäume mit recht guter Genauigkeit mit der logarithmischen Kurve übereinstimmt, wenn es sich um

Mittelwerte eines grösseren Materials handelt. Die Untersuchungen über die Genauigkeit des Sektionierungsverfahrens für den Zweck der Kubierung werden daher hier auf diese Funktion beschränkt.

In der Tabelle 5 sind die Resultate der Berechnungen nach der Formel VI a und — für die Formklasse 0,50 — Formel III zusammengestellt, und die Tabelle 6 gibt dazu ergänzend die Maximalfehler, die für einzelne Bäume in ungünstigen Fällen auftreten können.

Man kann sagen, dass die sektionsweise Kubierung praktisch genommen immer mit einem negativen Fehler behaftet ist. Im allgemeinen werden die Fehler am grössten innerhalb der niedrigsten Formklassen. Die jungen Bäume, welche gleichzeitig kurze Länge und niedrige Formklasse aufweisen, werden somit am meisten fehlerhaft gemessen.

Die Gebiete der verschiedenen drei untersuchten Sektionslängen können in folgender Weise abgegrenzt werden. Eine Sektionslänge von 3 m darf mit gutem Erfolg für Baumlängen über 20 m empfohlen werden. Der systematische Fehler ist dann weniger als $^1/_2$ % der gemessenen Volumina. Das Gebiet der Sektionslänge 2 m wird so gering, dass man besser alle kürzeren Baumlängen mit nur 1 m Sektionslänge misst. Ist die Baumlänge kürzer als 10 m, so erweist sich auch diese Sektionslänge als weniger befriedigend. Es liegt also vor ein Bedarf nach einer einfachen, aber genauen Kubierungsmethode, die für kurze Bäume angewendet werden kann.