

MEDDELANDEN  
FRÅN  
STATENS  
SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 24. 1927—28

MITTEILUNGEN AUS DER  
FORSTLICHEN VERSUCHS-  
ANSTALT SCHWEDENS

24. HEFT

REPORTS OF THE SWEDISH  
INSTITUTE OF EXPERIMENTAL  
FORESTRY

N:o 24

BULLETIN DE L'INSTITUT D'EXPÉRIMENTATION  
FORESTIÈRE DE LA SUÈDE

N:o 24



REDAKTÖR:  
PROFESSOR DR HENRIK HESSELMAN

## INNEHÅLL:

	Sid.
ROMELL, LARS-GUNNAR: Studier över kolsyrehus hållningen i mossrik tallskog .....	I
Studien über den Kohlensäurehaushalt in moosreichem Kiefernwald .....	35
— En nitritbakterie ur svensk skogsmark .....	57
Un ferment nitreux forestier .....	63
— Markluftsanalyser och markluftning .....	67
Soil Air and Soil Aeration .....	76
TIRÉN, LARS: Einige Untersuchungen über die Schaftform .....	81
Några undersökningar över stamformen .....	150
— Till frågan om tallstammens avsmalning och volymbekräkning .....	153
To the Question of Tapering and Volume Calculation of Pine Trunks .....	160
PETRINI, SVEN: Sektionskuberingsens noggrannhet .....	164
Die Genauigkeit der sektionsweisen Kubierung .....	181
— En närmeformel för kubering av träd .....	187
Eine Näherungsformel für Stammkubierung .....	212
SPESSIVTSEFF, PAUL: Studier över de svenska barkborrarnas biologi särskilt med hänsyn till generationsväxlingen. Del I. ....	221
Studien über die Biologie der Borkenkäfer Schwedens mit besonderer Berücksichtigung der Generationsfrage. Erster Teil .....	244
MALMSTRÖM, CARL: Våra torvmarker ur skogsdikningssynpunkt ...	251
Our Peat Areas from the Point of Forest-draining .....	352
<b>Redogörelse för verksamheten vid Statens skogsförsöksanstalt under år 1927.</b> (Bericht über die Tätigkeit der Forstlichen Versuchsanstalt Schwedens im Jahre 1927; Report on the Work of the Swedish Institute of Experimental Forestry).	
Allmän redogörelse av HENRIK HESSELMAN .....	373
I. Skogsavdelningen (Forstliche Abteilung; Forestry division) av HENRIK PETTERSON .....	373
II. Naturvetenskapliga avdelningen (Naturwissenschaftliche Abteilung; Botanical-Geological division) av HENRIK HESSELMAN .....	379
III. Skogsentomologiska avdelningen (Forstentomologische Abteilung; Entomological division) av IVAR TRÄGÅRDH .....	380
IV. Avdelningen för förnyingsförsök i Norrland (Abteilung für die Verjüngungsversuche in Norrland; Division for Afforestation Problems in Norrland) EDVARD WIBECK .....	381
<b>Sammanfattning av arbetsprogrammet för åren 1927—1931</b> .....	386
Zusammenfassung des Arbeitsprogrammes für die Jahre 1927—1931 .....	



## EN NÄRMIFORMEL FÖR KUBERING AV TRÄD.

Bland de ekvationer, som blivit använda för att återge trädens stamkurva, intager HÖJERS formel en rangplats. Det är framför allt dess användning för kubering och aptering med JONSONS tabeller, som gjort denna ekvation så väl känd i Sverige och på senare tid även utomlands. De klassiska stereometriska rotationskropparna, paraboloiderna, äro icke uppbyggda på samma sätt som skogsträdens stammar, och HÖJERS ekvation betyder därför ett stort framsteg. Såsom förf. har visat (1921) kan man med en paraboloid av typen  $g = ah^\nu$ , där  $g$  är grundytan på avståndet  $h$  från toppen,  $a$  och  $\nu$  konstanter, mycket väl representera trädstammens nedre delar. Det är framför allt i toppsektionerna som avvikelserna bli stora. En noggrannare analys av de paraboloidiska kropparna i jämförelse med HÖJERS ekvation ger emellertid vid handen, att en systematisk avvikelse uppträder även emellan de båda formklassbestämmande diametrarna, som tänkas förlagda mitt på stammen och vid basen. Om formklassen har samma värde för en kropp som följer formeln  $g = ah^\nu$  och för en HÖJERSK stam, förlöper nämligen den förra kurvan innanför, d. v. s. paraboloiden är i sin nedre hälft smäckrare än vad HÖJERS ekvation anger. Avvikelsen är dock ringa, men den gör sig likväl gällande vid volymsberäkningen för de lägre formklasserna. Paraboloiden har i de högre formklasserna alltid större volym än den HÖJERSKA kroppen, beroende på att den är drygare i toppen. Ju lägre formklassen blir, desto mindre blir emellertid denna skillnad, och då framträder i stället effekten av paraboloidens negativa avvikelse inom nedre stamhalvan, så att paraboloidens volym blir mindre än den HÖJERSKA, då samma basgrundyta, höjd och formklass förutsättas. Den punkt, där volymerna äro lika, ligger vid omkring formklass 0,56. En beräkning av differensen mellan volymerna inom olika formklasser har givit de värden, som meddelas i tab. 1, där siffrorna ange paraboloidens positiva, resp. negativa avvikelse från HÖJERS stamkropp, beräknat i procent av paraboloidens egen volym.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Beräkningarna ha utförts med hjälp av absoluta formtalet för HÖJERS ekvation, och jämförelserna ha verkställts mellan volymen  $W = GHF$  och volymen  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$ .

Tabell 1. Kubering med HÖJERS ekvation och med formeln  $\frac{GH}{\nu + 1}$ .  
 Kubierung nach HÖJERS Gleichung und mit der Formel  $\frac{GH}{\nu + 1}$ .

Formklass ..... Formklasse.	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
Differens i % ..... Differenz in %..	± 0	— 0,075	+ 0,318	+ 0,986	+ 1,738	+ 2,404	+ 2,776

Av tabellen framgår att skillnaderna äro mycket små för formklasser lägre än 0,60, varför man inom dessa låga formklasser utan olägenhet kan använda den enkla paraboloidkvationen för kuberingsändamål, om basgrundytan är känd.

Förlägges däremot mätpunkten på ett annat ställe av stammen än vid basen, vilket är regel, inträda större skillnader, utom i det fallet att man mäter mitt på stammen, då förutsättningarna äro lika som förut. Ligger mätpunkten ovanför mitten, måste — alltjämt under förutsättning att formklassvärdet är fixerat — paraboloidens volym bliva mindre än vad som anges av siffrorna i Tab. 1, ty i de högre stampartierna förlöper paraboloidernas stamkurva utanför den motsvarande HÖJERSka kroppens. Räkningar med paraboloidens formel ut den basgrundyta, som svarar emot det uppmätta värdet, blir denna grundyta mindre än den som HÖJERS ekvation ger med samma utgångsvärde.

Ett motsatt förhållande måste göra sig gällande då mätpunkten befinns sig nedom stammens mitt, då kubering efter paraboloidformeln alltid måste ge en högre kubikmassa än HÖJERS ekvation, I Tabell 2 nedan angivas siffror för belysande av denna sak. Beteckningen  $z$  i Tabell 2 anger måttstället för diametern, räknat i procent av stamlängden nedifrån.<sup>1</sup> Siffrorna i Tabell 2 ange sålunda de fel, som uppstå inom olika formklasser, då på en HÖJERSk stamkropp mätes en diameter på den relativa höjden  $z$  nedifrån basen och kuberingen verkställes enligt ekvationen för paraboloiderna. Talen äro uträknade i procent av paraboloidens volym, och plustecknet anger att paraboloidens volym är större.

<sup>1</sup> Enligt HÖJERS ekvation är volymen  $W = GHF$  och enligt paraboloidformeln  $V = \frac{G_1 H}{\nu + 1}$ , varför  $\frac{W}{V} = \frac{G}{G_1} F(\nu + 1)$ . Ligger måttstället  $a$  m från basen och trädet är  $H$  m långt, är  $z = \frac{a}{H}$ . Med PETERSONS beteckningar är för den HÖJERSka kroppen  $G = \frac{g (\log x_b)^2}{[\log (x_b - z(x_b - 1))]^2}$  då  $g$  är grundytan vid måttstället  $z$ ; och för paraboloiden är  $G_1 = \frac{g}{(1 - z)^\nu}$ . Således är

$$\frac{W}{V} = \frac{(\log x_b)^2 (1 - z)^\nu}{[\log (x_b - z(x_b - 1))]^2} \cdot F(\nu + 1).$$

Tabell 2. Felkubering av en kropp, uppbyggd efter HÖJERS ekvation, kuberad efter formeln  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$ , i procent av den senare formelns resultat.

Prozentuelle Fehler bei Kubierung einer Höjerschen Körper mit Hilfe der Formel  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$

Formklass .....	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
Formklasse.					
$Z = 0,4$ .....	+ 0,88	+ 1,73	+ 2,50	+ 3,13	+ 3,53
$Z = \frac{1}{3}$ .....	+ 1,15	+ 2,11	+ 2,89	+ 3,47	+ 3,79
$Z = \frac{1}{4}$ .....	+ 1,16	+ 2,12	+ 2,88	+ 3,45	+ 3,77
$Z = \frac{1}{5}$ .....	+ 1,06	+ 1,95	+ 2,69	+ 3,27	+ 3,63
$Z = 0,1$ .....	+ 0,60	+ 1,29	+ 2,04	+ 2,64	+ 3,12

Som synes äro avvikelserna samtliga positiva, d. v. s. paraboloiden blir — såsom förut var sagt — större, och procentsiffrorna äro avsevärda. Endast inom formklass 0,55 äro skillnaderna någonsin lägre än 1 % för de måttställen, som kunna anses komma i fråga. Måttstället  $\frac{1}{3}$  från basen ställer sig särskilt ogynnsamt.

Vill man alltså konstruera en närmeformel för kubering, blir resultatet avsevärt olika, om man begagnar sig av den ena eller den andra matematiska funktionen för stamkurvan. I valet mellan de två anförda ekvationerna finnes ingen anledning till tvekan, eftersom HÖJERS ekvation har dokumenterats vara betydligt överlägsen.

Emellertid ha på senare tid framkommit nya formler för stamkurvan, och det kan vara skäl i att granska dem för att se om de kunna ge en noggrannare överensstämmelse med naturliga stammar är HÖJERS ekvation. Beträffande tallen har redan JONSON (1911) klarlagt behovet av en modifikation i HÖJERS formel, och PETERSON har i sina Studier över stamformen (1926) framlagt jämförelser mellan sin sammansatta stamkurva, där origo förlagts till trädets topp, och ett stort naturligt material av tallstammar.

År 1922 har TIRÉN framställt en ekvation, avsedd att passa särskilt för tallen. Denna ekvation lyder:

$$y = P \log \left( \frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k} \right),$$

där  $y$  är diametern eller radien,  $x$  är det procentiska avståndet till måttstället från toppen räknat, och  $P$  och  $k$  äro konstanter, olika för olika formklasser.

År 1928 har TIRÉN meddelat en volymsformel för ifrågavarande ekvation:

$$W = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\xi^2 - 1}{\xi} (\log^2 \xi + 2 M^2) - \frac{\xi^2 + 1}{\xi} \cdot 2 M \log \xi \right\},$$

$$\text{då } \xi = x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}$$

För beräkning av dimensionerna anges ekvationen i följande förenklade form:  $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ , och formklassen bestäms av basabskissan  $x_b$  (jfr Tabell 3) i likhet med PETERSONS uppställning. Trädets topp ligger i origo. I volymsformeln har  $y$  antagits betyda radien, ej diametern.

Vidare har BEHRE år 1923 publicerat en mycket enkel formel för stammens avsmalning, vilken nyligen prövats på norskt granmaterial av LANGSÆTER (1927). BEHRES ekvation lyder  $\frac{d}{D} = \frac{l}{a + bl}$ , där  $d$  och  $D$  äro diametrar,  $l$  är det procentiska avståndet från trädets topp till  $d$ , och  $a$  och  $b$  äro konstanter, som få olika värden för olika formklasser. LANGSÆTER har funnit, att för den norska granen ger BEHRES formel en bättre överensstämmelse än HÖJERS ekvation.<sup>1</sup>

Nedan skall redogöras för de resultat som erhållits vid en prövning av de olika formlerna på det av PETERSON (1927) framlagda tallmaterialet. Härvid har basabskissan  $x_b$  använts som formuttryck för HÖJERS ekvation, varvid trädets topp ligger i punkten  $x = 1$ , då diametern är  $= \log x$ . I Tabell 3 ha sammanförts de olika konstanterna för skilda formler inom 7 formklasser. För HÖJERS ekvation,  $\frac{d}{D} = C \log \frac{c + l}{c}$ ,

är formklassen  $\varphi = \frac{\log \frac{x_b + 1}{2}}{\log x_b}$ , för paraboloiden är  $\varphi^n = \frac{1}{2}$  eller  $\varphi = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$ , då  $\nu$  är formexponenten, och  $n$  är exponenten i formeln  $\frac{h}{H} = \left(\frac{d}{D}\right)^n$ . Värdena på  $x_b$ ,  $C$  och  $c$  äro beräknade av PETERSON (1925), konstanterna  $a$  och  $b$  i BEHRES ekvation ha bestämts av LANGSÆTER (1927),  $F$  och  $x_b$  i TIRÉNS ekvation av TIRÉN (1928), under det att  $n$ ,  $\nu$  och  $F$  (HÖJER) ha beräknats av förf.  $F$  är absoluta formtalet och har för HÖJERS ekvation uträknats efter ÖSTLINDS formel (1925).

Som synes ligga de absoluta formtalen enligt TIRÉNS ekvation något lägre är HÖJERS för de högre formklasserna. Med formklass menas här förhållandet mellan tvenne diametrar så belägna, att den ena ligger dubbelt så långt från trädets topp som den andra. Då intet annat anges betyder detta att den övre diametern ligger mitt på stammen och den undre vid trädets bas. Basdiametern kan av praktiska skäl ej mätas direkt, men den kan beräknas ur andra diametervärden. Brösthöjdsformklassen är alltid något lägre än basformklassen för hela stammen,

<sup>1</sup> BEHRES senaste avhandling (1927) har kommit mig tillhanda så sent, att jag ej kunnat taga hänsyn till hans där framlagda resultat.

Tabell 3. Värderna på  $n, \nu, c, C, x_b, F, a$  och  $b$  inom olika formklasser.

Die Werte von  $n, \nu, c, C, x_b, F, a$  und  $b$  für verschiedene Formklassen.

Formklass ..... Formklasse.	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
$n$ .....	1	1,1594	1,3569	1,6090	1,9434	2,4094	3,1063
$\nu$ .....	2	1,7250	1,4739	1,2430	1,0291	0,8301	0,6439
$c$ .....	$\infty$	201,7	78,41	38,58	19,78	9,575	3,995
$C$ .....	$\infty$	5,718	2,801	1,801	1,279	0,945	0,702
$x_b$ (HÖJER) .....	1	1,4959	2,2754	3,5918	6,0560	11,4444	26,6100
$F$ (HÖJER) .....	0,33333	0,36725	0,40293	0,44144	0,48425	0,53329	0,59144
$a$ .....	1	0,8182	0,6667	0,5385	0,4286	0,3333	0,2500
$b$ .....	0	0,1818	0,3333	0,4615	0,5714	0,6667	0,7500
$x_b$ (TIRÉN).....	0	1,058	1,819	2,823	4,430	7,572	15,755
$F$ (TIRÉN).....	0,3333	0,3684	0,4033	0,4401	0,4810	0,5288	0,5872

då HÖJERS ekvation gäller och rotansvällningen är eliminerad. ÖSTLIND (1926) har för höjder med 3 m:s intervall beräknat de värden på basformkvoten som motsvara vissa brösthöjdsformkvoter. I Tabell 4 meddelas med en omvänd uppställning vilken brösthöjdsformkvot som svarar emot vissa angivna basformkvoter. Beräkningarna av brösthöjdsformkvoten  $\varphi'$  ha gjorts med hjälp av den lätt härledda formeln

$$\varphi' = \frac{\log \left( \frac{x_b + 1 - \delta}{2} \right)}{\log (x_b - \delta)}, \text{ där } \delta = \frac{1,3}{H}(x_b - 1).$$

Tabell 4. Brösthöjdsformkvotsvärden enl. HÖJERS ekvation för olika basformklasser.

Brusthöhenformquotienten für verschiedene Basalformklassen.

Träd längd i meter Baumlänge in Metern	Basformkvot Basalformklasse						
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
3 .....	0,50	0,531	0,567	0,609	0,658	0,711	0,770
5 .....	0,50	0,539	0,582	0,628	0,678	0,730	0,785
10 .....	0,50	0,545	0,591	0,640	0,690	0,741	0,793
15 .....	0,50	0,546	0,594	0,643	0,693	0,744	0,796
20 .....	0,50	0,547	0,596	0,645	0,695	0,746	0,797
25 .....	0,50	0,548	0,597	0,646	0,696	0,747	0,797
30 .....	0,50	0,548	0,597	0,647	0,697	0,747	0,798

### I. Prövning av olika stamkurveekvationer.

Det av PETERSON (1926, sid. 118—19) använda tallmaterialet består av sammanlagt 1 043 enmeterssektionerade provstammar, fördelade i 6 höjddklasser, inom vilka avvikelserna i höjd endast uppgår till  $\pm 0,15$  m.



Inom varje höjdklass ligga sålunda de tagna diametermåttén även på samma relativa höjd på alla träd med så små variationer att dessa kunna försummas. Medeltalen för de olika måttställena ha ej utjämnats utan utgöras direkt av de uträknade siffrorna.

Såsom PETTERSON själv framhåller torde inom detta material sådana stammar, som företrädesvis falla vid gallring av tallskog, vara överrepresenterade. Å andra sidan är att märka, att inga tydligt abnorma träd av försöksanstalten uttagits till provstammar, vilka i likhet med dessa använts för beräkning av det efter gallring kvarvarande beståndets kubikmassa. Även om det sålunda är möjligt att man med ett annat material av svensk tall i slutna bestånd skulle ha kommit till något annorlunda resultat, måste det likväl anses, att sannolikheten för mycket stora avvikelser är ganska ringa.

En annan fråga är i vilken grad man från dessa stora medeltal kan sluta sig till det enskilda fallet, vare sig man därmed menar enskilda träd eller mindre grupper. Detta fordrar naturligtvis särskilda undersökningar. Men om det gäller att pröva vilken av ett flertal ekvationer som bäst motsvarar de naturliga trädens form, torde ifrågavarande uttryck för medelformen böra anses utgöra en god grundval för jämförelserna, och detta är allt som åsyftas med föreliggande undersökning.

I Tabell 5 nedan ha sammanförts resultaten av de utförda beräkningarna över stammarnas dimensioner, varvid fem olika ekvationer använts. Avvikelsena ha räknats från medeltalen av de naturliga stammarna och angivas i procent av diametern vid måttstället närmast mitten på varje medelstam. Då de med hjälp av de olika ekvationerna uträknade värdena äro högre än materialets medeltal, har detta angivits med positivt tecken, och på samma sätt anger minustecknet att de beräknade värdena äro mindre än materialets.<sup>1</sup> Differenserna för PETTERSONS egen utjämning ha avskrivits från hans förut citerade uppsats. I fråga om TIRÉNS, BEHRES, HÖJERS och paraboloidens ekvation ha beräkningar av dimensionerna vid de olika måttställena utförts av förf. Härvid har basformklassen för hela trädet varje gång bestämts med hjälp av tvenne diametervärden, som tagits från materialet. Dessa diameter valdes så, att de voro belägna så nära som möjligt vid punkterna 20 % och 60 % av stamlängden nedifrån. Basformklassvärdet har för paraboloiden direkt använts för beräkning av  $n$  och för TIRÉNS ekvation till bestämning av basabskissan. I fråga om HÖJERS ekvation ha diametervärdena begagnats till bestämning av basabskissan och beträffande BEHRES ekvation direkt till uträkning av  $a$  och  $b$ .

Av Tabell 5 framgår, att samtliga ekvationer med fördel kunna användas för utjämning av *den nedre stamhalvan*, om man frånser från

<sup>1</sup> De resp. funktionernas avsmalningsserier erhållas, om differenser med + tilläggas, differenser med — fråndragas det naturliga materialets värden.

rotansvällningen. Dock kan den observationen göras, att paraboloiden här genomgående ligger något för lågt, under det att de övriga ekvationerna uppvisa omväxlande positiva och negativa avvikelser. Där paraboloiden undantagsvis är grövre än det naturliga materialet, är avvikelserna mycket liten i de nedre partierna av stammen.

Skillnaderna framträda emellertid skarpare då det gäller att utjämna *den övre delen* av stamkurvan. Här visar sig paraboloiden fullkomligt oanvändbar. Även HÖJERS ekvation ger positiva avvikelser av en storleksordning som menligt inverkar på resultatet av en aptering. Gäller det kubering, äro felen emellertid av mindre betydelse, därför att de längst upp belägna diametrarna på grund av sin ringa storlek föga inverka på volymen av hela trädet. Beträffande de övriga funktionerna framgår det av siffrorna i Tabell 5, att PETTERSONS och TIRÉNS måste anses vara bättre än BEHRES, under det att de alla tre för tallen ge noggrannare överensstämmelse än HÖJERS ekvation. Differensernas medelvärden äro beräknade med hänsyn tagen till tecken. Diametrarna, som innesluta rotansvällning, ingå ej. (Jfr nedan.).

---

År 1926 har förf. frameducerat en närmeformel för kubering av trädstammar, byggd på HÖJERS ekvation. Då avsikten var att göra formeln så enkel som möjligt, konstruerades den efter mönster av HOSSFELDS gamla formel, med vilken den även förete stor likhet. Det är utan vidare klart, att en på matematisk väg konstruerad formel först måste prövas på verkliga trädstammar, innan dess användbarhet i praktiken kan bedömas. Vid tiden för publicerandet av formeln fanns emellertid ej lämpligt material i tillräcklig omfattning, varför jag vid detta tillfälle inskränkte mig till att behandla den teoretiska sidan av problemet.

Det ligger i sakens natur, att en kuberingsformel, som bygger på ett enda diametermått, vilket tages ett stycke upp på stammen, ej kan förutsättas gälla för stammens totala volym, inklusive rotansvällningen, så länge vi endast ha att välja på stamkurveekvationer, gällande för stamkroppen utan rotansvällning. Endast genom en lycklig tillfällighet skulle detta vara möjligt, om exempelvis paraboloidernas stamkurva på grund av överdimensioneringen i toppsektionerna av träden råkade ge en lagom kompensering för stammens överdimensionering nedtill. Prövningarna av en kuberingsformel av ifrågavarande slag böra sålunda i första hand avse stamkroppen befriad från rotansvällning.

Liknande synpunkter göra sig gällande med avseende på barken, i synnerhet då det rör sig om tallen, där barktjockleken varierar mycket starkt, såväl på olika träd som inom olika delar av ett och samma träd.





Det vore opraktiskt att från början införa stora och okontrollerbara variationer i resultaten, som därigenom kunde alldeles äventyras.

Jag anser det således vara tämligen självklart, att närmeformeln bör prövas på vedkroppen enbart och att rotansvällningen bör elimineras. Kan man därvid få fram några säkra resultat, är det sedan möjligt att modifiera dessa genom införandet av de från början utelämnade faktorerna. Det är då troligt, att modifikationerna endast kunna få en lokal tillämpning, under det att huvudformeln får en större allmängiltighet.

Med anledning av de goda överensstämmelser med det naturliga materialet som de i Tabell 5 framlagda resultaten visa för såväl PETTERSONS stamkurvekombination som för TIRÉNS och BEHRES ekvationer, har jag ansett det vara av intresse att även undersöka noggrannheten av de närmeformler, som kunna konstrueras med hjälp av dessa funktioner under samma förutsättningar, som lågo till grund för utarbetandet av närmeformeln enligt HÖJERS ekvation. Formlerna skola gälla inom ett formklassområde, där de naturliga stammarna vanligast uppträda, och jag utgår därför ifrån att de skola ge exakt resultat för formklass 0,60 och formklass 0,70, då resp. funktion antages gälla för stamkurvas hela förlopp.

Med HÖJERS ekvation får närmeformeln utseendet  $V_I = 0,73 g_{0,34} H$ , och man behöver känna grundytan vid 34 % från basen samt trädets längd, för att kunna beräkna volymen. Enligt den metod som framlagts i förf:s tyska avhandling (1926) sättes vid beräkningen av närmeformeln resp. ekvationers volymsformler lika med  $\alpha g_z H$  för formklasserna 0,60 och 0,70, varvid tvenne ekvationer erhållas för bestämmande av konstanten  $\alpha$  och mätpunkten  $z$ .

För BEHRES ekvation är  $\frac{d}{D} = \frac{l}{a + bl}$  och volymen enligt LANGSÆTER (1927)

$$W = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{H}{b^2} \left[ 1 - \frac{2a}{bM} \cdot \log \frac{1}{a} + a \right].$$

Närmeformeln har utseendet

$$V_I = \alpha g_z H, \text{ och } g_z = \frac{\pi D^2 \cdot z^2}{4(a + bz)^2},$$

då  $z$  räknas från toppen och i procent av stammens höjd  $H$ . För formklass 0,60 är  $a = 0,6667$  och  $b = 0,3333$ , för formklass 0,70 äro motsvarande värden 0,4286 och 0,5714. Om  $V_I$  sättes =  $W$  för de två nämnda formklasserna erhållas tvenne ekvationer:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha z^2}{(0,6667 + 0,3333 z)^2} &= \frac{1}{0,3333^2} \left[ 1,6667 - \frac{1,3334}{0,3333 \cdot 0,43429} \cdot \log \frac{1}{0,6667} \right] = 0,4033 \\ \frac{\alpha z^2}{(0,4286 + 0,5714 z)^2} &= \frac{1}{0,5714^2} \left[ 1,4286 - \frac{0,8572}{0,5714 \cdot 0,43429} \cdot \log \frac{1}{0,4286} \right] = 0,4827 \end{aligned} \right.$$

Efter division och rotutdragning är

$$\frac{0,6667 + 0,3333 z}{0,4286 + 0,5714 z} = 1,09401$$

Sättes  $z = 0,678$  erhåller bråket värdet  $1,09399$ . Måttstället kan sålunda sättas vid  $32,2$  % från marken. Insättes värdet på  $z$  blir  $\alpha = 0,6992$ , vilket värde lämpligen avrundas till  $0,70$ .

För TIRÉNS ekvation ställer sig analysen på följande sätt.

$$\text{Volymen är } W = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\xi^2 - 1}{\xi} (\log^2 \xi + 2 M^2) - \frac{\xi^2 + 1}{\xi} \cdot 2 M \log \xi \right\}, \text{ och}$$

radien är  $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

Närmeformeln ger volymen  $V_1 = \alpha \cdot \pi r_z^2 \cdot H$ , då  $H$  är  $= x_b$ . För formklass  $0,70$  är  $x_b = 4,430$  och  $\xi = 8,97147$ , för formklass  $0,60$  är  $x_b = 1,819$  och  $\xi = 3,89475$ .

Radien vid måttstället  $z$  är  $r_z = \log(4,43 z + \sqrt{1 + 19,6249 z^2})$ , då formklassen är  $0,70$ , och för formklassen  $0,60$   $r_z = \log(1,819 z + \sqrt{1 + 3,30876 z^2})$ . Då vi liksom förut sätta  $W = V_1$  för de båda nämnda formklasserna, och dividera ekvationerna, blir efter rotutdragning

$$\frac{\log(4,43 z + \sqrt{1 + 19,6249 z^2})}{\log(1,819 z + \sqrt{1 + 3,3088 z^2})} = 1,7623$$

För  $z = 0,662$  blir bråkets värde  $= 1,7640$  och för  $z = 0,663$  erhålles  $1,7612$ , varför värdet på  $z$  antages vara  $0,663$ , då måttstället är beläget vid  $33,7$  % från basen. På samma sätt som förut bestämes  $\alpha$  till  $0,717$ .

Även för PETERSONS kurvekombination för tallen kan en närmeformel beräknas.

För översta delen av stamkurvan, från origo till  $x = 4$ , använder PETERSON ekvationen

$$y = 2 \log \left( 1 + \frac{x}{4} \right),$$

där vi låta  $y$  betyda diametern. För de längre bort från origo belägna delarna av kurvan gäller ekvationen  $y = \log x$ . Trädets topp befinner sig i origo.

Trädets volym  $W$  sammansättes av tvenne delar, av vilka toppvolymen är konstant, då vi räkna i koordinatsystemets måttenheter.

Kallas toppdelens volym  $W_1$  så är

$$W_1 = \int_0^4 \frac{\pi y^2}{4} dx = \pi \int_0^4 \left[ \log \left( 1 + \frac{x}{4} \right) \right]^2 dx$$

För underlättande av integrationen skriva vi  $u = 1 + \frac{x}{4}$ , då  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}$   $\therefore dx = 4 du$ .

Integrationsgränserna ändras, då vi införa  $u$  i stället för  $x$ , så att när  $x=0$  blir  $u=1$ , och då  $x=4$  är  $u=2$ .

Således blir

$$W_1 = 4 \pi M^2 \int_1^2 \epsilon \log^2 u \, du = 4 \pi M^2 \int_1^2 u [(\epsilon \log u - 1)^2 + 1] = \pi M^2 \cdot 0,753269$$

På samma sätt beräknas  $W_2 = \int_4^{x_b} \frac{\pi y^2}{4} dx = \frac{\pi M^2}{4} \int_4^{x_b} \epsilon \log^2 x \, dx.$

Efter integrationens genomförande fås

$$W_2 = \frac{\pi M^2}{4} \left\{ x_b \left[ \left( \frac{\log x_b - 0,4342945}{0,4342945} \right)^2 + 1 \right] - 4,596893 \right\}$$

Trädets volym  $W$  är lika med summan av  $W_1$  och  $W_2$ , och närmeformeln

$$\text{ger volymen } V_1 = \frac{\pi}{4} a x_b [\log z x_b]^2.$$

För formklass 0,60 blir, då trädets topp ligger i origo,  $x_b = 5,6569$  och för formklass 0,70  $x_b = 10,0794$ . Med användande av resp.  $x_b$ -värden sätta vi  $V_1 = W_1 + W_2$  för formklasserna 0,60 och 0,70, varefter på vanligt sätt erhålles

$$\begin{cases} \alpha [\log 5,6569 z]^2 = 0,23710 \\ \alpha [\log 10,0794 z]^2 = 0,482889 \end{cases}$$

Divisionen ger oss efter rotutdraging

$$\frac{\log 10,0794 z}{\log 5,6569 z} = 1,4271$$

Insättes här  $z = 0,683$ , får bråket värdet 1,4274, och för  $z = 0,684$  blir det 1,4269. Måttstället kan sålunda förläggas vid 31,6 % från basen i detta fall. Konstanten  $\alpha$  löses ur ekvationerna till 0,687.

De erhållna närmeformlerna kunna lämpligen prövas på det av PETERSON framlagda tallaterialet. Rätta värdet på volymen kan sättas = det värde som erhålles vid 1 m:s sektionering av diametermåten, varvid dock är att märka, att de kortaste träden bliva för lågt kuberade (Jmfr PETRINI, 1928).

Då det gäller att förskaffa sig diametervärdena för de resp. närmeformlernas måttställen, kunna två olika förfaringssätt komma i betraktande. Det enklaste är otvivelaktigt att lägga upp medelstammarna grafiskt och jämna ut kurvorna mellan de på 1 m:s avstånd belägna kända punkterna. Emellertid kan det befaras, att härvid något subjektivt fel kan insmyga sig, och det vore därför bättre att räkna ut värdena efter någon objektiv metod, i vilket fall man också kan skaffa sig mera än en säker decimal.

Jag har ansett det vara av ett visst intresse att här jämföra resultaten

av de olika förfaringssätten. Då det gäller stamkurvor för enskilda stammar i fall som det föreliggande, blir stammens avsmalning ej säkert bestämd i de enskilda mätpunkterna. Det ställer sig därför mera praktiskt att begagna den grafiska metoden för utjämning, då man genom att taga hänsyn till ett flertal punkter i följd ofta torde kunna påräkna en säkrare utjämning än med matematiskt beräknade värden mellan tvenne närliggande punkter. Vidare måste man då det rör sig om enskilda stammar alltid undersöka ett stort antal, varför de beräkningar som skola utföras för var och en måste begränsas. Då det nu däremot endast är fråga om 6 medelstammar, kan det löna sig att göra till och med ganska omständliga beräkningar, och de skillnader som framkomma vid jämförelsen kunna bli av vägledande betydelse genom att underlätta bedömandet av den grafiska metodens tillförlitlighet.

Jag har därför förfarit på så sätt, att jag först grafiskt lagt upp PETERSONS medelvärden på avsmalningen inom de olika höjdklasserna och för samtliga tidigare beräknade måttställen för de olika närmeformlerna avläst resp. diametervärden. Därefter har jag för de fem viktigaste formler som ingå i undersökningen matematiskt beräknat samma diametervärden. Härvid har jag i varje fall utgått ifrån de två av grundmaterialets måttställen mellan vilka samtliga närmeformlers mätpunkter infalla. Utjämningen har i ett enda fall behövt utsträckas till 2 m, för alla övriga medelstammar är det mellan två närliggande punkter på 1 m:s inbördes avstånd som denna matematiska beräkning begränsats.

Utträknigen har verkställts med hjälp av funktionen  $y = \log x$  med trädets topp förlagd i origo. Föregående undersökningar ha visat, att denna funktion synnerligen väl ansluter sig till tallstammen, och jag har ansett denna kurva vara den pålitligaste för de delar av stammen — omkring  $\frac{1}{3}$  från roten — som det här är fråga om.

Vid måttstället 34 % från roten erhöles följande värden:

Trädlängd	24 m	20 m	16 m	12 m	8 m	4 m
Grafisk utjämning.....	110,75	111,6	110,8	109,7	109,2	103,7
Beräknad diameter ...	110,77	111,55	110,78	109,57	109,48	103,90

För de övriga närmeformlernas mätpunkter ställer det sig på liknande sätt. Överensstämmelsen är i allmänhet mycket god för de längre träden. För de två kortaste längderna uppträda däremot lätt fel, och dessa gå samtliga i sådan riktning, att man till synes på dessa småträd riskerar att med grafisk utjämning få för låga diametervärden. Detta torde sammanhänga med att 1 m:s avstånd mellan måttställena blir långt i relativt mått, då stammen är kort, varför man vid en grafisk utjämning gör kurvan alltför flack.



Då samtliga formler avse vedkroppen utan rotansvällning, bör medelstammarnas rotansvällning elimineras. Detta har utförts med användning av PETERSONS värden för de tre nedersta sektionsmåtten i fråga om 24 m:s och 20 m:s träden, för de två nedersta måtten i fråga om 16 m:s trädet och för det nedersta måttstället för 12 m:s trädet. Å 8 och 4 m:s träden har ingen rotansvällning ansetts böra frändragas.

Volymen av rotansvällningsvirket utgör, då det beräknas på nyss angivet sätt, för 24 m:s trädet 2,7 %, för 20 m:s trädet 3,0 %, för 16 m:s trädet 2,0 % och för 12 m:s trädet 1,8 % av resp. medelträds totala volym inom bark.

I Tabell 6 meddelas resultaten av de utförda kuberingarna. Under varje formel anges differensen mellan kuberingsresultatet med formeln och med 1-m:ssektioneringen i procent av det senare värdet. Under *a* är detta uträknat med rotansvällningen frändragen, under *b* har totala volymen medtagits, inklusive rotansvällningen. Siffrorna inom parentes avse grafiskt utjämnade diametervärden, de övriga äro beräknade på ovan angivet sätt.

Förutom de ovan nämnda närmeformlerna ha även prövats den av förf. (1926) enligt parabeloidkvationen beräknade och den samtidigt för JONSONS tallekvation härledda samt HOSSFELDS gamla formel. De sju använda formlerna äro således:

<i>Formel I:</i>	PETRINI enl. HÖJERS ekvation:	$V_I = 0,73 g_{0,34} H$
<i>Formel II:</i>	» » TIRÉNS » :	$V_I = 0,717 g_{0,337} H$
<i>Formel III:</i>	» » BEHRES » :	$V_I = 0,70 g_{0,322} H$
<i>Formel IV:</i>	» » parabeloidkvationen:	$V_I = \frac{25}{32} g_{0,35} H$
<i>Formel V:</i>	HOSSFELD » » :	$V_I = 3/4 g_{1/3} H$
<i>Formel VI:</i>	PETRINI » PETERSONS stamkurvekombination:	$V_I = 0,687 g_{0,316} H$
<i>Formel VII:</i>	» » JONSONS modifierade tallekvation:	$V = 0,71 g_{0,33} H$

Det bör observeras, att samtliga måttställen ligga mycket nära tredjedelen av stamlängden från basen räknat, och att det alltså huvudsakligen är konstanten *a* som blir olika för de olika funktionerna.

Enligt av förf. verkställd utredning (1928) ger sektionmätning vid kubering så gott som alltid för lågt resultat. Med så många sektioner som här kommit till användning för de längre träden spela dessa fel ingen nämnvärd roll, men för 4 m:s trädet finnes det i varje fall anledning att taga hänsyn härtill. Med formklass 0,63 och 4 sektioner skulle felet uppgå till ungefär — 0,7 %, och rätteligen böra alltså differenserna i Tabell 6 minskas

Tabell 6. Prövning av närmeformler för kubering. a = utan rotansvällning, b = med rotansvällning.

Prüfung der Nähungsformeln für Kubierung. a = ohne Wurzelanlauf, b = mit Wurzelanlauf.

Differens i % av I m:s-sektionerad volym								
Differenz in % von dem mit 1 m langen Sektionen erhaltenen Volumen.								
Stamlängd m	Formel I		Formel II		Formel III		Formel IV	
	a	b	a	b	a	b	a	b
24.....	-0,8(-1,0)	-3,5	-2,3(-2,4)	-4,8	-2,8(-2,9)	-5,4	(+3,5)	(+0,8)
20.....	+0,8(+0,9)	-2,2	-0,6(-0,4)	-3,5	-0,9(-0,7)	-3,9	(+4,9)	(+1,8)
16.....	+0,4(+0,4)	-1,6	-1,0(-1,0)	-3,0	-1,5(-1,6)	-3,4	(+4,5)	(+2,5)
12.....	+0,5(+0,8)	-1,3	-0,9(-0,7)	-2,7	-1,4(-1,2)	-3,1	(+5,1)	(+3,2)
8.....	+2,3(+1,8)	—	+1,0(+0,3)	—	+0,9(+0,5)	—	(+4,6)	—
4.....	+2,3(+1,9)	—	+1,1(+0,9)	—	+1,8(+1,1)	—	(+5,5)	—

Differens i % av I m:s-sektionerad volym						
Differenz in % von dem mit 1 m langen Sektionen erhaltenen Volumen						
Stamlängd m	Formel V		Formel VI		Formel VII	
	a	b	a	b	a	b
24.....	(+2,4)	(-0,3)	-4,0(-4,0)	-6,5	-2,4(-2,5)	-5,0
20.....	(+4,5)	(+1,5)	-2,0(-1,9)	-5,0	-0,4(-0,5)	-3,6
16.....	(+4,1)	(+2,0)	-2,6(-2,6)	-4,5	-1,1(-1,2)	-3,0
12.....	(+4,4)	(+2,5)	-2,5(-2,0)	-4,2	-1,0(-0,7)	-2,7
8.....	(+5,1)	—	+0,0(-0,3)	—	+1,1(+0,4)	—
4.....	(+6,3)	—	+1,1(+0,8)	—	+1,6(+1,2)	—

med detta belopp. Därigenom nedgå felen för 4 m:s trädet till + 1,6 % för Formel I, + 0,4 % för Formel II, + 1,1 % för Formel III etc.

Jämföra vi i Tabell 6 de på grundvalen av grafiskt uttagna diametervärden (inom parentes) uträknade volymdifferenserna med dem som beräknats efter funktionen  $y = \log x$ , framgår det att man genomgående har fått lägre volym i fråga om de korta träden, då det grafiska förfaringssättet kommit till användning. För de längre träden däremot innebär den direkta grafiska diameterutjämnningen ingen risk, då variationerna dels bliva små och dels gå än åt positiva än åt negativa sidan.

Den observation som därefter är att göra, gäller rotansvällningen. Det var a priori tydligt, att de båda paraboloidformlerna borde ge för höga värden för stamkroppen, då denna är befriad från rotansvällning. Anledningen till att dessa formler det oaktat medtagits i undersökningen var den, att man möjligen kunde vänta sig en kompensation av rotansvällningen hos de längre träden. Detta synes här vara fallet endast i fråga om 24 m:s trädet. För övrigt erhållas genomgående alltför höga värden, även då rotansvällningsverket medräknas. Förväntningarna i detta av-

seende ha sålunda ej infriats, och därmed förfaller det skäl som kunde förefinnas för användning av paraboloidkvationen.

Beträffande de övriga fem formlerna kan man icke vänta sig att rotansvällningen skall kunna medräknas utan att ett för lågt kuberingsresultat skall bli följden. Då rotansvällningen eliminerats, ger Formel I synnerligen goda överensstämmelser utom i fråga om de korta träden, där ett något för högt resultat erhålles. De korta träden måste emellertid anses vara mätta med mindre säkerhetsgrad än de övriga, och för att klargöra huru noggrann formeln är för kubering i detta fall erfordras särskilda undersökningar, varvid täta mått böra tagas, så att verkligt pålitliga värden på trädvolymerna kunna erhållas.

Lämna vi de korta träden (under 10 m) ur räkningen, har Formel I visat sig vara de andra formlerna tydligt överlägsen. Samtliga formler utom denna ha givit genomgående för låga värden på den från rotansvällning befriade tallstammen under bark. Då nu de undersökningar, som verkstälts med Formel I på enskilda stammar och till vilka vi senare återkomma, visa, att man även med Formel I snarare riskerar negativa än positiva avvikelser vid kubering av tallen, finnes det alltså ingen anledning att byta ut Formel I mot någon av de andra, då det gäller detta trädslag.

Vill man söka en förklaring till felens tecken för Formel I, finnas tre faktorer att taga hänsyn till. En av dem är det förhållandet, att HÖJERS ekvation genomgående ger något för fylliga toppsektioner för tallen, vilket verkar i riktning mot ett positivt fel vid kubering efter Formel I. Om sedan den aktuella stamkurvan uppvisar en lokal insvängning eller utbuktning vid måttstället, ger detta en tendens till negativt resp. positivt fel. Slutligen beror det erhållna felet på trädets formklass, ty även om stamkroppen exakt följer HÖJERS ekvation, stämmer formeln exakt endast för formklass 0,60 och formklass 0,70.

Se vi exempelvis på medelträdet av 24 m:s längd, hade vi att vänta ett negativt fel av nära 1,7 %, beroende på att formklassvärdet ligger nära 0,75, för vilken formklass detta felvärde gäller. Vidare är stamkurvan vid måttstället (Se Tabell 5) något smäckrare än den enligt HÖJERS ekvation skulle vara, varför man kunde vänta sig ett större negativt fel än 1,7 %. Emellertid kompenseras detta delvis av att HÖJERS ekvation ger toppen fylligare dimensioner, varför det resulterande kuberingsfelet blir — 0,8 %.

Det är givet, att såväl gynnsamma som ogynnsamma kombinationer uppträda i naturen, och det är därför endast genom talrika exempel möjligt att skaffa sig en uppfattning om huru formeln verkar. I avdelning III av detta arbete skall meddelas siffror över vilka variationer som erhållits vid de på enskilda stammar utförda provningarna av Formel I.

## II. Grafisk härledning av Formel I.

Sedan förf. publicerat den i föregående avdelning av detta arbete behandlade Formel I, framkom i den norska fackpressen år 1926 en avhandling av SKINNEMOEN, delvis behandlande samma frågor, dock endast med användande av paraboidekvationen vid beräkningarna. Vidare har ÖSTLIND (1926) i en avhandling upptagit dessa problem och därvid utvecklat vissa nya synpunkter, begagnande sig av HÖJERS ekvation såsom grundval för sina beräkningar. Båda de nyssnämnda arbetena beröra emellertid företrädesvis tillväxtprocentens bestämmande, varför de förbigås i detta sammanhang.

En särskild uppmärksamhet fordrar emellertid ERIK LÖNNROTHS avhandling av år 1927 i Acta Forestalia Fennica, då denne författare

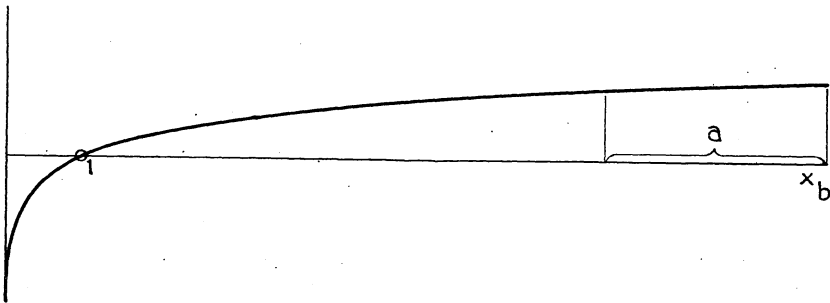


Fig. 1. Kurvan  $y = \log x$  (efter PETERSON).  
Die Kurve  $y = \log x$  (nach PETERSON).

direkt sysselsätter sig med kuberingsformlerna. För enkelhets skull begagnar jag mig här av LÖNNROTHS beteckningar.

LÖNNROTH, som vid sina beräkningar uteslutande använder stam-ekvationen för paraboloiderna, har följande problemställning.

Kuberingsformeln skrives  $V_1 = F_a G_a H$ , där  $H$  är totala längden,

$G_a$  är grundytan vid måttstället  $a$ , då  $a = \frac{a}{H}$  och  $a$  mätes nedifrån

basen.  $F_a$  är formtalet, d. v. s. den konstant, varmed produkten  $G_a H$  skall multipliceras för att volymen skall erhållas.  $F_a$  blir olika inom olika formklasser och för olika värden på  $a$ . Om man således på förhand bestämmer sig för ett visst måttställe, i relativt mått lika beläget på alla stammar, kan man räkna ut  $F_a$  inom de olika formklasserna, och genom att fixera genomsnittsvärden på formtalet,  $F_{ak}$ , kan man konstruera hur många kuberingsformler som helst, gällande för olika mått.

ställen. Dessa formler kunna därefter prövas på verkliga stammar, och därmed får man besked om vilka som äro de bästa bland förslagen.

Det är tydligt att ett mycket stort och väl kontrollerat material behövs för att man skall kunna våga draga några slutsatser av de praktiska proven. LÖNNROTH har emellertid använt sig av endast 24 (tjugofyra) tallprovstammar, vilka äro uppmätta i enmeters sektioner *på bark*, och om vilka uppgift saknas angående vilka formklasser de tillhöra.

Då det kan anses vara av intresse att genomföra en analys av faktorn  $F_a$  för olika värden på  $a$  då HÖJERS ekvation antages gälla, har jag utfört dylika beräkningar, vilkas resultat framgå av fig. 2 och tabell 7. En formel för  $F_a$  angives nedan med begagnande av samma beteckningar som i det föregående (jfr fig. 1). Stammens längd är  $= x_b - 1$  och basdiametern är  $= \log x_b$ . Således är basgrundytan  $G_0 = \frac{\pi}{4} (\log x_b)^2$

och grundytan vid måttstället  $a$  är  $G_a = \frac{\pi}{4} [\log (x_b - a)]^2$ . Då  $a = \alpha (x_b - 1)$ ,  $W = G_0 H \cdot F_0$  och närmeformelns volym  $V_1 = G_a H \cdot F_a$ , blir alltså, då  $V_1$  sättes lika med  $W$ :

$$F_a = \frac{F_0 \cdot (\log x_b)^2}{[\log \{x_b - \alpha (x_b - 1)\}]^2}$$

$F_0$ , d. v. s. absoluta formtalet, jämte motsvarande värden på  $x_b$ , finnes angivet för vissa formklasser i tabell 3.

Med användande av ovanstående formel ha siffrorna i tabell 7 uträknats. Härvid behövde ett par hjälptabeller upprättas för underlättande av räkningarna. Dessa hjälptabeller förbigås här.

Tabell 7. Värdet af  $F_a$  för olika måttställen. HÖJERS ekvation.  
 $F_a$  bei verschiedenen Diametermessungsstellen. HÖJERS Gleichung.

Formklass ..... Formklasse	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
$\alpha = 0,1$ .....	0,438	0,466	0,498	0,535	0,578	0,630
$\alpha = \frac{1}{5}$ .....	0,534	0,551	0,573	0,600	0,634	0,677
$\alpha = \frac{1}{4}$ .....	0,596	0,605	0,619	0,640	0,668	0,705
$\alpha = 0,3$ .....	0,671	0,669	0,674	0,686	0,707	0,736
$\alpha = \frac{1}{3}$ .....	0,730	0,719	0,717	0,722	0,736	0,760
$\alpha = 0,34$ .....	0,743	0,730	0,726	0,730	0,742	0,765
$\alpha = 0,4$ .....	0,878	0,843	0,820	0,808	0,806	0,815

Vid en grafisk uppläggning av värdena framgår det tydligt vilka måttställen man har att välja på, då man vill sammanföra flera formklasser under en gemensam formel (se fig. 2). Vid de måttställen som ligga

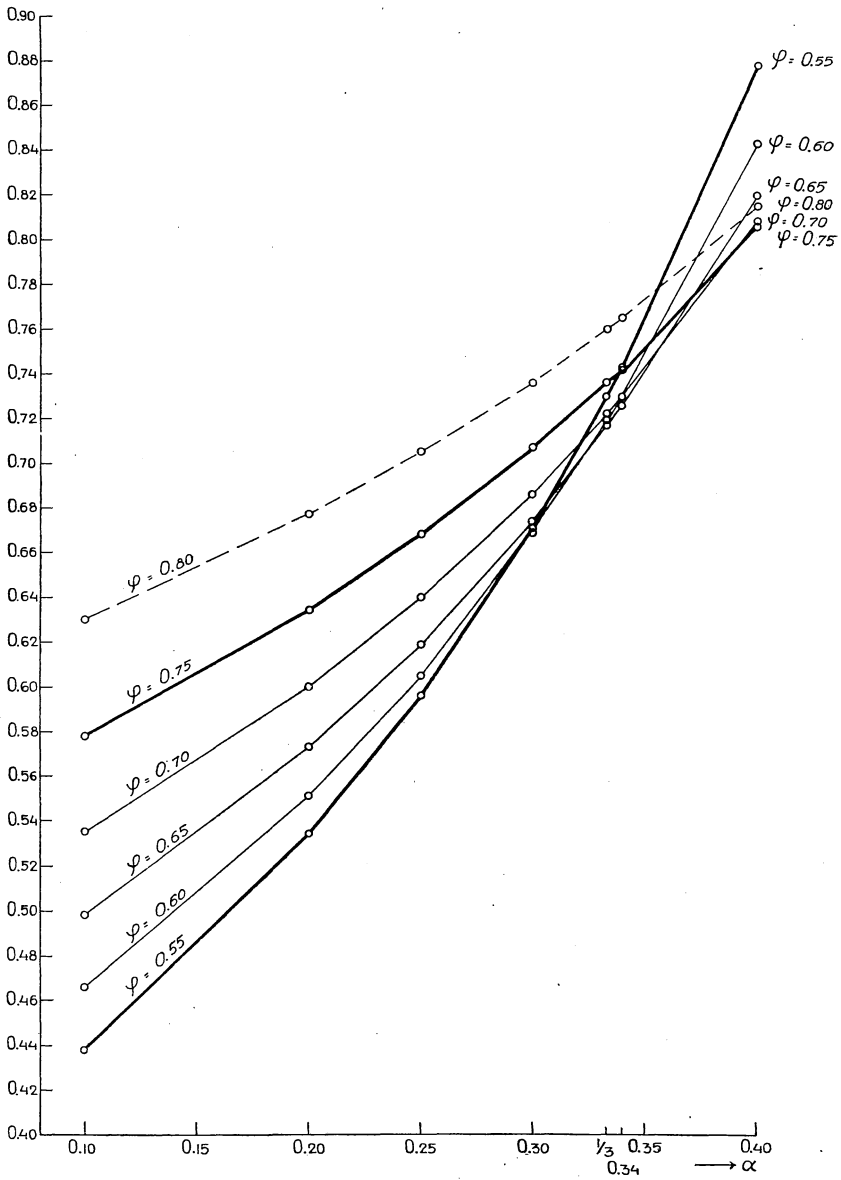


Fig. 2.  $F_\alpha$  för olika måttställen och formklasser (HÖJERS ekvation).  
 $F_\alpha$  für verschiedene Messungsstellen und Formklassen (HÖJERS Gleichung).

nära basen är spridningen mycket stor inom samtliga formklasser. Vid  $\alpha = 0,3$  finna vi en koncentration av de lägsta formklasserna omkring ett värde på  $F_\alpha$  av ungefär 0,67, och de högsta formklasserna — då hänsyn ej tages till 0,80 — uppvisa en motsvarande koncentration omkring värdet  $F_\alpha = 0,78$  vid en mätpunkt belägen något lägre än vid 38 % från basen.

Redan härav är det tydligt att den lämpligaste mätpunkten skall vara belägen ungefär vid en tredjedel av stamlängden nedifrån. Undersökes saken närmare, visar det sig att 34 % nedifrån är ett något bättre måttställe, då man inriktar sig på att få bästa möjliga resultat för mellanformklasserna. Skillnaden mellan  $\alpha = 0,34$  och  $\alpha = \frac{1}{3}$  är dock ej av nämnvärd betydelse.

Den efter LÖNNROTHS metod utförda undersökningen ger sålunda — såsom var att vänta — samma resultat som min matematiska analys i Tharandter forstl. Jahrbuch 1926. Men LÖNNROTHS metod är betydligt arbetsammare, och jag måste dessutom anse, att den av mig använda uppställningen ger ett mera generellt grepp på problemet, om man avser att härleda den noggrannaste formeln i varje särskilt fall.

### III. Prövning av närmeformeln på enskilda stammar.

Det återstår nu att pröva närmeformeln för kubering av enskilda stammar för att variationerna skola kunna klarläggas. Härvid inskränka vi oss i detta sammanhang till att undersöka noggrannheten vid kubering av tallen.

LÖNNROTH (1927) har på sina tjugofyra tallstammar jämte en mängd andra kuberingsformler prövat även den ifrågavarande och funnit att den ger så dåliga resultat, att han ej tvekar att förklara den vara misslyckad. Det är då att märka, att — fränsett att provningsmaterialet är för litet — kuberingarna ha verkställts på bark och att rotansvällningen ingår i den sektionerade kubikmassan men ej i den volym som anges av formeln. Det är under sådana förhållanden självklart, att formeln skall ge avsevärt för låga resultat, då såväl den grova tallbarken i de nedre stampartierna som även rotansvällningen förstora den sektionsmätta volymen.

Samtliga prövningar av formeln som verkställts av förf. hänföra sig till volymen utan bark. Vid mätning å enskilda stammar är det emellertid synnerligen arbetskrävande att utföra reduktion för rotansvällning, varvid avsmalningskurvan för varje stam måste utjämnas. Detta har skett endast i fråga om ett bestånd, nämligen försöksytan 473 i Västerbotten. De år 1918 utfällda 53 provstammarna å denna yta hade näm-

ligen år 1921 blivit upplagda grafiskt och rotansvällningen hade eliminerats för materialets användning vid en föregående undersökning (jfr PETRINI 1921). För erhållande av grundvolymen av stammarna, befriade från rotansvällning, ha de resp. stamkurvorna indelats i 10 lika långa sektioner, vilka kuberats efter det avlästa diametervärdet vid mitten av varje sektion. Enligt förf. (1928) reduceras därvid kuberingsfelet till en negligabel kvantitet. Diametervärdet för varje stam vid 34 % av längden nedifrån har likaledes avlästs på de uppritade stamkurvorna, varefter kubering enligt närmeformeln har blivit utförd. Volymdifferenserna ha uträknats i procent av den sektionsmätta volymen.

Det övriga materialet som kommit till användning utgöres av sammanlagt 226 1 m:s sektionerade tallprovstammar, fällda vid 1925 års revisioner å sex försöksytor, belägna i vitt skilda delar av landet. Å dessa träd har diametern vid 34 % nedifrån klavats i skogen, varvid barken frändragits sedan den blivit uppmätt med skogsförsöksanstaltens barkmätare (se fig. 3, PETRINI 1921). Grundvolymen, med vilken för varje träd den genom närmeformeln erhållna volymen har jämförts, utgöres direkt av den med 1 m:s sektioner mätta volymen under bark. I dessa siffror ingår alltså rotansvällning, varför man har anledning vänta sig ett systematiskt negativt fel med formeln.

De erhållna siffrorna äro framlagda i tabell 8 nedan.

Tabell 8. Prövning av närmeformeln på tallstammar.  
Prüfung der Näherungsformel auf Kiefernstämmen.

Yta Nr Versuchsfläche Nr	Belägenhet Lage	Ålder Alter Jahre	Antal prov- stammar Anzahl der Pro- bestämme	Systema- tiskt fel i % Systema- tischer Fehler in %	Medelfel per stam i % Mittlerer Fehler in %	Beräknat medelfel för medeltalet i % Mittlerer Fehler für den Mittelwert
69 .....	Götaström, Småland	60	35	— 0,74	± 5,72	± 0,97
28: I—III...	Grönbo, Västmanland	59	40	— 1,64	± 4,18	± 0,66
3: II .....	Lappland .....	77	50	— 2,19	± 4,58	± 0,65
3: III .....	» .....	77	31	— 2,23	± 3,43	± 0,63
3: IV .....	» .....	77	30	— 3,42	± 3,38	± 0,62
5: II—III..	Jämtland .....	74	40	— 4,49	± 5,29	± 0,84
473 .....	Västerbotten .....	98	53	+ 0,01	± 3,41	± 0,47

Vid beräkningen av medelfelet för den enskilda stammen har det systematiska felet eliminerats. I genomsnitt för hela materialet erhålles medelfelet = ± 4,38 %.

Det i samtliga fall utom i fråga om ytan 473 uppträdande systematiska negativa felet torde få anses bero på rotansvällningen, och detta styrkes synnerligen kraftigt därav, att en så utomordentligt god balans



mellan de positiva och de negativa felen inträder för provstamsmaterialet från ytan 473, där rotansvällningen eliminerats.

De utförda undersökningarna synas alltså ge vid handen att goda mätningresultat stå att vinna med den nya formeln, då rotansvällningen lämnas ur räkningen. Medelfelet för en enskild stam är ganska lågt, varför felet på medeltalet snabbt reduceras med växande stamantal.

Emellertid får man icke glömma, att det kan finnas beståndstyper, där systematiska fel uppträda, beroende på att stamkurvans förlopp avviker från den logaritmiska funktionen. Det är sålunda knappast troligt att hela det till 4,5 % uppgående systematiska felet hos stammarna från försöksytan 5 får skyllas på rotansvällningens inverkan. Enligt vad PETERSONS material synes giva vid handen skulle rotansvällningen vid 1 m:s sektionering ej förstora volymen med mera än högst 3 %, och då det här rör sig om för norrlandsförhållanden ung skog, är det föga sannolikt att rotansvällningen uppgår till särskilt höga belopp. Resultaten å såväl denna yta som å ytan 3 tyda därför på att då dylika avvikelser från den förutsatta funktionen förekomma blir resultatet av närmeformeln gärna något för lågt. Någon anledning att söka korrigera formeln genom höjning av konstanten föreligger dock ej med ledning av de vid undersökningen vunna resultaten.

Såsom redan förut har understrukits kräves det ett mycket stort material för att man skall kunna känna sig säker på huru formeln verkar på enskilda träd. Här föreligger nu en undersökning som omfattar bortåt 300 träd, och de resultat som framgå därav, sedda i sammanhang med de föregående prövningarna på medelträden, för vilkas beräkning använts mer än 1 000 stammar, torde böra tillmätas en viss beviskraft. Därvid framträder som en svaghet, att rotansvällningen ej kontrollerats för fem av de undersökta ytorna. För den sjätte — ytan 473 — där ansvällningen eliminerats, har emellertid en utomordentlig god noggrannhet uppnåtts.

Variationerna för de enskilda stammarna får ej sägas vara avskräckande. Sedan de systematiska avvikelserna eliminerats ligger medelvariationen som förut nämnts föga högre än 4 %.

Formeln torde därför vara väl användbar för en del ändamål, särskilt då det gäller att på ett lättvindigt sätt kubera fällda träd, men även för att utföra tillväxtprocentundersökningar. I det senare fallet behöver det ej förutsättas att formklassen varit konstant under hela den tid som undersökningen omfattar, utan endast att förändringarna under var och en av de använda delperioderna varit så små att de kunna försummas. En del undersökningar av formelns noggrannhet för dylika ändamål ha utförts av TIRÉN (1926).

En fråga som återstår att besvara gäller emellertid närmeformelns användbarhet för kubering av korta träd. Vid den prövning, som verkställdes å PETERSONS medelstammar, visade det sig, att formeln gav högre värden än sektionskuberingen för de korta trädlängderna, i fråga om vilka det förutsattes att ingen rotansvällning kom med i volymbereäkningen då 1 m långa sektioner användes. Vidare gav den i detta sammanhang utförda prövningen av grafisk utjämning av diametrarna i jämförelse med matematiskt utförd interpolation enligt ekvationen  $y = \log x$  det resultatet, att den grafiska utjämningen vill bli behäftad med ett systematiskt negativt fel för trädlängderna under 10 m, beroende på att mått som tagits med 1 m:s mellanrum komma att ligga relativt sett alltför glest, då den totala trädlängden är liten. Slutligen påverkas sektionskuberingens noggrannhet mycket ofördelaktigt av att sektionernas antal är litet, varvid ett avsevärt negativt fel uppstår vid beräkning av grundvolymen.

På grund av alla dessa ogynnsamma omständigheter är det en mycket otacksam uppgift att med hjälp av skogsförsöksanstaltens kortare provstammar söka klarlägga den uppställda frågan. I stället framträder behovet av ett på särskilt noggrant sätt uppmätt undersökningsmaterial vid vars insamlande även ett diametermått för närmekubering blivit taget ute i skogen.

I själva verket föreligger ett aktuellt behov av en dylik undersökning, som ej får göras i alltför liten skala. Vid kuberingen av försöksytorna är det alltid svårt att beräkna de minsta trädens kubikmassa, exempelvis då det gäller granunderväxten i ett bestånd av annat trädslag. Man kan icke fälla provstammar utan att göra sådana ingrepp som ej äro önskvärda, och en mätning på de stående småträden ställer sig för kostsam i förhållande till betydelsen av den kubikmassa det gäller att uppskatta, såvida icke en enkel och tillräckligt noggrann metod kan utarbetas. Å andra sidan kan man icke frångå kravet på att en uppskattning göres även av de små stammarnas volym.

Det är därför önskligt att en undersökning en gång för alla utföres för dessa smådimensioner, så att goda erfarenhetstal kunna åstadkommas. Det är högst troligt, att dessa småträd i medeltal icke variera avsevärt från vissa standardvärden, men vid en undersökning bör man naturligtvis från början särskilja materialet så att exempelvis ålderns och beståndsformens inflytande kunna studeras. Resultatet kan tänkas komma att föreligga i form av kuberingstal efter brösthöjdsdiameter och höjd, såsom en serie formhöjds- eller formklassvärden eller också som en enkel kuberingsformel av något slag.

Då en undersökning av detta slag troligen kommer att utföras inom ej alltför lång tid, torde vid detta tillfälle även en prövning av huru det ställer sig med mätning vid  $\frac{1}{3}$  av stamlängden vara på sin plats, och det finnes således anledning att tills dess uppskjuta bedömandet av denna fråga. Jag vill därför inskränka mig till att anföra de siffror vartill jag kommit vid ett prov med närmeformeln på provstamsmaterialet från en enda yta i tallungskog, nämligen försöksytan 470, belägen nära Lycksele i Lappland. Ytan 470 är utlagd år 1918 i 50-årig, självsådd, väl slutet tallskog å lavrik, torr mark av ungefär Bon. VII. Ett antal av 24 st. provstammar med en aritmetisk medellängd av 8,3 m blevo år 1924 i m:s-sektionerade, och förutom de ordinarie sektionsmåtten har diametern på och under bark även mätts vid 0,25, 0,75, 1,0, 2,0 och 3,0 meter från roten. Tack vare dessa täta mått i nedre delarna av stammen är det ingen svårighet att grafiskt utjämna stamkurvan så högt upp som till en tredjedel av dess längd nedifrån, och den förut konstaterade tendensen till för låga diametervärden vid den grafiska metodens användning för de korta träden bortfaller. Däremot blir den utjämnade stamkurvan osäker i toppsektionerna, varför en formklassbestämning ställer sig osäker liksom även en sektionkubering medelst kurvans uppdelande i 10 lika långa sektioner. Grundvolymen har därför utan någon ändring satts lika med resultatet av den på marken utförda enmeterssektioneringen, vilken på grund av att sektionerna äro få till antalet tydligen måste vara behäftad med ett negativt fel, om också med ett relativt obetydligt sådant.

I genomsnitt för samtliga 24 stammar gav närmeformeln 0,74 % högre kubikmassa än i m:s-sektioneringen. Felet vid sektionmätningen kan i varje fall förmodas ha uppgått till så mycket att endast 0,5 % bör räknas vara avvikelser för formeln.

Sedan den genomsnittliga avvikelsern eliminerats uppgår medelfelet för enskild stam till  $\pm 4,47$  %.

Resultatet av kuberingen med närmeformeln måste sägas vara mycket noggrant, fastän det här rör sig om korta träd. Emellertid finnes det anledning tro, att stamkurvan hos norrlandstall bättre än hos tallen söderut följer HÖJERS ekvation, och dessutom är resultatet från ett enda bestånd naturligtvis blott att anse såsom ett exempel, vilket ej i och för sig är beviskraftigt men som dock ger ett stöd, då det visar möjligheten av att kubera även smådimensionerna tillfredsställande med hjälp av närmeformeln.

En kort sammanfattning av de viktigaste praktiska resultat som framgått av de utförda undersökningarna skulle kunna formuleras på följande sätt.

HÖJERS ekvation är icke den bästa stamkurvefunktionen för tallen, och då det gäller aptering eller i övrigt uppskattning av stammens dimensioner på olika höjd över marken, böra hellre PETTERSONS eller TIRÉNS avsmalningsfunktioner beagnas.

För kuberingsändamål kan dock även den oförändrade HÖJERS ekvation göra god tjänst, och den närmeformel, som konstruerats med hjälp av denna, synes till och med ge bättre resultat än dem som erhållas med formler vilka deducerats efter de andra prövade stamkurvefunktionerna.

### Litteraturförteckning.

M = Meddelanden från Statens skogsförsöksanstalt.  
Skf = Svenska skogsvårdsföreningens tidskrift.

- BEHRE, C. EDWARD, 1923. Preliminary notes on studies of tree form. *Journal of Forestry*.  
—, 1927. Form-Class Taper Curves and Volume Tables and Their Application. *Journal of Agricultural Research*, Vol. 35 No. 8.
- JONSON, TOR, 1910. Taxatoriska undersökningar om skogsträdens form. I: Granen. Skf.  
—, 1911. » » » » » II: Tallen. »  
—, 1912. » » » » » III: Formbestämning å stående träd. Skf.  
—, 1927. Stamformproblemet (Das Schaftformproblem). M.
- LANGSÆTER, A., 1927. Om granens stammekurve innenfor bark. (Formulas for the taper of trees. Norway spruce inside bark). *Meddelelser fra det norske skogforsøksvesen*.
- LÖNNROTH, ERIK, 1927. Über Stammkubierungsformeln. *Acta Forestalia Fennica* 31.
- MATTSSON, L., 1916. Formklasstudier. (Eine Studie über die Formklassen der dichtgeschlossenen Kiefernbestände). M.
- PETRINI, SVEN, 1918. Formpunktsmetoden (The method of obtaining the form-class and volume of single trees by the use of form-point). M.  
—, 1921. Stamformsundersökningar. (Stem form investigations). M.  
—, 1926. Formeln für Stammkubierung. *Tharandter forstliches Jahrbuch*.  
—, 1928. Sektionskuberingsens noggrannhet. (Die Genauigkeit der sektionsweisen Kubierung). M.
- PETTERSON, HENRIK, 1925. Sambandet mellan kronan och stamformen. Skf.  
—, 1926. Studier över stamformen. (Studien über die Stammform). M. N:o 23.
- SKINNEMOEN, KNUT A., 1926. Sambandet mellem den prosentiske flate- og volumøkning hos stammer med forskjellig form og vekst. *Tidskrift for Skogbruk*.
- TIRÉN, LARS, 1922. Om en ekvation för stamkurvan. Skf.  
—, 1926. Formeln für Stammkubierung. *Referat Skf*.  
—, 1928. Till frågan om tallstammens avsmalning och volymberäkning. (To the Question of Tapering and Volume Calculation of Pine Trunks). M.
- ÖSTLIND, JOSEF, 1925. Trädens kubikmassa enligt HÖJERS stamkurva. Skf.  
—, 1926. Trädens kubikmassa och tillväxt enligt HÖJERS stamkurva. Skf.

## RESÜMEE.

## Eine Näherungsformel für Stammkubierung.

Die Formklasse eines Baumstammes wird bestimmt durch das prozentuale Verhältnis zwischen zwei Durchmesserwerten, wovon der erste an der Hälfte des Abstandes des zweiten, vom Gipfel aus gerechnet, belegen ist. Gewöhnlich wird hier vorausgesetzt, dass dieser zweite Durchmesser an der Basis des Baumes liegt, und wir rechnen dann mit Basalformklassen. Die Basalformklasse ist bei einem natürlichen Baum grösser als die Brusthöhenformklasse, wenn der Wurzelanlauf eliminiert wird. Bei einem Paraboloid wird die Formklasse immer gleich, wenn man es von der Basis aus abstumpft. Mit HÖJERS Stammkurvengleichung erreicht man dagegen Übereinstimmung mit dem Baumstamm in dieser Hinsicht. In Tabelle 4 sind für verschiedene Schaftlängen die Werte der Brusthöhenformklassen angegeben, welche auftreten, vorausgesetzt dass die HÖJER'sche Gleichung gültig ist, und dass die Basalformklasse 0,55, 0,60 etc. ist.

In dem vorliegenden Aufsatz werden fünf verschiedene Schaftkurvengleichungen besprochen.

1:o: Die Formeln der Paraboide:  $\frac{h}{H} = \left(\frac{d}{D}\right)^\nu$ ,  $g = ah^\nu$ , wo  $H$  den Abstand vom Gipfel zu dem Durchmesser an der Basis  $D$ ,  $h$  den Abstand vom Gipfel zu dem Durchmesser  $d$ ,  $g = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $\nu$  den Formexponent and  $a$  eine

Konstante bedeutet. Das Volumen eines solchen Körpers ist  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$ .

2:o: Die HÖJER'sche Gleichung:  $\frac{d}{D} = C \log \frac{c+l}{c}$ , wo  $l$  der Abstand vom Gipfel zu  $d$  ist, in Prozenten von  $H$  ausgedrückt, und  $C$  und  $c$  Konstanten sind, die für jede Formklasse verschiedene Werte bekommen (Tabelle III). Die HÖJER'sche Gleichung kann auch mit den Bezeichnungen PETTERSONS (1925, 1926) beschrieben werden, wo in der Funktion  $y = \log x$   $y$  den Durchmesser bedeutet und der Gipfel des Baumes in dem Punkt  $x = 1$  belegen ist. Die Formklasse ist dann durch die Basalabszisse  $x_b$  definiert, denn  $D =$

$= \log x_b$  und  $\delta = \log \frac{x_b + 1}{2}$ , also die Formklasse  $\varphi = \frac{\delta}{D} = \frac{\log \frac{x_b + 1}{2}}{\log x_b}$ .

Das Volumen eines HÖJER'schen Körpers ist  $W = GHF$ , wo  $F$  die absolute Formzahl bedeutet. Nach ÖSTLIND (1925) ist

$$F = \frac{x_b}{x_b - 1} \left( 1 - \frac{0,868 \cdot 5890}{\log x_b} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{0,868 \cdot 5890}{\log x_b} \right)^2$$

3:o: PETTERSON (1926) hat für die Kiefer eine Stammkurvenkombination aufgestellt, wo der Gipfel des Baumes in den Ursprung ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) verlegt worden ist, und die obersten Partien der Stammkurve von  $x = 0$  bis  $x = 4$  durch die Gleichung  $y = 2 \log \left( 1 + \frac{x}{4} \right)$ , die übrigen von  $x = 4$  bis

$x = \infty$  durch die Gleichung  $y = \log x$  repräsentiert werden. Eine Volumenformel kann man auch aus dieser Kurvenkombination erhalten, nämlich  $W = W_1 + W_2$ , wo  $W_1$  das konstante Volumen der oberen Partien bis  $x = 4$ ,  $W_2$  das Volumen von den Partien zwischen  $x = 4$  und  $x = x_b$  bedeutet. Wir rechnen hier nur mit relativen Einheiten und erhalten  $W_1 = \pi M^2 \cdot 0,753269$  und

$$W_2 = \frac{\pi M^2}{4} \left\{ x_b \left[ \left( \frac{\log x_b - 0,4342945}{0,4342945} \right)^2 + 1 \right] - 4,596 \cdot 893 \right\}, \text{ wo } M = 0,4342945.$$

— Für diese Formel ist  $x_b$  nicht dasselbe wie in der HÖJER'schen, denn hier liegt der Gipfel in dem Punkt  $x = 0, y = 0$ . Für eine gewisse Formklasse

$$\varphi \text{ kann man } x_b \text{ nach folgender Formel berechnen: } \varphi = \frac{\log \frac{x_b}{2}}{\log x_b}.$$

4:0: TIRÉN (1922, 1928) hat eine neue Stammkurvengleichung aufgestellt:  $r = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ , wo  $r$  den Radius bezeichnet. Der Gipfel des Baumstammes liegt auch hier in dem Ursprung, und übereinstimmend mit den Bezeichnungen PETERSONS wird die Form durch die Basalabszisse  $x_b$  charakterisiert. Die Formklasse ist somit  $\varphi = \frac{\log \left[ \frac{x_b}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{x_b}{2}\right)^2} \right]}{\log(x_b + \sqrt{1 + x_b^2})}$ . Das Volumen wird in relativen Einheiten mittelst folgender Formel ausgedrückt:

$$W = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\xi^2 - 1}{\xi} (\log^2 \xi + 2M^2) - \frac{\xi^2 + 1}{\xi} \cdot 2M \log \xi \right\}, \text{ wo } \xi = x_b + \sqrt{1 + x_b^2}.$$

5:0: BEHRE (1923, 1927) hat gleichfalls eine neue Stammkurvengleichung publiziert:  $\frac{d}{D} = \frac{l}{a + bl}$ , wo  $l$  dieselbe Bedeutung hat wie in HÖJERS Gleichung,  $a$  und  $b$  Konstanten sind. Diese Konstanten sind von LANGSÆTER (1927) für verschiedene Formklassen berechnet worden. LANGSÆTER (1927) hat ausserdem folgende Volumenformel angegeben:

$$W = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{H}{b_2} \left[ 1 - \frac{2a}{bM} \cdot \log \frac{1}{a} + a \right], \text{ wo } M = 0,4342945.$$

Bevor ich zu einer Prüfung dieser fünf Ausdrücke für die Stammform übergehe, stelle ich einige Vergleiche zwischen den Volumina der Paraboloiden und der entsprechenden HÖJER'schen Körper an. Wir setzen voraus, dass die Formklasse und die Basalgrundfläche eines Stammes bekannt sind. Das Volumen fällt aber verschieden aus, wenn wir den Stamm als ein Paraboloid betrachten, und wenn wir ihn nach der logarithmischen Funktion kubieren. Im ersteren Fall ist das Volumen  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$  im anderen  $W = GHF$ . Für verschiedene Werte des Basalformquotienten gestalten sich die prozentualen Differenzen verschieden. Setzen wir  $\frac{W}{V} = F(\nu + 1)$ , so kann daraus leicht berechnet werden, wieviel grösser oder kleiner die Kubikmasse des Paraboloids ist, in Prozenten von  $V$  ausgedrückt. Die Tabelle

$$W = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{H}{b_2} \left[ 1 - \frac{2a}{bM} \cdot \log \frac{1}{a} + a \right], \text{ wo } M = 0,4342945.$$

Bevor ich zu einer Prüfung dieser fünf Ausdrücke für die Stammform übergehe, stelle ich einige Vergleiche zwischen den Volumina der Paraboloiden und der entsprechenden HÖJER'schen Körper an.

Wir setzen voraus, dass die Formklasse und die Basalgrundfläche eines Stammes bekannt sind. Das Volumen fällt aber verschieden aus, wenn wir den Stamm als ein Paraboloid betrachten, und wenn wir ihn nach der logarithmischen Funktion kubieren. Im ersteren Fall ist das Volumen  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$  im anderen  $W = GHF$ . Für verschiedene Werte des Basalformquotienten gestalten sich die prozentualen Differenzen verschieden. Setzen wir  $\frac{W}{V} = F(\nu + 1)$ , so kann daraus leicht berechnet werden, wieviel grösser oder kleiner die Kubikmasse des Paraboloids ist, in Prozenten von  $V$  ausgedrückt. Die Tabelle

1 gibt die Resultate einer solchen Analyse wieder. Das positive Vorzeichen bedeutet hier, dass das Paraboloid ein grösseres Volumen hat, was im allgemeinen der Fall ist infolge der stärkeren Dimensionen des Paraboloids in den Gipfelsektionen. In der unteren Hälfte des Körpers verläuft jedoch die Kurve des Paraboloids innerhalb der logarithmischen Kurve. In den höheren Formklassen überwiegt die Tendenz der Gipfelsektionen, in den niedrigsten Formklassen aber macht sich die negative Tendenz der unteren Hälfte mehr geltend, so dass das Paraboloid eine geringere Kubikmasse erreicht. Bei einem Basalformquotienten von ungefähr 0,56 werden die Volumen der beiden Körper gleich.

Die Differenzen sind für Formklassenwerte unter 0,60 sehr gering, und man kann beliebig die eine oder die andere Formel anwenden, wobei man höchstens eine Differenz von  $\frac{1}{8}$  % riskiert, wenn die Berechnung von der Basalgrundfläche ausgeht. Wird aber der Messpunkt an eine andere Stelle verlegt, so vergrössert sich der Fehler. Unter der Voraussetzung, dass der Schaft der HÖJER'schen Gleichung folgt, und dass man die Grundfläche bei  $z$  von der Basis aus gemessen hat, werden die prozentualen Fehler, die man

bei einer Kubierung nach der Formel  $V = \frac{GH}{\nu + 1}$  erhält, die Werte der Ta-

belle 2 in verschiedenen Basalformklassen annehmen.

Wie aus Tabelle 2 ersichtlich ist, werden alle Abweichungen positiv, d. h. das Paraboloid hat ein grösseres Volumen, und die Prozentziffern sind beachtenswert gross. Will man also eine Näherungsformel für Kubierung konstruieren, so muss das Resultat ganz verschieden ausfallen, falls man die eine oder die andere Funktion verwendet.

### I. Prüfung der verschiedenen Stammkurvengleichungen auf natürlichem Material.

PETTERSON (1926) hat ein grosses Material von Kiefernstämmen in 6 Höhenklassen untersucht, und die prozentuale Verjüngung der Mittelstämme in seiner Tabelle 3 mitgeteilt. Dieses Material hat den grossen Vorteil, nicht ausgeglichen zu sein. Jeder Durchmesserwert ist also ein rein arithmetisches Mittel, in Prozenten des Durchmessers der Messungsstelle in der Nähe von der Stammmitte ausgedrückt.

In Tabelle 5 finden sich die Resultate der Ausgleichungen, die mit den oben erwähnten fünf verschiedenen Stammkurvenfunktionen erreicht sind. In dieser Tabelle sind zuerst innerhalb jeder Höhenklasse die Durchschnittszahlen der relativen Verjüngung der Stämme nach PETTERSON wiedergegeben, und darnach die Differenzen in Prozenten des Durchmessers an der Stammmitte, erhalten mittelst der verschiedenen Gleichungen. Die Zahlen der Kurvenkombination von PETTERSON hat er selbst angegeben (1926) bezüglich des fraglichen Materials. Für TIRÉNS, BEHRES, HÖJERS und die Paraboloidengleichung hat Verf. die Differenzen berechnet, wobei die Basalformklasse für den ganzen Stamm zuerst mit Hilfe zweier Durchmesserwerte berechnet worden ist. Diese Durchmesserwerte, dem natürlichen Material entnommen, sind so gewählt, dass zwei Messpunkte benutzt wurden, die ungefähr bei 20 % und 60 % der Stammlänge von unten aus belegen sind.

Aus der Tabelle 5 geht hervor, dass alle fünf Gleichungen ganz gut *die*

*untere Stammhälfte* ausgleichen können. Jedoch ist zu bemerken, dass das Paraboloid durchgehends etwas zu niedrige Werte aufweist.

Betreffs der *oberen* Stammportionen treten die Verschiedenheiten der Formeln deutlicher hervor. Das Paraboloid muss hier als ganz unverwendbar bezeichnet werden, weil sehr grosse positive Differenzen auftreten. Es ist aber möglich, bessere Übereinstimmung zu erreichen, wenn wir zwei Paraboide zusammensetzen wollen (vgl. PETRINI 1921 und 1926). Kein solcher Versuch ist in diesem Zusammenhange geprüft worden. — Von den übrigen Gleichungen sind alle in den Gipfelsektionen mit geringeren Fehlern behaftet als die HÖJER'sche Formel. PETERSONS und TIRÉNS Formel haben das beste Resultat geliefert, aber BEHRES Gleichung erweist sich auch als gut. Diese Tatsachen gehen aus den Mittelwerten der Differenzen deutlich hervor. Bei dieser Berechnung sind die vom Wurzelanlauf beeinflussten Durchmesserwerte ausgeschlossen worden, und der Mittelwert ist berechnet mit Beachtung der Vorzeichen.

In Tharandter forstliches Jahrbuch, H. 1, 2 und 3 1926 hat Verf. eine Näherungsformel publiziert:  $V_1 = 0,73 g_{0,34} H$ . Das Volumen eines Stammes soll hiernach ermittelt werden können mit Hilfe der Grundfläche bei 34 % der Schaftlänge von unten. Diese Formel ist auf die HÖJER'sche Schaftkurvengleichung gegründet. In dem oben genannten Aufsatz ist die Frage nur theoretisch-matematisch behandelt worden.

Will man eine praktische Prüfung anstellen, muss man sich zuerst die Voraussetzungen der Formel klar machen. Es ist ohne weiteres völlig klar, dass eine Kubierungsformel, die sich direkt auf eine Stammkurvengleichung stützt, sich nicht auf den Wurzelanlauf beziehen kann, wenn dies nicht bei der ursprünglichen Gleichung selbst der Fall ist. Daher ist es verständlich, dass man eine Prüfung an Material, bei dem der Wurzelanlauf eliminiert worden ist, anstellen muss. In gleicher Weise ist es — wenigstens für die Kiefer — notwendig, die systematischen Abweichungen der Rinde zu eliminieren, wenn man sich einen Begriff von der Genauigkeit der Formel zu verschaffen wünscht. Zeigt es sich dann, dass die Formel gut ist, so kann man eventuell weitergehen und Modifikationen durchführen, womit eine Übereinstimmung auch für andere Voraussetzungen als die zunächst geltenden geschaffen werden kann.

Das von PETERSON publizierte Material er bietet gute Möglichkeiten, eine orientierende Untersuchung der Genauigkeit der Formel für die Kiefer anzustellen. Gleichzeitig habe ich auch die anderen obengenannten Stammkurvenfunktionen in dieser Hinsicht prüfen wollen. Daher habe ich auch für sie Näherungsformeln berechnet, und zwar mit denselben Voraussetzungen wie vorher (vgl. PETRINI 1926). Alle Näherungsformeln ergeben somit exaktes Resultat für das Volumen des betreffenden Körpers, wenn die Formklasse die Werte 0,60 und 0,70 hat. Werden die jeweiligen Volumenformeln der verschiedenen Schaftkurvengleichungen der Näherungsformel  $V_1 = \alpha g_z H$  für die genannten zwei Formklassenwerte gleichgesetzt, so erhält man für jeden Fall zwei Gleichungen, woraus  $\alpha$  und  $z$  bestimmt werden können. Auf diese Weise erhalten wir die neuen Näherungsformeln für PETERSONS, TIRÉNS und BEHRES Funktionen. Dazu kommen noch die von mir früher nach HÖJERS Gleichung, nach der von JONSON mit Hilfe einer »biologischen Konstanten« modifizierten HÖJER'schen Gleichung für die Kiefer, und nach der Paraboloidgleichung



hergeleiteten Formeln, und ausserdem können wir auch die alte HOSSFELD'sche Formel einer Prüfung unterziehen.

In Tabelle 6 sind so die Resultate der folgenden sieben Formeln zusammengestellt:

*Formel I:* PETRINI nach HÖJER'S Gleichung:  $V_1 = 0,73 g_{0,34} H.$

*Formel II:* » » TIRÉN'S » :  $V_1 = 0,717 g_{0,337} \cdot H.$

*Formel III:* » » BEHRE'S » :  $V_1 = 0,70 \cdot g_{0,322} \cdot H.$

*Formel IV:* » » der Paraboloidgleichung:  $V_1 = \frac{25}{32} g_{0,35} H.$

*Formel V:* HOSSFELD » » » :  $V_1 = \frac{3}{4} \cdot g_{1/3} H.$

*Formel VI:* PETRINI » PETERSON'S Kombination:  $V_1 = 0,687 g_{0,316} H.$

*Formel VII:* » » JONSON:  $V_1 = 0,71 g_{0,33} \cdot H.$

Die Eliminierung des Wurzelanlaufs ist mit Hilfe von PETERSON'S Ausgleichung durchgeführt, wobei für die zwei kurzen Bäume von 8 und 4 m Länge keine Reduktion vorgenommen worden ist. Die Mittelstämme von 24 und 20 m Länge sind an den drei niedrigsten Messpunkten reduziert worden, der 16 m lange Mittelstamm an zwei Messpunkten und der 12 m lange Stamm an einem Messpunkt.

Die Volumina der Mittelstämme sind also leicht zu berechnen mittels sektionsweiser Kubierung mit 1 m langen Sektionen. Dagegen muss man sich Durchmesserwerte an neuen Messpunkten verschaffen, um die Volumina nach den Näherungsformeln berechnen zu können.

Dabei habe ich zuerst mit Hilfe graphischer Ausgleichung die betreffenden Werte abgelesen. Die Differenzen welche daraus berechnet wurden, sind in Tabelle 6 in Klammern angegeben. Danach habe ich für die fünf wichtigsten Formeln die Durchmesserwerte in mathematischer Weise bestimmt. Dabei bin ich von zwei Durchmesserwerten des Grundmaterials ausgegangen, und die dazwischen belegenen Durchmesserwerte sind nach der Funktion  $y = \log x$  berechnet worden unter der Voraussetzung, dass der Gipfel des Baumes in dem Ursprung gelegen ist. — Die Verschiedenheiten sind sehr gering in den höheren Höhenklassen. Für kurze Bäume erhält man jedoch zu niedrige Durchmesserwerte mittels direkter graphischer Ausgleichung. Der Abstand 1 m zwischen den Messungsstellen ist hier relativ gross, was die Ausgleichung erschwert.

Verf. hat (1928) eine Untersuchung über die Genauigkeit der sektionsweisen Kubierung durchgeführt. Nach den Resultaten dieser Untersuchung dürfte der Kubierungsfehler mit 4 Sektionen, wenn die Formklasse 0,63 ist, ungefähr —0,7 % betragen. Die Differenzen der untersten Zeile der Tabelle VI müssen folglich um diesen Betrag vermindert werden.

Es geht aus der Tabelle 6 hervor, dass keine der Formeln zu einer Ausgleichung des Gesamtvolumens des Stammes inklusive Wurzelanlauf verwendbar ist. Damit fallen die paraboloidischen Formeln aus der Diskussion weg. Es konnte nämlich möglich sein, dass die grosse Ausbauchung dieses Körpers in den obersten Partien eine passende Kompensation für den Wurzelanlauf darstelle. Da dies nicht der Fall ist, haben wie keine Veranlassung mehr, es mit dieser Gleichung zu versuchen.

Betreffs der übrigen Formeln kann man keine solche Kompensation fordern. Vergleichen wir die Resultate der verschiedenen Formeln, wenn der Wurzelanlauf mit Hilfe der PETERSON'schen Gleichung eliminiert ist, so darf man sagen, dass Formel I die Probe gut bestanden hat, speziell wenn man die kurzen Bäume ausser acht lässt. Die Volumina dieser Bäume sind nicht genau bestimmt, und eine besondere Untersuchung ist zur Beurteilung dieses Falles nötig. Die übrigen Formeln, bzw. nach TIRÉNS, BEHRES, PETERSONS und JONSONS Funktionen berechnet, ergeben in der Regel niedrigere Resultate bei Kubierung als Formel I, was auch schon ein Vergleich der Konstanten ( $\alpha$ ) derselben wahrscheinlich macht.

Die Erfahrungen der Proben an einzelnen Bäumen, worauf wir später in dieser Arbeit zurückkommen, zeigen jedoch, dass man bei Kubierung der Kiefer eher zu niedrige als zu hohe Resultate erhält, auch mit der Formel I. Wir haben daher keine Veranlassung diese Formel gegen eine von den anderen auszutauschen, solange es sich um diese Baumart handelt.

Der Betrag eines erhaltenen Fehlers bei der Formel I ist von drei Faktoren abhängig. Erstens ist die Formel so konstruiert, dass sie nur für die beiden Formklassen 0,60 und 0,70 exakt stimmt, auch wenn die HÖJÉR'sche Gleichung exakt den Dimensionen des Stammes entspricht. Zwischen diesen Formklassen entsteht ein positiver Fehler, d. h. die Formel ergibt ein wenig zu hohe Resultate, ausserhalb der angegebenen Formklassengrenzen erhält man negative Fehler. Eine zweite Ursache finden wir in der Tatsache, dass die HÖJÉR'sche Gleichung durchgehends für die Kiefer ein wenig zu grosse Gipfeldimensionen aufweist, was eine Erhöhung des Näherungsvolumens bewirkt. Endlich kommt es darauf an, ob die natürliche Stammkurve an der Messungsstelle grösser oder kleiner ist, als was normal anzusehen wäre. Weist der Stamm eine Ausbauchung an der Messungsstelle auf, so beeinflusst diese das Resultat der Näherungsformel in positive Richtung hin, und umgekehrt.

## II. Graphische Herleitung der Formel I.

ERIK LÖNNROTH (1926) hat unter Verwendung der paraboloidischen Gleichung folgende Formulierung des Näherungsformelproblems aufgestellt. Die Formel wird  $V_1 = F_a G_a H$  geschrieben, wo  $a$  die Messungsstelle in Prozenten der Stammlänge  $H$  von unten angibt,  $G_a$  ist die zu messende Grundfläche, und  $F_a$  ist die Konstante.  $F_a$  variiert für verschiedene Messpunkte und Formklassen. Geht man von einer bestimmten Messungsstelle aus, die in relativem Mass gleich belegen an allen Stämmen ist, so kann man  $F_a$  für die verschiedenen Formklassen berechnen, und darnach wählt man einen bestimmten Wert  $F_{ab}$ , der am wenigsten variiert für die Formklassenwerte, welche am meisten in Frage kommen. In dieser Weise kann man Näherungsformeln in unbegrenzter Anzahl konstruieren, die für verschiedene Messungsstellen an dem Stamm gelten. Diese Formeln werden dann an natürlichen Baumstämmen probiert, und nach dieser Prüfung kann beurteilt werden, welche gut und welche schlecht sind.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die praktischen Prüfungen eine sehr grosse Anzahl genau kontrollierter Stämme umfassen muss, damit ein sicheres Urteil gefällt werden kann. LÖNNROTH hat aber nur 24 Kiefernstämmen benutzt, die in 1 m langen Sektionen mit Rinde gemessen sind.

Es kann ein gewisses Interesse haben, eine Analyse nach der Methode LÖNNROTHS für die HÖJER'sche Gleichung durchzuführen, und ich habe die Resultate einer solchen Berechnung in Tabelle 7 zusammengestellt. In

Figur 1 ist  $x_b - 1$  die Stammlänge,  $\alpha = \frac{a}{x_b - 1}$ , und  $G_a = \frac{\pi}{4} [\log(x_b - a)]^2$ .

Ferner ist  $W = G_0 H F_0$ ,  $V_1 = G_a H F_a$ ,  $G_0 = \frac{\pi}{4} (\log x_b)^2$ ,

wenn wir in den Einheiten des Systems rechnen. Folglich wird  $F_a =$

$$\frac{F_0 (\log x_b)^2}{[\log(x_b - a)]^2}.$$

$F_0$  und  $x_b$  für die HÖJER'sche Gleichung werden der Tabelle 3 entnommen, und die  $F_a$ -Werte der Tabelle 7 sind dann nach dieser Formel berechnet worden.

Am besten können die Ergebnisse überblickt werden, wenn sie wie in Figur 2 graphisch dargestellt sind. Aus dieser Figur geht hervor, dass in sämtlichen Formklassen die Variationen des  $F_a$  sehr gross werden, wenn die Messungsstelle nahe an der Basis liegt. Bei  $\alpha = 0,3$  macht sich eine Konzentration der niedrigeren Formklassen um einen  $F_a$ -Wert von ungefähr 0,67 geltend, und eine entsprechende Konzentration finden wir für die höheren Formklassen — 0,80 nicht in Rechnung gezogen — bei  $\alpha = 0,38$  oder etwas niedriger um einen  $F_a$ -Wert von ungefähr 0,78.

Der beste Messpunkt für die zwischenliegenden, am öftesten in der Natur auftretenden Formklassen muss also etwa bei  $\frac{1}{3}$  der Stammlänge sich finden, und wenn man eine nähere Untersuchung anstellt, erweist sich 34 % ein wenig besser als  $\frac{1}{3}$ .

Die Untersuchung nach LÖNNROTHS Methode hat also ganz dasselbe Resultat ergeben wie meine frühere mathematische Analyse — etwas anderes konnte ja auch nicht erwartet werden. Ich finde jedoch dieses LÖNNROTH'sche Verfahren sehr umständlich, und die von mir gebrauchte Formulierung scheint mir vorteilhafter zu sein, wenn es sich darum handelt, die Formel konstruieren, welche die genauesten Werte ergeben kann.

### III. Prüfung der Näherungsformel an einzelnen Bäumen.

In der Absicht, etwas von den Variationen kennen zu lernen, habe ich auch Proben an einzelnen Bäumen ausgeführt.

LÖNNROTH (1927) hat an seinen 24 Probestämmen auch meine Näherungsformel geprüft. Er hat dabei Ergebnisse erhalten, die viel zu niedrig gewesen sind, aber er hat ja auch als Vergleichsvolumen die Stammmasse mit Rinde und mit Wurzelanlauf verwendet. Speziell für die Kiefer konnte man somit nichts anderes erwarten, denn die Rinde ist bekanntlich immer im hohen Grade verdickt gegen die Baumbasis zu. Wenn die Formel also für den unberindeten Kiefernstamm richtig ist, so kann sie es für den berindeten nicht sein. Daneben ist zu bemerken, dass sein Material zu klein ist um auf diese Fragen eine Antwort geben zu können.

Alle Prüfungen, die Verf. ausgeführt hat, beziehen sich auf das Volumen ohne Rinde. Für einzelne Bäume ist es aber sehr zeitraubend und schwierig, den Wurzelanlauf zu eliminieren, weshalb ich nur in einem Falle, betreffs der 53 Probestämme der Versuchsfläche 473, dies getan habe. Dabei habe

ich die individuellen Stammkurven graphisch ausgeglichen, und das Grundvolumen ist mit Hilfe von 10 Sektionen berechnet worden, wobei der Kubierungsfehler vernachlässigt werden kann (PETRINI 1928). Das übrige Material besteht aus insgesamt 226 mit 1 m-Sektionen kubierte Kiefernprobestämmen, aus 6 verschiedenen Beständen herkommend, an welchen der Durchmesser bei 34 % der Stammlänge direkt im Walde gemessen worden ist. Die Differenzen der Kubierungen nach der Näherungsformel im Vergleich mit der sektionsweisen Kubierung, in Prozenten des letztgenannten Volumenswertes ausgedrückt, sind aus der Tabelle 8 zu ersehen.

Bei der Berechnung der Mittelfehler wurden die systematischen Fehler ausgeschlossen. Wenn das ganze Material zusammengerechnet wird, ergibt sich eine mittlere Variation von  $\pm 4,38$  % für einzelne Bäume.

Der überall — mit Ausnahme der Versuchsfläche 473, wo der Wurzelanlauf ausgeglichen worden ist — auftretende negative Durchschnittsfehler, wird unzweifelhaft grösstenteils durch den Wurzelanlauf verursacht. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass wenigstens der Fehler der Versuchsfläche 5 auch einen systematischen negativen Fehler der Formel angibt.

Noch erübrigt es aber den Spezialfall zu untersuchen, wie die Formel für kurze Bäume stimmt. Für diese kurzen Bäume — mit weniger als 10 m Stammlänge — nehme ich an, dass kein Wurzelanlauf dem Durchmesser der niedrigsten Messungsstelle beeinflusst. Das Problem ist jedoch nicht einfacher in diesem Fall, denn die Volumenbestimmung ist schwieriger als für grössere Bäume. Das Material unserer Versuchsanstalt von mit 1 m langen Sektionen gemessenen kurzen Stämmen ist für den Zweck nicht genügend genau ermittelt. Darum habe ich nur ein Beispiel vorlegen wollen, und dazu habe ich die 24 Probestämme des Jahres 1924 von der 56-jährigen Kiefernversuchsfläche 470 in Lappland gewählt. Diese Probestämme haben eine arithmetische Mittelhöhe von 8,3 m, und ausser den Messungen an der Mitte der 1 m langen Sektionen sind auch die Durchmesserwerte bei 0,25, 0,75, 1,0, 2,0 und 3,0 m von der Basis direkt an den im Walde liegenden Stämmen rechteckig kluppiert worden. Es bietet also keine grossen Schwierigkeiten, die niedrige Partien der Stammkurven graphisch auszugleichen, und der Durchmesser bei 34 % der Länge kann relativ genau ermittelt werden. Dagegen werden die Gipfelsektionen einzelner Bäume unsicher, weshalb keine Formklassenwerte ermittelt werden können. Eine Sektionierung der Schaftkurve, wie für die längeren Bäume, kann auch nicht durchgeführt werden, sondern ich habe die 1 m-Sektionierung für das Grundvolumen gelten lassen, obschon diese Ergebnisse ein wenig zu niedrig sein müssen.

Durchschnittlich hat die Formel ein Volumen ergeben, das 0,74 % höher ist als die Sektionsmasse, und wenn diese »systematische« Abweichung eliminiert ist, beträgt der mittlere Fehler für den einzelnen Stamm + 4,47 %. Man kann also sagen, dass die Formel auch in diesem Beispiel sich sehr gut bewährt hat.

Man kann doch natürlich nichts von der allgemeinen Anwendbarkeit der Formel wissen, bevor ein grösseres Material von kurzen Bäumen individuell untersucht worden sind.

Es wäre wünschenswert für den Zweck der Kubierung auf den Versuchsflächen eine einfache und genügend sichere Methode zu finden womit die Volumina der kleinen Bäumen ermittelt werden könnten. Besonders ist ein

solcher Bedarf hervortretend betreffs solcher Versuchsflächen, die Fichtenunterwuchs enthalten. Man kann hier keine Probestämme fällen ohne solche Eingriffe zu machen, welche nicht Programmässig sind.

Wahrscheinlich dauert es nicht lange, bevor eine spezielle Untersuchung über die Volumina dieser kleinen Bäumen ausgeführt werden muss, und dann ergibt sich Gelegenheit dazu, die Nährungsformel gleichzeitig zu prüfen.

---

Zusammenfassend möchte ich also behaupten, dass die HÖJER'sche Stammkurvengleichung für die Kiefer nicht die beste ist, weshalb es sich empfiehlt bei Schätzung der Dimensionen den Stamm aufwärts lieber die Funktion von PETERSON, TIRÉN oder BEHRE zu benutzen. Für Kubierungszwecke dagegen kann auch die HÖJER'sche Gleichung gute Dienste leisten, und die Nährungsformel, welche nach dieser Gleichung konstruiert ist, scheint auch besser zu sein als die der übrigen Funktionen.

---