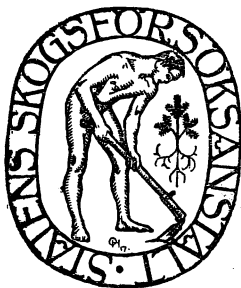


# TILLVÄXTPROCENTENS BERÄKNANDE

*THE CALCULATION OF THE INCREMENT PERCENT WITH  
THE METHOD OF COMPOUND INTEREST*

AV

SVEN PETRINI



---

**MEDDELANDEN FRÅN STATENS SKOGSFÖRSÖKSANSTALT**  
**HÄFTE 22 · Nr 4**

---

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM 1925

MEDDELANDEN  
FRÅN  
STATENS  
SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 22. 1925

MITTEILUNGEN AUS DER  
FORSTLICHEN VERSUCHS-  
ANSTALT SCHWEDENS

**22. HEFT**

REPORTS OF THE SWEDISH  
INSTITUTE OF EXPERIMENTAL  
FORESTRY

**N:o 22**

BULLETINS DE LA STATION DE RECHERCHES  
DES FORÊTS DE LA SUÈDE

**N:o 22**



REDAKTÖR:  
PROFESSOR HENRIK HESSELMAN.

## INNEHÅLL:

	Sid.
TAMM, OLOF: Grundvattenrörelser och försumpningsprocesser be- lysta av grundvattnets syrehalt i nordsvenska moräner .....	1
Grundwasserbewegungen und Versumpfungsprozesse, durch Sauer- stoffanalysen des Grundwassers nordschwedischer Moränen erläutert	38
ROMELL, LARS-GUNNAR: Växttidsundersökningar å tall och gran ...	45
Recherches sur la marche de l'accroissement chez le pin et l'épi- céd durant la période végétation .....	117
ROMELL, LARS GUNNAR: Till kottklängningens teori och praxis .....	125
Zur Theorie und Praxis des Klengprozesses.....	138
PETRINI, SVEN: Tillväxtprocentens beräkning .....	145
The calculation of the increment percent by the compound interest method .....	165
HESSELMAN, HENRIK: Studier över barrskogens humustäcke, dess egenskaper och beroende av skogsvården .....	169
Studien über die Humusdecke des Nadelwaldes, ihre Eigenschaften und deren Abhängigkeit vom Waldbau.....	508
PETRINI, SVEN: Om uppskattningen på försöksparkerna.....	553
Redogörelse för verksamheten vid Statens skogsförsöksanstalt under år 1925. (Bericht über die Tätigkeit der Forstlichen Ver- suchsanstalt Schwedens im Jahre 1925; Report on the work of the Swedish Institute of Experimental Forestry).	
Allmän redogörelse av HENRIK HESSELMAN .....	574
I. Skogsavdelningen (Forstliche Abteilung; Forestry division) av HENRIK PETTERSON .....	574
II. Naturvetenskapliga avdelningen (Naturwissenschaftliche Abteilung; Botanical-geological division) av HENRIK HESSELMAN	585
III. Skogsentomologiska avdelningen (Forestentomologische Abteilung; Entomological division) av IVAR TRÄGÅRDH.....	586
IV. Avdelningen för förnygringsförsök i Norrland (Abtei- lung für die Verjüngungsversuche i Norrland; Division for afforestation problems in Norrland) av EDVARD WIBECK .....	588



## TILLVÄXTPROCENTENS BERÄKNANDE.

Ett närmeförfarande.

The calculation of the increment percent with the method of compound interest.

Tvenne vägar hava beträts i fråga om tillväxtens bestämmande i skogen. Den ena av dessa är använd av försöksanstalterna, som tillämpa total inventering av förrådet vid olika tillfällen. Därvid räknas skillnaden mellan uppskattningarna av samma träd vid två olika tillfällen utgöra den tillväxt som avsatt sig under mellanperioden. Den andra metoden, som allmänt brukas vid taxeringar, går ut på att medelst borring utröna diameterökningen samt genom mätning eller uppskattning av toppskottens längd bestämma höjdtillväxten. Formen förutsattes då vanligen ha varit konstant under perioden i fråga.

Det har ifrågasatts, huruvida de upprepade inventeringarna skulle kunna ge tillräckligt säkra värden på differenserna, och man har menat, att en metod, som går ut på att direkt mäta skillnaden, borde kunna ge bättre resultat, under det att variationerna vid uppskattningarna av beståndet skulle kunna bli så stora, att de uppsluka eller förstora skillnaden mellan de resultat som ernås vid olika tillfällen.

Ehuru det ej kan förnekas, att den löpande tillväxten, bestämd period för period genom upprepade inventeringar, kan förete en del störningar i förloppet från den ena perioden till den andra, vilka störningar ofta äro förorsakade av rena variationer i sammansättningen av provstamsmaterialet vid de olika tillfällena, torde det likväl böra anses, att denna metod utan tvekan bör ges företrädet. Därmed är ej sagt att icke åtskilliga förbättringar kunna införas, vilka möjliggöra bättre kontroll på att icke omotiverade hopp inträffa i serierna, och främst bland de medel som därvid stå till förfogande kommer måhända ett system med stående permanenta provstammar i åtanke.

Emellertid giva de upprepade revisionerna i och för sig möjlighet till kontroller, och siffrornas säkerhet växer med antalet efter varandra gjorda uppskattningar. Då man exempelvis har fått fyra eller fem 5-åriga perioder undersökta, finnes alltid utvägen att jämma ut eventuella oregelbundenheter genom att slå ihop perioderna två och två samt jämföra de

nya medeltalen med dem man hade förut, varigenom goda och väl utjämnade serier över tillväxtens allmänna gång kunna erhållas på ett enklare sätt, i det man härigenom skaffar sig nya punkter att arbeta

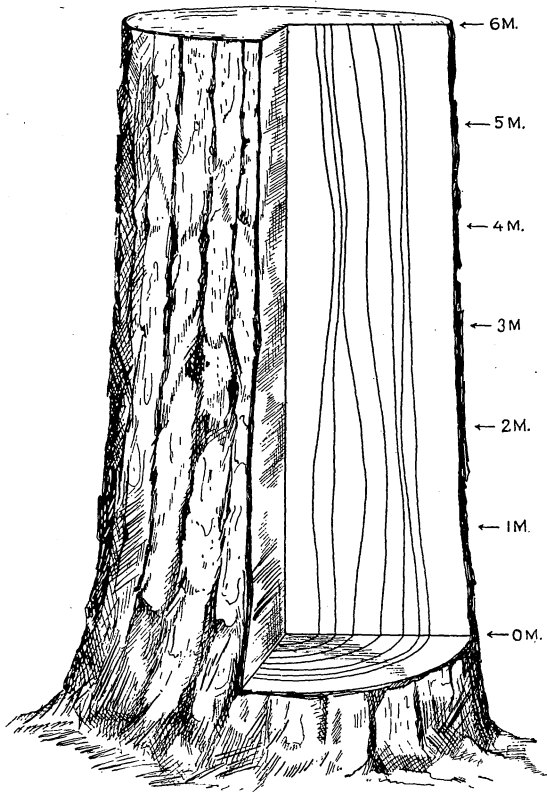


Fig. 1. Framställning av årsringarnas förlopp enligt en amerikansk undersökning av *Pinus radiata*. (Efter D. T. MAC DOUGAL, Washington 1924.) Docenten L. G. RÖMELLS nyligen utförda undersökningar å svensk tall synas ge vid handen att det allmänt förekommer liknande oregelbundenheter i årsringsbredden utefter stammen i dess nedre delar. The variation of the annual rings at *Pinus radiata* after D. T. MAC DOUGAL.

med. Vid sammanslagningen måste det utgallrade virket också tagas med i beräkningen.

Vid borring får man i själva verket åtskilligt större felkällor med. Först och främst varierar tjockleken av samma årsring högst avsevärt upp efter stammen, och resultatet kan i stammens nedre delar bli betydligt olika, om man flyttar borren ett par decimeter uppåt eller nedåt stammen, såsom framgår av fig. 1. Vidare är det alltid svårare att mäta små storheter, varför resultatet principiellt bör kunna bli bättre, då man uppmäter hela diametern, än då man blott mäter radietillväxten. Mycket annat spelar också in, som påverkar noggrannheten vid borring. Så t. ex. kan man få betydligt högre värden, om södra sidan av träden undersökes, än om man borrar på nord-

sidan, och alltefter de rådande vindarna utbilda träden större resp. mindre årsringar åt olika sidor av trädet. Härvid kunna olika trädslag förhålla sig olika, allt eftersom tillväxten mest stimuleras av en mekanisk påkänning i form av sträckning eller böjning.

Inventeringsmetoden är det enda sätt man har för att på ett riktigt sätt bestämma tillväxten utanpå bark, i det att härvid mätningarna vid

då olika uppskattningarna utföras på bark. Medelst borring uttränes endast vedkroppens tillväxt, och strängt taget bör man då också inskränka sig till att räkna inom bark, eftersom barkens tillväxt icke är känd.

Emellertid göres härvid vanligen ett fel, som kan vara av betänkligare art än då man förutsätter kubikmassan på bark växa med samma procent som kubikmassan inom bark. Den medelst borring inom bark uppmätta tillväxten beräknas ha avsatt sig på kubikmassan med bark, varigenom ett för lågt värde på tillväxtprocenten blir följd. Hos tjockbarkiga trädslag kan detta spela en ej ringa roll. En jämförelse efter JONSONS tabell för grundytetillväxten visar exempelvis, att en 15 cms tall med 20 mm radietillväxt på 10 år med diskonträkning har en grundytetillväxtprocent av 4,6 %, medan motsvarande procentsiffra inom bark blir ökad till 5,2 %, redan om blott 13 % bark frändrages från diametern. Och då det ju är enbart vedens tillväxt som är uppmätt, bör procenten uträknas på veden. Exemplet är nog för att visa, att beräkningar, utförda på ovannämnda sätt, äro osäkra och med all säkerhet giva för lågt resultat.

Man måste emellertid också skilja på ändamålet med undersökningen, och metodiken kan ställa sig olika, allt efter som man inriktar sig på att utreda tillväxtens allmänna gång med stigande ålder eller man önskar studera periodiciteten i och för sig, såsom exempelvis är fallet, då man vill undersöka klimatets inverkan på tillväxten. I det senare fallet torde stamanalys vara den bästa metoden, vilken också har sin stora betydelse för klarläggande av de allmänna tillväxtlagarna. Man får likväl ej glömma att i fråga om den allmänna utvecklingen för längre tider inträder en skillnad mellan tillväxten hos den enskilda stammen och beståndet, betingad därav, att gallringar inläggas i beståndet. Genom gallringarna minskas det växande kapitalet varje gång, och samtidigt blir det en sovring av materialet. Då man utgår från att gallringen återkommer med ett visst intervall, exempelvis 10 år, bör längden av den period, under vilken man räknar tillväxt varje gång, ej överskrida längden för intervallet mellan gallringarna, om det är beståndets tillväxt man vill lära känna.

Oavsett för vilka ändamål undersökningen göres och på vilket sätt den utföres, uppställer sig emellertid frågan om huru tillväxtprocenten lämpligast bör beräknas. I tillväxtläran har man i regel tillämpat enkel ränta, trots det att den sammansatta räntan här kan vara väl berättigad, såsom nedan skall närmare belysas. Allt efter som man har hänfört den under undersökningsperioden uppmätta genomsnittliga årliga tillväxtkvantiteten till förrådet vid periodens början eller slut beräknar man tillväxtprocenten såsom resp. rabattprocent eller diskontpocent. Den

senare är det som kommit till användning i JONSONS tabeller, och diskontraktningen brukas allmänt vid tillväxtbestämningar i praktiken, då de sista 10 årsringarnas bredd brukar utrönas genom borring, och tillväxtprocenten i grundyta beräknas med användande av den nuvarande grundytan såsom kapitalet. Avsikten är att begagna de funna tillväxtprocenterna för en kalkyl framåt i tiden med det nuvarande förrådet som utgångskapital och alltså med den tysta förutsättningen, att tillväxtens kvantitet under kommande period skall vara lika stor som under den närmast föregående. Eftersom denna förutsättning anses gärna ge för höga resultat, har man sökt en korrektion härför genom att räkna kapitalet på bark, fastän tillväxten är mätt inom bark.

Men vi ha dessutom ett tredje sätt att beräkna tillväxtprocenten, som tillämpas, då det gäller att fastställa den procentuella tillväxten under själva den undersökta perioden. Detta är den PRESSLERSKA närme-metoden, då man sätter tillväxtbeloppet i procent av medeltalet mellan begynnelsekapitalet och slutkapitalet och hänför den funna procentsiffran till åldern vid periodens mitt. Detta sätt att räkna användes mycket inom försöksväsendet och vid allmänna tillväxtundersökningar över huvud taget, så snart det gäller att beräkna en serie efter ålder eller att konstatera det rätta värdet av tillväxtprocenten under en viss tid. Det är naturligtvis då riktigare att hänföra den genomsnittliga tillväxten till det genomsnittliga kapitalet, och det enklaste är ju att taga medeltalet av begynnelse- och slutkapitalet.

I en avhandling år 1923 i *Centralblatt für das gesamte Forstwesen*, hävdar professor A. LEVAKOVIC, Zagreb, som sin ståndpunkt, att sammansatt ränta bör räknas för tillväxtprocenten. Han kan härvid stödja sig på en del föregående auktorer, såsom KUNZE, GUTTENBERG och SCHIFFEL, vilka ha rekommenderat detta sätt för beräkning av tillväxtprocenten. I själva verket måste man medgiva, att trädets tillväxt avsätter sig enligt principen ränta på ränta, då ju icke räntan årligen lyftes utan faktiskt övergår till kapitalet så länge trädet står kvar. På samma sätt förhåller det sig med beståndet under perioderna mellan gallringarna. Den löpande tillväxtprocenten bör därför enligt all logik beräknas, som om tillväxten under perioden skett efter sammansatt ränta. De skäl för undvikande av ränta-på-ränteräkning på ekonomiska värden inom skogsbruket som eventuellt kunna anföras, främst frågan om det allmänna penningvärdets och räntefotens fallande tendens, sakna härvidlag motsvarighet, då det endast rör sig om helt korta perioder för beräkning av löpande tillväxtprocenten.

PRESSLERS närmeformel kan sägas ersätta principen för sammansatt ränta och ger oftast ungefär lika resultat med en kalkyl utförd på



detta sätt. Emellertid finnes det ingen anledning att använda PRESSLERS metod, om denna ej är lättare att räkna med än då man begagnar sammansatt ränta. I själva verket är PRESSLERS formel betydligt obekvämare, ty vid ränta-på-ränteräkning behöver man blott dividera slutkapitalet med begynnelsekapitalet och slå upp den erhållna kvoten i en tabell, där räntefoten kan direkt avläsas, då man söker på antalet år, som tillväxtperioden omfattar. Innan vi gå vidare kan det vara lämpligt att med några exempel demonstrera, huru de på olika sätt beräknade tillväxtprocenterna variera under olika förhållanden.

För enkelhets skull sätta vi varje gång begynnelsekapitalet lika med 100 m<sup>3</sup>, och perioden är 10 år. Vi skola jämföra, huru stora skillnader i tillväxtprocent per år de olika metoderna ge, om tillväxtkvantiteten är lika för varje år eller om den är stigande, resp. fallande.

Det är emellertid i detta sammanhang värdefullt att kunna ange, vilket värde, som skall anses ge det riktiga uttrycket för medeltalet av årliga tillväxtprocenten under en viss period. Varken rabatt- eller diskontmetoden kunna göra anspråk därpå, eftersom de principiellt ej hänföra sig till perioden i dess helhet, utan den ena utgår från begynnelsekapitalet, den andra från slutkapitalet. På samma sätt med den sammansatta räntan och PRESSLERS närmeformel, varvid man utgår från att tillväxten avsätter sig efter en viss bestämd lag. Alla dessa fyra uttryck förbli alltså oförändrade, huru än den årliga tillväxtkvantiteten varierar, om blott begynnelsekapital och slutkapital äro desamma. Vi måste använda ett sådant uttryck som påverkas av de olika årens tillväxt, om vi vilja få fram skillnaden vid olika tillväxtförlopp mellan ändpunkterna för den studerade tidsperioden.

Professor LEVAKOVIC, stödd på SCHIFFEL, utgår från att det riktiga uttrycket för årliga medeltillväxtprocenten för en viss period är det aritmetiska medeltalet av de olika årens procenter.<sup>1</sup> *Detta måste emellertid bestridas, ty man bör även ta hänsyn till vilket kapital som har producerat räntan.* Om alltså en hög procent avsatts under en del

<sup>1</sup> Professor LEVAKOVIC säger: »Fasst man die obige Darstellung des SCHIFFEL'schen Gedankenganges näher ins Auge und bedenkt man weiter, dass die absoluten Zuwachsrößen und infolgedessen auch die laufenden Zuwachsprozente der einzelnen aufeinanderfolgenden Jahre innerhalb einer beliebigen Zeitperiode aus verschiedenen Gründen sehr variieren, so muss man bedingungslos gestehen, dass die SCHIFFEL'sche Idee von der Berechnung des durchschnittlich jährlichen Zuwachsprozentes als arithmetischen Mittels aus allen laufend jährlichen Zuwachsprozenten innerhalb der Periode theoretisch die richtigste, ja allein richtig ist.» Han anser detta vara en mycket viktig sats: »Mit dieser zwar einfachen, aber im vorliegenden Gegenstand von niemand früher vorgebrachten Idee hat SCHIFFEL jedenfalls einen mächtigen Grundstein zur — kan man sagen — theoretisch einwandfreien Lösung aller hieher gehörigen Probleme gelegt.»

av perioden på ett ringa kapital, bör den ej få draga upp medelvärdet för det hela mer än skäligt är. Att enbart räkna ut aritmetiska mediet av de särskilda årens procenter ger därför ett mindre väl bestämt medelvärde än om man väger procenten efter de kubikmassor, som resp. år producerat tillväxten.<sup>1)</sup>

*Om så sker, blir medelprocenten lika med summa tillväxt, satt i procentförhållande till summan av begynnelsekapitalen för de olika åren.*

Beviset är ytterst enkelt. Vi införa följande beteckningar:

Periodens antal år:  $n$

De olika årens tillväxt:  $Z_1 Z_2 Z_3 \dots Z_v \dots Z_n$

Begynnelsekapitalet är:  $m_1 m_2 m_3 \dots m_v \dots m_n$

Tillväxtprocenterna:  $p_1 p_2 p_3 \dots p_v \dots p_n$

Det med kubikmassan vägd medeltalet för perioden av tillväxtprocenterna:  $p$

$$p_1 = \frac{Z_1}{m_1} \cdot 100; p_2 = \frac{Z_2}{m_2} \cdot 100; p_3 = \frac{Z_3}{m_3} \cdot 100; \dots p_n = \frac{Z_n}{m_n} \cdot 100$$

$$p = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + \dots + p_n m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\frac{Z_1 m_1}{m_1} \cdot 100 + \frac{Z_2 m_2}{m_2} \cdot 100 + \dots + \frac{Z_n m_n}{m_n} \cdot 100}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} =$$

$$= \frac{Z_1 \cdot 100 + Z_2 \cdot 100 + Z_3 \cdot 100 + \dots + Z_n \cdot 100}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = 100 \cdot \frac{\sum_1^n Z_v}{\sum_1^n m_v}$$

I exemplen bör väljas en någorlunda normal tillväxtprocent, som dock ej bör vara alltför låg, för att skillnaderna skola fås att framträda. Därför har här 4 à 5 % ansetts vara en lämplig storleksordning, och i alla tre exemplen förutsattes, att 100 m<sup>3</sup> på 10 år växa till 150 m<sup>3</sup>.

*Exempel I:* årliga tillväxtkvantiteten konstant och lika med 5 m<sup>3</sup> om året.

*Exempel II:* årliga tillväxtkvantiteten stigande med 1 m<sup>3</sup> om året. De olika årens tillväxt äro i ordning: 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, 4,5, 5,5, 6,5, 7,5, 8,5 och 9,5 m<sup>3</sup>.

*Exempel III:* årliga tillväxtkvantiteten fallande med 1 m<sup>3</sup> om året. Serien är omvänd i förhållande till exempel II, så att de olika årens tillväxt äro i ordning 9,5, 8,5, 7,5, 6,5, 5,5, 4,5, 3,5, 2,5, 1,5 och 0,5 m<sup>3</sup>.

Stegringen har tilltagits mycket stark för att få skillnaderna att framträda så tydligt som möjligt. I verkligheten torde det ej inom våra luftstreck stå att uppdriva något exempel i bestånd som lämnat plantstadiet på att tillväxtkvantiteten uppvisar så stor ändring under en 10-årsperiod som från  $\frac{1}{2}$  m<sup>3</sup> till  $9\frac{1}{2}$  m<sup>3</sup>, vilket är nära en tjugodubbling från första till sista året. De efter olika principer uträknade värdena på årliga tillväxtprocenten meddelas i tab. I.

Tab. I. Medeltillväxtprocenten under 10-årsperioden enligt olika beräkningssätt.

Exempel	Rabatt-räkning	Diskont-räkning	Enl. PRESSLER	Enl. sammansatt ränta	Aritmetiskt medeltal av de olika årens procenter	Vägt medeltal av de olika årens procenter
I .....	5,0	3,33	4,0	4,138	4,140	4,08
II .....	5,0	3,33	4,0	4,138	4,158	4,38
III .....	5,0	3,33	4,0	4,138	4,177	3,82

Såsom framgår av tabellen är det endast det vägda medeltalet, som ger rätt utslag för det i de olika exemplen förutsatta olika förloppet av tillväxten under perioden. Då tillskottet är fallande, måste detta föra med sig ett genomsnittligt högre kapital under perioden, eftersom de stora ökningarna komma genast i början — sedermera bli visserligen tillskotten mindre, men kapitalet håller sig likväl hela tiden högre än om årliga tillskottet är konstant. Omvänt blir förhållandet vid stigande tillväxtkvantitet. Medelprocenten måste i anslutning härtill bli lägre med den fallande serien i exempel III och högre med den stigande i exempel II. Det aritmetiska medeltalet reagerar på annat sätt, i det att de höga årliga procenter, som fås i början med den fallande tillväxtserien, draga upp medelvärdet, så att högsta siffran fås i exempel III, då det ovan såsom det riktigaste definierade värdet är lägst. Även för den stigande tillväxtserien i exempel II blir det aritmetiska medeltalet av procenterna högre än i exempel I.

Återstår således att jämföra de övriga medeltalen med resultaten av PRESSLERS formel. Denna ger tydligen för lågt resultat, utom då tillväxtserien är fallande, då den ger för högt värde.<sup>1</sup> PRESSLERS formel förutsätter, att kapitalet växer med lika tillskott för varje år. Även då så är fallet ger den emellertid ett något för lågt värde: 4,0 % i stället för 4,08 %. Detta förklaras dock därav, att PRESSLERS formel principiellt utgår från kapitalet i mitten av perioden, och för att få medelvärdet att stämma, måste man även för de enskilda åren tillämpa denna princip, d. v. s. de enskilda årens tillväxtprocent måste beräknas för medeltalet av kapitalet vid årets början och vid årets slut. Utföres en räkning på detta sätt, blir det med kubikmassan vägda medeltalet 4,0 %, d. v. s. exakt överensstämmelse erhålles. Härvid visar det sig, att det rena aritmetiska medeltalet är otillfredsställande, i det att detta ger värdet 4,05 %. Endast det vägda medeltalet kan bringas att exakt stämma

<sup>1</sup> Dock kan PRESSLERS formel även i detta fall ge för låga värden på procenten, jfr följande sida.

med PRESSLERS formel, fastän man räknar efter samma metod och med samma förutsättningar.

Att hänföra *kapitalet* till mitten av året är emellertid stridande mot definitionen på årlig ränta och passar illa med tillväxtens förlopp under året. Teoretiskt är därför PRESSLERS närmeformel föga tilltalande. Det kan invändas, att felet är obetydligt, men det är i alla fall systematiskt, och vid högre värden på procenten blir det större. Om vi sålunda låta kapitalet fördubblas under 10-årsperioden med konstant tillväxtkvantitet varje år, ger PRESSLERS formel 6,67 % under det att rätta värdet, såsom det här blivit definierat, skall vara 6,9 %. Räkning med sammansatt ränta ger värdet 7,2 %, som också är missvisande, fastän åt andra hållet.

Man bör dock ihågkomma, att i bestånd, där tillväxtprocenten är så hög, är årliga tillväxtkvantiteten ej konstant utan stigande, vilket bättre passar för principen med sammansatt ränta men passar sämre för PRESSLERS formel.

Taga vi hänsyn härtill i sistnämnda exempel och förutsätta, att kapitalet fördubblas på 10 år men på sådant sätt, att tillväxten under ett efterföljande år är  $\frac{1}{2}$  kubikmeter högre än ett föregående, få vi med 100 m<sup>3</sup> begynnelsekapital procenten för sammansatt ränta alltså lika med 7,2 %, liksom PRESSLERS formel alltså ger värdet 6,7 %. Det på rätt sätt enligt vägda medeltal beräknade värdet är emellertid i detta fall 7,1 %. Då tillväxtkvantiteten är stigande, motsvarar sålunda den sammansatta räntan verkligheten betydligt bättre än PRESSLERS närmeformel. Framför allt i de unga bestånden är det, som metoden är berättigad. — Från försöksytan 274 i ung granskog i Halland föreliggande exempelvis uppgifter om att beståndet på 5 år växt från ett kapital av 17,4 m<sup>3</sup> per har till 62,8 m<sup>3</sup>, d. v. s. mer än 9 m<sup>3</sup> om året i medeltal. PRESSLERS formel ger medelprocenten under perioden värdet 22,7 %, under det att den enligt sammansatt ränta blir 29 % — en skillnad alltså på mer än 6 %. Det rätta värdet av medeltillväxtprocenten blir 29 %, om vi förutsätta, att årliga tillväxten gått efter serien: första året 5 m<sup>3</sup>, andra 7, tredje 9 etc.

Metoden att räkna med sammansatt ränta ger alltså i jämförelse med PRESSLERS formel alltid resultat, som äro bättre i överensstämmelse med verkligheten, så snart tillväxtbeloppet är *stigande*. Då tillväxtens årliga kvantitet är *konstant*, kunna de båda sätten att räkna ungefärligen jämnställas, i det att PRESSLERS formel ger lika mycket för lågt som den sammansatta räntan ger för högt. I exemplet ovan blir den rätta medelprocenten sålunda 25,5 %, om tillväxten konstant har varit 9,1 m<sup>3</sup> per år. PRESSLERS formel skulle i ett sådant fall ge ett absolut fel av — 3 %,

och metoden med sammansatt ränta ett fel av  $+ 3\frac{1}{2}\%$ , då feLEN avrundats till halva procent.

Det tredje fallet, då tillväxten är stadd i sjunkande, förtjänar en något mera ingående behandling. Här borde ju PRESSLERS formel kunna påräknas ge ett något mindre fel än då sammansatt ränta användes, enär sagda formel förutsätter konstant tillväxtkvantitet, under det att den sammansatta räntan fordrar en kontinuerlig stegring, som är starkare, ju högre procenten sättes. För 10-årsperioden i Ex. III äger också detta sin giltighet. Emellertid inverkar härvidlag även den å föregående sida behandlade skillnaden i principen för beräkning av procenten på medelkapitalet. Om vi acceptera den principen, att medelkapitalet under de enskilda åren skall användas, så kommer PRESSLERS formel att verka på normalt sätt. Den ger då för en fallande serie alltid ett något för högt värde på genomsnittsprocenten, och ju kortare perioder vi räkna med, desto mindre blir felet. Men om vi *icke* godkänna principen att beräkna årliga räntan på medelkapitalet under året — och det böra vi ej göra — så inverkar den för PRESSLERS formel gällande felaktiga principen störande, och utslagen bli ojämna i jämförelse med de på rätt sätt uträknade värdena. För olika långa perioder av år har felet olika tecken. I Ex. III är sålunda för 10-årsperioden det rätta värdet  $3,82\%$ , PRESSLERS formel ger  $4,0\%$ , d. v. s. formeln ger ett fel av  $+ 0,18\%$ . Använda vi samma serie men räkna med ett mindre antal år bli feLEN följande:

För 1 år:  $- 0,42$ ; 2 år:  $- 0,34$ ; 3 år:  $- 0,24$ ; 4 år:  $- 0,18$ ; 5 år:  $- 0,09$ ; 6 år:  $- 0,03$ ; 7 år:  $+ 0,03$ ; 8 år:  $+ 0,09$ ; 9 år:  $+ 0,14$ ; 10 år:  $+ 0,18$ .

Här visar det sig alltså, att vi ej kunna lita på att minska felet genom att taga kortare period, och vi kunna ej på förhand säga, om PRESSLERS formel ger för högt eller för lågt resultat. Detta är givetvis en olägenhet med formeln. En liknande störning inträffar också i Ex. I, då årliga tillväxtkvantiteten är konstant, i det att här felet visserligen ej ändrar tecken, då periodens längd minskas, men det blir större, ju kortare period vi undersöka.

Alla fel bli emellertid störst, då vi ha att vänta höga procentsiffror, d. v. s. under den period av beståndets liv, då massatillväxten är stigande. Det viktigaste skälet för den sammansatta räntans tillämpning är därför i detta sammanhang, att denna metod bäst av alla motsvarar verkligheten i det fallet.

Vid god beståndsvård kan den tidpunkt betydligt försenas, vid vilken den löpande massatillväxten börjar sjunka. Under hela den tid, då massatillväxten kvantitativt är stigande, ger räkning med ränta på ränta bästa

resultatet, då detta räknas utgå från den förutsättningen, att tillväxtkvantiteten stiger år från år. Om korta perioder användas, inverkar det ej på resultatet, att procenten anses vara konstant under perioden.

Det återstår emellertid även att se efter huru stora fel som kunna riskeras i praktiken, då vi ha att göra med ett bestånd, där *massatillväxten är stadd i sjunkande*. För att man skall kunna undersöka denna sak måste vissa förutsättningar göras angående vilka värden på tillväxtprocenten som skola anses sammanhöra med att tillväxtkvantiteten är stadd i stigande eller sjunker år från år. Nedan demonstreras ett par exempel, som naturligtvis äro bevisande blott i den mån som deras förutsättningar kunna sägas överensstämma med verkliga förhållanden. För att förenkla räkningarna väljes en period av dels 11 år, dels 6 år, i vilket fall man kan åstadkomma en aritmetisk serie från begynnelsekapitalet till slutkapitalet, där termerna ändras med jämna tiondelar.

Om tillväxtprocenten är högre än 4 % torde man kunna anse denna livliga tillväxt antyda, att tidpunkten för maximitillväxten inom beståndet knappast är passerad, varför tillväxtkvantiteten ännu ej faller. Vi förutsätta alltså att felet som begås, om ränta på ränta användes för en fallande tillväxtserie, ej behöver beräknas för begynnelseprocenter över 4 %. Under en och samma 11-åriga period torde en så avsevärd kontinuerlig sänkning av årliga tillväxtbeloppet knappast kunna förutsättas inträda, att beståndet sista året växer endast hälften mot det första. En sänkning till 50 % har därför ansetts vara ett maximivärde, vilket betyder exempelvis en jämnt skeende minskning från 8 m<sup>3</sup> om året till 4 m<sup>3</sup> eller från 1 m<sup>3</sup> till 0,5 m<sup>3</sup>.

Under dessa förutsättningar anger den på en decimal med sammansatt ränta beräknade procenten precis samma värde som den efter kubikmassorna vägda medelprocenten under perioden.

Räkningarna ge nämligen följande resultat. Med 11-årig period, 100 m<sup>3</sup> utgångskapital, 4 m<sup>3</sup> tillväxt första året och 2 m<sup>3</sup> det elfte året blir ränta-på-ränte-procenten enligt RIEBELS tabeller 2,6 och det vägda medeltalet 2,57. Med 6-årig period och samma sjunkande tillväxtkvantiteter blir ränta-på-ränte-procenten, beräknad med logaritmer 3,23 %, det rätta värdet är 3,20 %.

Om vi utgå från 2 % tillväxt första året, d. v. s. på 100 m<sup>3</sup> begynnelsekapital är tillväxten första året 2 m<sup>3</sup>, och detta sjunker enligt en aritmetisk serie till 1 m<sup>3</sup> under det elfte året, ger ränta-på-ränte-räkningen en medelprocent av 1,40 %; det vägda medeltalet är 1,38 %. Med 6-årig period bli värdena resp. 1,678 % och 1,672 %.

Även med användande av maximivärden för felens beräkning komma de således vid sammansatt ränta ej att inverka på första decimalen i

något fall, och i regel blir det endast en obetydlig höjning av andra eller tredje decimalen på tillväxtprocenten.

Om PRESSLERS formel användes, bli felen i ordning efter ovanstående 2,58 % gentemot 2,57 %, 3,17 % gentemot 3,20 %, 1,385 % gentemot 1,38 %, och 1,66 % gentemot 1,67 %. PRESSLERS formel verkar liksom förut visats ojämnt, beroende på huruvida perioden omfattar 11 eller 6 år. I det förra fallet ger den för högt, i det senare för lågt resultat.

Utredningen visar, att sammansatt ränta utan risk kan användas, även då tillväxtkvantiteten är fallande, om man nöjer sig med en decimal på tillväxtprocenten. Med hänsyn tagen till de stora variationer, som uppträda i naturen olika bestånd emellan, torde det också under inga omständigheter vara tillrådligt att försöka gå längre i noggrannhet vid utarbetandet av en erfarenhetsserie.

Eftersom det tillgängliga materialet vid tillväxtberäkningen praktiskt taget alltid kommer att inskränka sig till uppgifter om kapitalet i början och i slutet av resp. perioder, då den årliga tillväxten endast med stort besvär och dålig noggrannhet kan mätas (jfr fig. 1), kan man praktiskt begagna sig endast av sådana metoder, som bygga på dessa storheter, d. v. s. motsvarande de fyra första kolumnerna i Tab. I.

Utgående från de angivna synpunkterna beslöt förf., att vid utarbetandet av en tillväxtprocentserie — huvudsakligen avsedd för yngre björkskog —, som nyligen ägt rum å skogsförsöksanstalten, använda sammansatt ränta för bestämmande av tillväxtprocenten. Med hänsyn till björkens snabba tillväxt och därmed följande behov av ofta upprepade gallringar sattes undersökningsperioden till 5 år.

För belysandet av problemet och framläggandet av en del därvid funna praktiska resultat skall här något redogöras för tillkomsten av ifrågasvarande erfarenhetsserie.

Tillväxtundersökningar på björkskog ställa sig besvärligare än i fråga om barrträden, i det att dels årsringarna ofta äro otydliga, dels toppskottsmätningar så gott som omöjliga att utföra. Av helt naturliga skäl valde förf. därför att till stor del bygga undersökningarna på stamanalyser. De gårdar, där tillväxten skulle undersökas, äro belägna i Kalmar län: *Ryningsnäs*, *Gårdveda* och *Gökhult*, samtliga tillhörande *A.-B. Skogsegendomar*. Å dessa gårdar utlades inalles 14 provytor i jämna, likåldriga, låggallrade björkbestånd i åldrarna 10 till 40 år, och på varje yta utvaldes tvenne analysträd, varav det ena alltid var en plusvariant, det andra en minusvariant på sådant sätt, att medelträdet på ytan kunde anses ligga emellan båda analysstammarna. På ytan utfördes dessutom

borrning vid brösthöjd och mätning av de fem sista årsringarnas bredd på 20 à 30 stammar, för vilka även höjdmätning gjordes med CHRISTENS höjdmätare jämte formpunktsbedömning och barkmätningar. Samtliga träd på ytan klavadades vid brösthöjd, och i ett par bestånd utfördes också sektionmätningar å fällda stammar. Den art som här är dominerande är *odorata*, jämsides med hybrider mellan *odorata* och *verrucosa*. Dock förekomma även två rena *verrucosa*-bestånd. Då emellertid hela undersökningen förlagts inom bark och materialet visat sig vara ganska homogent, ha dessa ej behandlats särskilt.

Stamanalyserna ha konstruerats för 5-åriga intervaller, och vid årsringarnas mätning på trissorna har använts absolut alkohol för att få dem att bättre framträda, vilken metod kan rekommenderas efter erfarenheterna från denna undersökning.

Sedan det småländska materialet behandlats för sig, gjordes en sammanställning av skogsförsöksanstaltens material av *odorata*-bestånd, varvid det visade sig vara ganska lätt att samarbeta det hela.

En serie över medelformklassen i bestånd av olika ålder utarbetades även i detta sammanhang. Det visar sig, att formklassen för odoratan åtminstone i yngre år snarare är något högre på bark än under, varför någon skillnad mellan formklass med eller utan bark ej synes behöva iakttagas, vilket ju redan borde följa därav, att vi ha att göra med ett jämbarkigt trädslag. Formpunktsbedömningarna gävo emellertid genomgående och deciderat för höga formklassvärden. Detta är av särskilt intresse, då förf. speciellt hade inriktat sig på att icke sätta högre formpunktsvärden än nödvändigt, eftersom JONSON har påpekat att den spetsiga grenvinkeln hos björken föranleder en betydande nedflyttning av formpunkten. I jämförelse med de uppmätta värdena gävo formpunktsbedömningarna det öaktat omkring 5 formklassenheter för höga värden. Detta resultat sammanhänger helt säkert med den omständigheten, att hos björken de översta kronparterna äro mycket mjuka, så att de vid blåst böja sig undan utan att göra nämnvärt motstånd. Förf. har tidigare påpekat att kvistarnas böjlighet kunna reducera inverkan av den större vindhastigheten i högre skikt (Formpunktsbedömning 1919, noten sidan 178). Här ha vi ett typiskt exempel på detta förhållande, i det att björkens toppgrenar och de sista toppskotten tydligen ha mycket ringa betydelse för formpunktens läge i kronan. Det förtjänar emellertid att påpekas, att formpunktsbedömningarna gävo en serie, som var parallell med de uppmätta värdena, fastän de senare ligga avsevärt lägre.



Tab. II. Medelformklass vid olika ålder hos beståndet.

10 år	15 år	20 år	25 år	30 år	35 år	40 år
0,50	0,56	0,60	0,63	0,65	0,65	0,65

Serien är ej att betrakta såsom generell, men har dock sitt värde som ett bidrag till frågan om björkens formklassutveckling, vilken hittills ej blivit ingående studerad.

Den utjämnade serien för tillväxtprocenten vid olika åldrar återges i Tab. III.

Tab. III. Tillväxtprocenten vid olika ålder hos beståndet.

	10 år	15 år	20 år	25 år	30 år	35 år	40 år	45 år	50 år	55 år	60 år
pg ...	(35,0)	16,0	10,0	6,7	5,0	4,0	3,2	2,8	2,4	2,1	1,8
pfh ...	(0,0)	4,4	3,5	2,3	1,5	1,0	0,8	0,7	0,7	0,6	0,5
pm ...	(35,0)	21,0	14,0	9,1	6,5	5,0	4,0	3,5	3,1	2,7	2,3

Formhöjdstillväxtprocenten har satts till 0 vid 10 år. Alla siffror äro naturligtvis i högsta grad variabla vid denna låga ålder, varför noggrannheten här ej kan anses vara så stor. De angivna procenterna gälla för den ålder som anges ovan, men för kalkyleringar framåt med ränta på ränta böra de rätteligen anses gälla endast för en tid av  $2\frac{1}{2}$  år, eftersom de uträknats för femårsperioder och hänförts till åldern vid periodens mitt.

Vid användningen ställer sig detta i hög grad opraktiskt, varför förf. sökt efter ett system, varigenom man skulle kunna få räkna med enkel ränta och för längre perioder utan att begå större fel. Härvid gjordes en iakttagelse, som veterligt ej är framställd förut, och som kan komma till god nytta i fall, motsvarande det föreliggande.

Om vi önska beräkna, vilken kubikmassa ett bestånd kommer att hålla vid 30 års ålder, om det nu är 25 år gammalt och håller  $50\text{ m}^3/\text{har}$ , så skulle vi enligt principen för den i tab. III meddelade tillväxtprocentserien uppsöka den procentsiffran, som gäller vid periodens mitt, d. v. s. vid  $27\frac{1}{2}$  års ålder, och sedan låta vi  $50\text{ m}^3$  växa med sammansatt ränta i 5 år efter denna räntefot, då slutkapitalet vid 30 år erhålles. På den grafiskt upplagda kurvan finna vi värdet för räntefoten vara 7,7 %, vadan enligt denna kalkyl beståndet vid 30 års ålder kommer att få en kubikmassa av  $72,5\text{ m}^3/\text{har}$ .

I stället för denna procedur kunna vi räkna enkel ränta i 5 år framåt, utgående från procentsiffran för åldern vid periodens början, d. v. s. 25 år. Enl. tab. III är här räntefoten 9,1 %. Årliga tillväxten är då

$\frac{9,1}{100} \cdot 50 = 4,55\text{ m}^3$ , vilket på 5 år gör  $22,75\text{ m}^3$ . Enligt räkning med

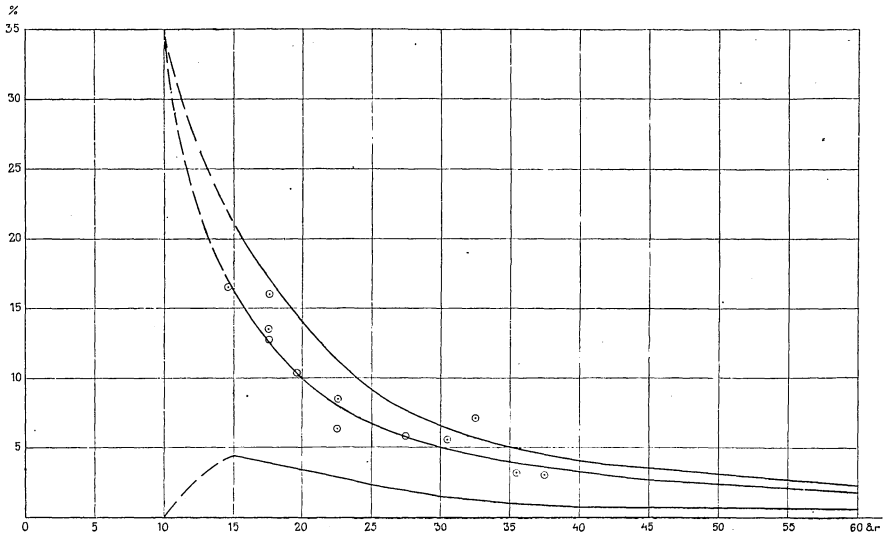


Fig. 2. Tillväxtprocentserier för björk (*Betula odorata*), huvudsakligen utarbetade på grundval av stamanalyser från Kalmar län. Den översta kurvan är kubikmassetillväxtprocenten, den mellersta grundytetillväxtprocenten och den understa formhöjdstillväxtprocenten. Ringarna ange de genom borring i bestånden funna grundytetillväxtprocenterna inom bark, vilkas värden som synes väl överensstämma med den utan hänsyn till dessa förut utjämnade serien.

Increment percent series for birch (*Betula odorata*), chiefly based upon a stem analysis material from Småland, Sweden. The upper line is the volume percent, the next is the percentual increment of the basal area at breast height, and the lowest represents the formheight. The circles are values of the percentual increment of the basal area resulting from investigations in the stands with increment borers.

enkel ränta blir sålunda beståndets kubikmassa 72,75 m<sup>3</sup>/har vid 30 år.

Överensstämmelsen är fullkomligt tillfredsställande för de flesta ändamål. Detta gav anledning att undersöka, huruvida det gällde rent allmänt, att räkning med sammansatt ränta kunde utbytas mot enkel ränta, om räntefoten för den sammansatta räntan hänför sig till periodens mitt och räntefoten för den enkla räntan hänför sig till periodens början.

Först gå vi till definitionerna. Ett kapital har under  $n$  år mellan tidpunkterna  $a_1$  och  $a_2$  ökats från  $k$  till  $K$ . Beräknas detta ha skett med enkel ränta, utgående från  $k$ , får man procenten genom att utföra

räkningarna i uttrycket  $p_{a_1} = \frac{K - k}{n \cdot k} \cdot 100$ , och denna procentsiffra gäller

närmast för tidpunkten  $a_1$ . Räkna vi med sammansatt ränta bestämmes procenten ur ekvationen  $1,0 p^n = \frac{K}{k}$ , och eftersom denna procent gäller

under hela perioden men icke för en föregående eller efterföljande, måste den rätteligen hänföras till tidpunkten mitt i perioden  $a_1 - a_2$ . Då nu båda sätten att räkna utgå ifrån, att  $k$  skall växa till  $K$ , måste de ju motsvara varandra för den period vi valt.

Frågan är emellertid blott om kapitalet under den föregående och efterföljande perioden förräntas på ett sådant sätt, att värdena på procenterna komma att motsvara varandra, då de sammanfogas till en serie.

Om vi godtyckligt sammansätta en serie kunna vi ej påräkna, att den skall få den önskade egenskapen.

Först och främst fordras att tillväxtprocenten faller år från år, ty den sammansatta räntan måste ge ett högre slutkapital än den enkla, då begynnelsekapitalet är lika, såvida icke den sammansatta räntan beräknas med lägre procentsats.

Nästa förutsättning är att man ej räknar med alltför långa perioder. Eftersom sammansatt ränta består av enkel ränta, räknad varje gång ett år i sänder, måste ju skillnaderna bli större ju större antal år perioden omfattar.

Båda de angivna förutsättningarna inträffa för en tillväxtprocentserie, upprättad för skogsbestånd, och man kan därför påräkna, att resultaten av tvenne kalkyler, verkställda på ovan angivet sätt, skola ganska nära överensstämma.

Tab. IV. Jämförelse mellan slutkapitalet enligt resp. enkel och sammansatt ränta.  
Comparison between the values of the end capital when the calculation is made according to simple interest and compound interest.

Kubikmassa vid periodens början Volume at the beginning of the period	Ålders- period Age period	Kubikmassetillväxtprocent Volume increment percent				Slutkapital vid åldern End capital at the age of		
		I Enkel ränta Simple interest		II Sammansatt ränta Compound interest		Ålder år Age year	I Enkel ränta Simple interest	II Sammansatt ränta Compound interest
100.....	15—20	15 år years	21 %	17,5 år years	17,0 %	20	205	219
100.....	20—25	20 år years	14 %	22,5 år years	11,2 %	25	170	170
100.....	25—30	25 år years	9,1 %	27,5 år years	7,7 %	30	145,5	144,9
100.....	30—35	30 år years	6,5 %	32,5 år years	5,6 %	35	132,5	131,3
100.....	40—45	40 år years	4,0 %	42,5 år years	3,7 %	45	120	119,9
100.....	50—55	50 år years	3,1 %	52,5 år years	2,9 %	55	115,5	115,4
100.....	15—25	15 år years	21 %	20 år years	14 %	25	310	371
100.....	20—30	20 år years	14 %	25 år years	9,1 %	30	240	239
100.....	30—40	30 år years	6,5 %	35 år years	5,0 %	40	165	163
100.....	40—50	40 år years	4,0 %	45 år years	3,5 %	50	140	141
100.....	50—60	50 år years	3,1 %	55 år years	2,7 %	60	131	131

Det bör emellertid ihågkommas, att det hela tiden är fråga om en approximation, ty om vi använda tillräckligt många decimaler, kunna vi alltid få fram skillnader mellan de båda sätten att räkna. I det föreliggande fallet bli emellertid skillnaderna mycket obetydliga. En prövning har verkställts med användande av tillväxtprocentserien i fig. 2 (Tab. III) på så sätt, att det erhållna slutkapitalet jämföres, då resp. enkel och sammansatt ränta kommit till användning.

Av tab. IV framgår att metoden med enkel ränta synnerligen väl går att använda såväl för 5-årsperioder som för 10-årsperioder, om blott icke procentsiffrorna i fråga äro alltför höga. Sålunda visar det sig, att då begynnelseåret har ett så högt procentvärde som 21 %, bli felen tydliga. Men tillväxtprocenten kan få gå upp ända till 15 % om året och metoden duger alltjämt utmärkt såväl för 5-års som 10-årsperioder. Mera kan man ej begära av en närmemetod som denna är, i synnerhet som det i praktiken ytterst sällan händer, att man har att räkna med bestånd, som tillväxa med mera än 15 procent årligen, och då det kan inträffa, spelar deras kubikmassa normalt en mycket underordnad roll i förhållande till det övriga förrådet.

Den här framställda närmemetoden ger alltså möjligheten att vid utarbetandet av tillväxtserierna begagna exaktare räknemetoder utan att den praktiska användbarheten av serierna blir på minsta sätt lidande. Det är betydligt stora fördelar förbundna med användningen av sammansatt ränta vid bearbetningen av ett material för dylika ändamål. De tillväxtserier, som utsläppas i praktiken, komma sannolikt under alla förhållanden att bli använda för kalkyler framåt med enkel ränta, därför att detta sätt att räkna är ingrott sedan lång tid tillbaka och därför att det är bekvämast och naturligast. Det är då också lämpligt, att de äro utarbetade på ett sådant sätt, att resultatet ej blir lidande genom att enkel ränta tillämpas vid användningen. Samtidigt är det av vikt att veta, att ett dylikt sätt att räkna ej ger något minimivärde utan att det verkligen ger samma värde som en på rätt sätt uttagen procent med sammansatt ränta skulle ge.

### Sammanfattning.

Tillväxten kan i regel ej undersökas år för år utan period för period. Intervallet mellan de tillfällen då kapitalet inventeras, bör vara lika med intervallet mellan gallringarna, som påverka tillväxten och i all synnerhet tillväxtprocenten.

Tillväxtprocenten räknas emellertid per år och måste för varje år anses vara bestämd av två faktorer, nämligen begynnelsekapitalet i början av året och den kvantitet varmed detta kapital under året har ökats.

Räkna vi med en period som omfattar flera år, önska vi erhålla ett uttryck, som ger värdet av den procent, med vilken kapitalet i genomsnitt har ökats årligen under hela perioden.

Undersökningens första uppgift är därför att definiera huru det teoretiskt riktiga värdet av genomsnittsprocenten skall bestämmas.

Medelprocenten per år under perioden måste — liksom det enskilda årets procentsiffra — vara bestämd dels av den genomsnittliga årliga tillväxtkvantiteten och dels av det genomsnittliga årliga begynnelsekapitalet.

Denna sats kan även uttryckas så, att den genomsnittliga tillväxtprocenten beräknas såsom ett medeltal av de olika årens procenter, då begynnelsekapitalet för dessa olika år begagnas såsom vikter. Det enklaste sättet att beräkna den exakta medelprocenten är att sätta summa tillväxt under perioden i förhållande till summa begynnelsekapital för alla år som perioden omfattar.

Då medelprocenten hänförs sig till perioden i dess helhet, kan den med avseende på tiden icke hänföras till periodens början, ej heller till dess slut utan den tidpunkt, dit denna siffra skall hänföras, ligger mitt i perioden. Om medelprocenten sålunda beräknas för ett bestånd från åldern 20 till 28 år, bör procenten hänföras till åldern 24 år. Om perioden omfattar ett udda antal år — t. ex. mellan 20 och 27 år — bör medelprocenten vid en grafisk uppläggning placeras över åldern  $23\frac{1}{2}$  år. Procenten är i det senare fallet fortfarande beräknad per år, fastän klassmitten blir placerad mitt i ett år.

Annorlunda är förhållandet med beräkningen av medelprocenten enligt PRESSLER's närmemetod, då det kapital, på vilket procenten beräknas, utgöres av medeltalet av begynnelse- och slutkapitalet. För att man skall kunna få denna metod att ge varandra konsekvent motsvarande värden skulle det vara nödvändigt att ändra definitionen på vad som menas med årlig ränta. PRESSLER's princip, tillämpad på en period av ett år, leder till att den årliga räntan skulle beräknas på medel-

kapitalet under året. Men den rätta definitionen säger oss, att den skall beräknas på årets begynnelsekapital. Detta är en motsägelse som gör PRESSLER's formel föga tilltalande ur teoretisk synpunkt och som dessutom medför praktiska olägenheter.

PRESSLER's formel ger därför — då vi jämföra de siffror som erhållas efter denna formel med de ovan såsom riktiga definierade värdena

$$\left( \frac{\sum_1^n z_v}{\sum_1^n m_v} \cdot 100 \right) — \text{ojämna resultat, och det är långt ifrån säkert, att}$$

man med PRESSLER's formel når större noggrannhet genom att räkna för kortare perioder. Sålunda bli värdena sämre både i Exempel I och Exempel III i tabell I, om man med bibehållna serier för de årliga tillväxtkvantiteterna räknar blott 5 år framåt i tiden. I Exempel I blir nämligen absoluta felet större för 5-årsperioden än för 10-årsperioden, och i Exempel III byter felet om tecken,

Då vi emellertid vid våra undersökningar icke lämpligen kunna bestämma tillväxten för varje år, måste vi begagna en sådan metod för beräkningen av årliga medeltillväxtprocenten, som för en period av ett flertal år ger oss det sökta värdet endast med användande av de tillgängliga uppgifterna över kapitalet vid periodens början och vid periodens slut.

Den metod som bäst motsvarar våra fordringar i detta avseende är den sammansatta ränteräkningen. Den sammansatta räntans princip överensstämmer med definitionen på årlig ränta, och den passar för trädets tillväxt, därför att räntan årligen kapitaliseras. Detta är nämligen också förhållandet med trädstammens tillväxt, då det, som ena året var tillväxt, under nästkommande år är virkeskapital. Detsamma gäller om tillväxten i bestånden mellan gallringstillfällena.

Procenten enligt den sammansatta räntan är synnerligen enkel att beräkna, då man blott har tillgång till goda tabeller, i det att man endast behöver räkna ut kvoten mellan slutkapitalet och begynnelsekapitalet samt sedan i tabellen uppsöka den procent som ger detta resultat på samma antal år som undersökningsperioden omfattar.

Genom användande av sammansatt ränta vid beräkning av tillväxtprocenten bringas denna i överensstämmelse med de ekonomiska kalkylerna, vilka alltid utföras enligt den principen.

Vid den sammansatta räntan förutsättes visserligen, att procenten skall vara konstant varje år under perioden, och denna förutsättning stämmer ej med de förhållanden som råda med avseende på skogens tillväxt. För ett skogsbestånd gäller det normalt, att tillväxtprocenten sakta men

säkert sjunker med tilltagande ålder på skogen, vilket dock ej betyder att tillväxtkvantiteten sjunker hela tiden. Som bekant förhåller det sig med den absoluta tillväxten så, att den är stadd i stigande under beståndets ungdomsstadier. Då den nått sitt maximum, börjar den sakta sjunka. Denna tidpunkt, då den absoluta tillväxten börjar sjunka, kan med väl utförda och på rätt tid inlagda gallringar framflyttas till långt in i medelåldern. Hela tiden är emellertid procenten normalt stadd i fallande, vilket nära sammanhänger därmed, att beståndets virkeskapital ökas ju äldre skogen blir.

Vår problemställning är i alla händelser sådan, att vi söka en medelprocent för hela den period som tillväxtberäkningen omfattar. I och med denna problemställning ha vi ju bestämt oss för att låta en enda procentsiffra representera samtliga år. I princip innebär detta det samma som att vi anse tillväxtprocenten vara konstant, varför den fallande tendensen endast inverkar på huru långa perioder man lämpligen bör arbeta med. Vid den tidpunkt i beståndets liv, då tillväxtprocenterna äro höga och skillnaderna kunna riskeras bli stora, bör en kortare period användas. Vid tillväxtundersökningar i unga bestånd och särskilt då det gäller snabbväxande trädslag är det därför tillrådligt att ej göra perioden längre än 5 år.

Om sålunda tillväxtprocenten kan anses vara konstant under perioden, då den hänföres till en tidpunkt belägen i periodens mitt, kan undersökningen begränsas till att ge svar på frågan om huru noggrant metoden verkar, då den absoluta tillväxten i beståndet är stadd i stigande, resp. fallande.

Principen sammansatt ränta förutsätter nämligen att den absoluta tillväxten stiger år från år. Sålunda motsvarar ränta-på-ränteräkning med begynnelsekapitalet 100 m<sup>3</sup> under en femårsperiod en genomsnittlig årlig stegring av den årliga tillväxten, som med 5 % räntefot är 0,26 m<sup>3</sup>, med 6 % 0,4 m<sup>3</sup>, med 8 % 0,7 m<sup>3</sup> och med 10 % 1,1 m<sup>3</sup>, då första årets tillväxt antages vara resp. 5, 6, 8 och 10 m<sup>3</sup> och stegringen göres aritmetisk. I verkligheten har man ofta mätt upp ökningar motsvarande de ovan anförda. Den tidigare nämnda försöksytan 274 i granskog på ljunghmark i Halland har exempelvis mellan 25 och 30 år en årlig löpande massatillväxt av 9,1 m<sup>3</sup> per har, och mellan 30 och 34 år är motsvarande siffra 12,6 m<sup>3</sup>, vilken ökning ägt rum blott under 4<sup>1/2</sup> år. Åldern är dock i detta fall att uppfatta såsom motsvarande ett något tidigare stadium, eftersom det på ljunghmark planterade beståndet genomgått en stagnationsperiod i början. På Skarhult i Skåne har man emellertid konstaterat stigande massatillväxt ännu vid en ålder av cirka 50 år med en tillväxtprocent av omkring 5 %.

Då tillväxten i ett bestånd är stigande, motsvarar den sammansatta räntan bäst de verkliga förhållandena. Detta fall är det viktigaste vi ha att räkna med, ty det är ungsbogen med sina starka stegringar i massatillväxten, som uppvisar de höga procentsiffrorna, och det är på de höga procentsiffrorna som man riskerar de största felet om en felaktig beräkningsmetod användes.

Då det motsatta förhållandet är rådande, så att massatillväxten befinns sig i sjunkande, spelar det ej så stor roll vilken metod som kommer till användning, därför att procentsiffrorna nu äro så låga, att felet stannar vid en enhet i första decimalen.

Man kan alltså fastslå, att bland de vanliga metoderna den sammansatta räntans princip bäst passar för tillväxtundersökningar, så snart det gäller att skaffa sig ett uttryck för huru virkeskapitalet har ökat under en period av år, under förutsättning att man nöjer sig med en decimal på tillväxtprocenten. Med hänsyn till de variationer man har att räkna med i naturen måste man också anse denna grad av noggrannhet vara tillräcklig. Våra metoder i allmänhet äro ej så förfinade, att man kan bygga några slutsatser på skillnader i andra decimalen av tillväxtprocenten.

För den praktiske skogsmannen uppställer sig ofta följande räkneproblem: här finnes ett bestånd, vars ålder och kubikmassa äro kända — vilken kubikmassa kan jag beräkna att beståndet kommer att hålla om 10 år? Om en tillväxtprocentserie för olika åldrar finnes tillgänglig, och denna är upprättad enligt sammansatt ränta, skulle det emellertid fordras att man skall ha räntetabeller till hands för att kunna räkna ut detta. Förf. har emellertid visat, att man kan reda sig även utan dylika tabeller.

Vid användningen av en sådan erfarenhetsserie som ovan angivits, kan man nämligen med ytterst ringa fel räkna med enkel ränta, utgående från beståndets nuvarande ålder. Den enkla räntan efter procenten för åldern vid periodens början ger nämligen i en dylik serie samma värde på slutkapitalet som om man räknar sammansatt ränta, utgående från det värde på procenten, som korresponderar med åldern vid mitten av perioden. I båda fallen utgår man från kapitalet i periodens början.

Tack vare denna förenkling kan man sålunda upprätta allmänna serier med hjälp av den metod, som ger de noggrannaste resultaten, utan att sedan vid användningen varje gång behöva taga till den mera invecklade apparat som den sammansatta räntan anses utgöra.



## SUMMARY.

**The calculation of the increment percent by the compound interest method.**

Three methods are in common use for calculating the increment percent. We name the first one *simple interest*, and the capital  $k$  in the beginning of the period is the base for the calculation, the average increment per annum is  $z$ , the increment percent  $p_1 = \frac{z}{k} \cdot 100$ . The second method is the *discount interest*.

$k$  has grown to  $K$  during  $n$  years,  $z = \frac{K-k}{n}$ ,  $p_2 = \frac{z}{K} \cdot 100$ . Further we of-

ten use the approximate formula of PRESSLER:  $p = \frac{\frac{z}{2}}{\frac{K+k}{2}} \cdot 100$ . This last

mentioned formula is an approximation for compound interest, according to which the correct value of  $p$  is to be determined from the expression  $1,0 p^n = \frac{K}{k}$ .

It is astonishing that the method of compound interest is so little in use. In fact there are no difficulties in determining  $p$  from the factor  $1,0 p^n$ . We can read the figure directly in a table, and such tables exist from which  $p$  is available with great accuracy. The formula of PRESSLER on the other hand is not at all appropriate.

The development of the increment of a tree does not agree with the principles of simple interest, as the increment is not taken away year by year. On the contrary the increment of one year is capital the next year, and the increment of the next year has to be compared to all the wood capital, including that of the increment from the foregoing year.

If we are studying a certain period, say of 10 years, the exact value of the annual increment percent during that period is the average of the percentage figures for the different years. This average, however, shall not be a simple arithmetic one but a weighted average, and the weights should be the different values of the capital which has produced the increment during the particular years. Thus we get the following formula for the exact value of the average annual percent during a period of  $n$  years.

$$p = 100 \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^n z_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^n m_{\nu}}, \text{ where } z_{\nu} \text{ is the increment in volume during a certain year}$$

$\nu$ , and  $m_{\nu}$  is the wood capital at the beginning of that year, i. e. the volume of the stem or of the stand.

The formula is proved as follows.

The volume increment of the different years is respectively:  $z_1 z_2 z_3 \dots z_v \dots z_n$ .

The volume at the beginning of the different years:  $m_1 m_2 m_3 \dots m_v \dots m_n$ .

The annual increment percent:  $p_1 p_2 p_3 \dots p_v \dots p_n$ .

The average annual percent then is

$$\bar{p} = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + \dots + p_v m_v + \dots + p_n m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_v \dots + m_n}$$

$$p_1 = \frac{z_1}{m_1} \cdot 100; p_2 = \frac{z_2}{m_2} \cdot 100; p_v = \frac{z_v}{m_v} \cdot 100; p_n = \frac{z_n}{m_n} \cdot 100.$$

$$\therefore \bar{p} = \frac{\sum_1^n z_v}{\sum_1^n m_v} \cdot 100, \text{ q. e. d.}$$

In order to study the influence of a different development of the increment on the average percent, calculated after the above mentioned methods, I have chosen three examples, where the capital of 100 m<sup>3</sup> during 10 years grows to 150 m<sup>3</sup>.

*Ex. I:* the annual increment is constantly 5 m<sup>3</sup>.

*Ex. II:* the annual increment is respectively: 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, 4,5, 5,5, 6,5, 7,5, 8,5 and 9,5 m<sup>3</sup>.

*Ex. III:* the annual increment is respectively: 9,5, 8,5, 7,5, 6,5, 5,5, 4,5, 3,5, 2,5, 1,6, 0,5 m<sup>3</sup>.

The different values we then get for the average percent when using different calculation methods are tabulated in Table I.

*Tab. I.* The average increment percent calculated after different methods.

Example No.	Simple interest	Discount interest	PRESSLERS' formula	Compound interest	Arithmetic average	Weighted average
					$\frac{p_1 + p_2 + p_3 \dots p_n}{n}$	$\frac{\sum_1^n z_v}{\sum_1^n m_v} \cdot 100$
I	5,0	3,33	4,0	4,138	4,140	4,08
II	5,0	3,33	4,0	4,138	4,158	4,38
III	5,0	3,33	4,0	4,138	4,177	3,82

As can be seen in the table above only the weighted average has the right tendency. When the increment series is falling the average capital must be higher during the period, as the largest additions take place during the earliest years in the period. Hence it follows that the average percent must be lower than if the series of additional quantities is increasing. The simple arithmetical average has an opposite tendency, giving the largest average percent for the falling series.

PRESSLERS' formula gives a value for the average percent which is too low except when the series is falling. In this case the value is too high. PRESSLERS' formula does not quite agree with any of the other methods of calculation. Even if the absolute increment is constant every year

— which is premised for this formula — we cannot get the right value, owing to the fact that PRESSLERS' formula always refers to the average capital during the period. But if we calculate the percent for every year on a capital, which is the average between the beginning and the end capital of that

year, we get exactly the same average in the last column  $\left( \frac{\sum_1^n z_v}{\sum_1^n \frac{m_{v_1} + m_{v_2}}{2}} \cdot 100 \right)$

under presumption that the increment quantity is constant. The simple arithmetical average is not even then the same as that of PRESSLER.

The method of compound interest gives the smallest error of the two when the increment is constant or increasing. When the series is falling the error can be larger than for PRESSLERS' formula.<sup>1</sup>

In the examples chosen above the rate of increase in the series is much higher than could ever be realized in reality. Also in practice we do not find a heavy falling series like that of Ex. III. But instead of that we get very often heavily increasing series in young stands, and for that case the method of compound interest is much better adapted than PRESSLERS' formula. When the increment series is falling, the increment percent has low values, and then the error by using the compound interest will reduce itself to a minimum.

We suppose that an annually decreasing increment quantity does not exist at a rate of the average annual percent higher than 4 %, and that the amount of increment cannot during the last year of a period of 11 years be less than 50 % of what was produced during the first year. Under these presumptions the method of compound interest will give a value of the average annual percent, which is exactly correct if we use only one decimal. Example: we have a stand with a volume of 100 m<sup>3</sup>, which grows during 11 years in such a way that the increment during the first year is 4 m<sup>3</sup>, during the last year 2 m<sup>3</sup>, and the terms between form an arithmetical series. The average annual percent then is 2,6 %, calculated by compound interest, and

the correct value  $\frac{\sum_1^n z_v}{\sum_1^n m_v} \cdot 100$  is 2,57 %. During the first 6-year period, the

corresponding figures are respectively 3,23 and 3,20 %.

The result of the investigation is that the compound interest method is more natural, easier to use and gives smaller errors than PRESSLERS' formula. If the increment is large, it may be advisable to investigate a shorter period than 10 years, and in this case the error will always be smaller when using the compound interest method, which is often not the case with PRESSLERS' formula.

<sup>1</sup> According to the above mentioned principle of PRESSLERS formula, where the capital must be reckoned as an average for the middle of every year, if we want to get correspondence, the length of the period also influences the value of the error, which can be positive or negative, greater or smaller, if we take a shorter period than 10 years in Ex. III.

Last autumn the author had the opportunity of carrying out some investigations in order to determine the volume increment percent in birch stands (*Betula odorata*) in Småland, south Sweden. The chief results are based on stem analyses, but also increment borings at breast height were made in the stands. The annual increment percent has been calculated for 5-year periods after the method of compound interest. The series of percentual figures of the growth in basal area at breast height, in volume and in form height — everything reckoned without bark, though the difference is small for that species — are represented in fig. 2. It is striking that the percentual figures of the growth in basal area at breast height, determined by increment boring, quite agree with the smoothed curve from the stem analysis data. That seems to make it evident that the variations in the thickness of the annual rings at breast height are not so large as is the case for the pine. The large variation of the annual rings of the pine is demonstrated in fig. 1, which is reproduced from an American publication. Our own studies of Swedish pine give the same tendency of large variations.

The only objection against these series in fig. 2 is that their form is not good for direct use in forest practice. The forester as a rule is not much acquainted with compound interest and has not always a  $1,0 p^n$  table just when he wants to make a rapid calculation. Hence it would be much better if the series could be used with simple interest. The practical problem most often is the following. We have a stand, the age and volume of which we know approximately. How many cubic meters will the volume be after 5 or 10 years? I made the observation that simple interest can be used for this calculation with a very small error, and I am going to demonstrate the accuracy of that approximate calculation.

The percentual figures in fig. 2 refer to the age in the middle of the increment period. So if we are using compound interest for a 10-year period we get the capital  $K = k_{1,0} p^{10}$ , where  $k$  is the volume now and  $p$  is the percent corresponding to the age 5 years after now.

Instead of this method of calculation, we can use the percent for the actual age of the stand and get  $K = k + \frac{10 k \cdot p}{100} = k \left( 1 + \frac{p}{10} \right)$ . The results of a comparison between the two methods of calculation are found in Table IV, page 14. From this table can be seen that there are very small differences between the values of the end capital for the two different methods of calculation. Only when the increment percent is very high (21 %) we get an error of any importance. But the percent can be so high as 15 % and we nevertheless get nearly exactly the same value for the end capital.

This way of reckoning thus permits that the general series be worked out according to the preferable method of compound interest, but afterwards they can be handled more readily in practice by the simple interest method.