# MARKENS TEMPERATUR OCH VÄRMEHUSHÅLLNING

SIGVARD ANDERSSON

**STENCILTRYCK NR 22** 

INSTITUTIONEN FOR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK UPPSALA 1961 Institutionen för lantbrukets hydroteknik delger bl. a. i sin tidskrift Grundförbättring resultat från institutionens olika verksamhetsgrenar. Allt material blir emellertid inte föremål för tryckning. Undersökningsresultat av preliminär natur och annat material som av olika anledningar ej ges ut i tryck delges ofta i stencilerad form. Institutionen har ansett det lämpligt att redovisa dylikt material i form av en i fri följd utarbetad serie, benämnd stenciltryck. Serien finns endast tillgänglig på institutionen och kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Institutionen för lantbrukets hydroteknik, Uppsala 7

#### Stenciltryck

Nr	År	Författare och titel
1—12		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Redogörelse för resultaten av täckdikningsförsöken åren 1951–1962.
13—15		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Jo- hansson. Resultat av täckdikningsförsök och bevattningsförsök åren 1963–1965.
16	1940	Gunnar H <b>a</b> llgren. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; några hydro- tekniska studier.
17	1942	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient.
18	1943	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan nederbörd och skördeav- kastning.
19	1952	Sigvard Andersson. Kompedium i agronomisk hydroteknik. Ele- mentär hydromekanik.
20	1952	Sigvard Andersson. Kompendium i agronomisk hydroteknik. Tabeller och kommenarer.
21	1960	Sigvard Andersson. Kapillaritet.
22	1961	Sigvard Andersson, Markens temperatur och värmehushållning.

#### Förord.

Detta är ett arbete om temperaturförhållandena i marken och om dess värmehushållning. Det är framför allt ett försök att ge en jämförelsevis enkel framställning av områdets teori. Någon fullständigare behandling av ämnet eftersträvas ej. De olika avsnitten ha numrerats i löpande och tämligen fri följd. Något försök att över- och underordna rubrikerna ur synpunkten av det i dem antydda innehållet, dess omfattning och betydelse har ej blivit gjort.

Arbetet beräknas att fullständigas genom successivt tillfogade avsnitt, allteftersom tid gives för deras utarbetande och de egna experimentella undersökningarna utvecklas. På detta sätt beräknas olika aspekter på problemet att bli genomarbetade och därmed en viss fullständighet uppnås.

> Uppsala i september 1961 Sigvard Andersson

## Innehållsförteckning.

Sida

Förord	I
1. Till härledningen av en partiell differential- ekvation för värmets strömning i marken.	1
2. Om en partikulär lösning till den partiella diffe- rentialekvationen (1.2)	3
3. Närmare analys av ekvationen (2.2)	5
4. Numerisk genomräkning av ett teoretiskt exempel på en årsvåg	9
5. Ekvationen (3.1) framställd med $\lambda$ som parameter	17
6. Numerisk genomräkning av ett teoretiskt exempel	10
pa en dygnsvåg	19

Helt allmänt bör temperaturfördelningen i en mark vara bestämd av det symboliskt tecknade uttrycket

$$\int_{t}^{t} = f(z, t, I)$$
(1.1)

där  $\underline{\mathcal{W}}$  är temperaturen på djupet <u>z</u> vid tiden <u>t</u> i marken med parametern <u>I. I</u> tänkes här utgöra en sammanfattande beteckning för alla de egenskaper hos marken, som bestämmer temperaturfördelningen. För en given mark gäller alltså (i bästa fall) <u>I</u> = I<sub>1</sub> = konst.

Betrakta nu figur 1.1, vilken tänkes ange ett ur marken utskuret semiinfinit rät prisma med rektangulär basyta a.



Värmet tänkes här strömma vertikalt nedåt. Betrakta skiktet <u>dz</u> på djupet <u>z</u>. Genom skiktets övre begränsningsyta strömmar värmemängden dq<sub>i</sub> in under tiden <u>dt</u>. Under samma tid strömmar mängden dq<sub>u</sub> ut. Temperaturgradienten i skiktets övre begränsningsyta kan skrivas  $\partial N / \partial z$ . Enligt fysiken måste då gälla för dq<sub>i</sub>

$$dq_{i} = k a \left(-\frac{\partial \beta^{i}}{\partial z}\right) dt \qquad (1.a)$$

Temperaturgradienten i skiktets nedre begränsningsyta är (obs! temp. för djupet  $\underline{z}$  är  $\sqrt[5]{!}$ 

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \partial + \frac{\partial \partial}{\partial z} dz \right) = \frac{\partial \partial}{\partial z} + \frac{\partial^2 \partial}{\partial z^2} dz \qquad (1.b)$$

För dq<sub>u</sub> gäller då (se ovan!)

$$dq_{u} = k a \left(-\frac{\partial D}{\partial z} - \frac{\partial^{2} D}{\partial z^{2}} dz\right) dt$$
(1.c)

Den värmemängd  $dq_m$ , som magasinerats i skiktet <u>dz</u>, kan då tydligen tecknas

$$dq_{m} = dq_{i} - dq_{u} = k a \frac{\partial^{2} \partial^{2}}{\partial z^{2}} dz dt$$
(1.d)

Om markens specifika värme per viktsenhet är coch volymvikt  $\gamma$ , så blir det till volymsenheten hänförda spec. värmet cv =  $\chi$  cg. Tydligen gäller då

$$dq_{m} = c_{v} a dz d\omega^{j_{4}}$$
 (1.e)

Ekvationerna (1.d) och (1.e) ger

$$e_v a dz d\beta = k a \frac{\partial^2 \beta^n}{\partial z^2} dz dt$$
 (1.f)

eller efter förenkling

$$\frac{\partial \rho^{n}}{\partial t} = D \frac{\partial^{2} \rho^{n}}{\partial z^{2}}$$
(1.2)

där

$$D = \frac{k}{c_v} = \frac{k}{c_g \sqrt{b}}$$
(1.3)

benämnes temperaturledningsförmåga (eng. diffusivity).

Den partiella differentialekvationen (1.2) ovan är den av <u>Fourier</u> 1822 publicerade ekvationen för värmeledningen i en stav (Theorie analytique de la chaleur).

## Om en partikulär lösning till den partiella differentialekvationen (1.2).

Markytan utsättes i allmänhet för mycket oregelbundna temperaturväxlingar, Dessa kan icke exakt beskrivas med enkla matematiska uttryck. Med hjälp av Fourierserier kan emellertid varje givet temperaturförlopp – även det mest oregelbundna – framställas som en summa av sinus- och cosinustermer. Tillpassningens noggrannhet bestämmes härvid av huru många termer, som medtages.

För varje given lokal beskriver temperaturen i stort en karakterisktisk <u>årscykel (= årsvåg</u>) och för varje dygn en <u>dygnscykel (= dygns-</u> <u>våg</u>).

I det enklaste fallet kan man antaga och även visa (se t.ex. Dobrowsky, J., 1944!), att dessa temperatursvängningar kan beskrivas med en enda cosinus- eller sinusterm. Det vill säga

$$\rho^{2n} = \rho^{2n}_{m,0} + \Delta \rho^{2n}_{a,0} \cos \frac{2\pi}{T} t \qquad (2.1)$$

där  $\frac{\partial}{\partial t}$  är temperaturen vid en godtycklig tidpunkt <u>t</u>,  $\Delta \frac{\partial}{\partial t}$  temperaturamplituden eller maximala avvikelsen från medeltemperaturen  $\frac{\partial}{\partial t}$  och <u>T</u> perioden t.ex, året mätt i dagar eller dygnet mätt i timmar.

Experimentella mätningar visar, att olika långa temperaturstigningar och -fall tränger ned i jorden med en med djupet växande tidsfördkjutning = fördröjning och neddämpning = minskning av amplituden. Se t.ex. <u>Ångström</u>, <u>A.</u> (1958) och <u>Richards, S.J.</u> (1952).

Mot bakgrunden av dersa fakta är det naturligt att pröva lösningen

$$\hat{w} = \hat{w}_{m,0} + \alpha_0 \hat{w}_{a,0} e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}\right)$$
(2.2)

där  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}_{m.0}$ ,  $\underline{A}_{0}\mathcal{O}_{a,0}$ ,  $\underline{T}$  och <u>t</u> har tidigare angiven betydelse, <u>z</u> betyder djupet och <u>D</u> ir temperaturledningsförmågan. Det är nämligen tydligt, att denna ekvation uppfyller de tidigare angivna kraven. För <u>z</u> = o erhålles ekv. (2.1). För växande <u>z</u> minskas vinkeln vid givet <u>t</u>, vilket ger en tidsförskjutning, fördröjning eller fasförskjutning, och uttrycket på amplituden  $\Delta \mathcal{O}_{a,Z}$ 

$$A \tilde{M}_{a,z} = A \tilde{M}_{a,o} e^{-z \sqrt{DT}}$$
(2.3)

minskar likaså.

Att ekvationen (2.2) också verkligen är en lösning till differentialekv. (1.2), kan vi visa genom derivering. Vi skriver med lätt insedda förkortningar och förenklingar.

$$\hat{\rho} = a e^{-b z} \cos (c t - b z) = a e^{-b z} \cos \varphi$$
(2.a)

Derivering med avs. på  $\underline{t}$  ger

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a e^{-bz} c (-1) \sin \phi = -a c e^{-bz} \sin \phi$$
 (2.b)

Första derivatan med avs. på z blir

$$\frac{\partial a^{h}}{\partial z} = -ab e^{-b z} \cos \varphi + ab e^{-b z} \sin \psi \qquad (2.c)$$

och andra derivatan blir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = ab^2 e^{-bz} \cos \varphi - ab^2 e^{-bz} \sin \varphi - ab^2 e^{-bz} \sin \varphi - ab^2 e^{-bz} \cos \varphi \quad (2.d)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2 ab^2 e^{-bz} \sin \varphi = 2 b^2 \left(-a e^{-bz} \sin \varphi\right) \qquad (2.e)$$

$$\frac{\partial a^{\eta}}{\partial t} = -ac e^{-b z} \sin \varphi = c \left( -a e^{-b z} \sin \varphi \right)$$
(2.f)

dvs.

$$\frac{\partial \partial r}{\partial t} = \frac{c}{2b^2} \frac{\partial^2 \partial}{\partial z^2}$$
(2.g)

men enl. det föregående är

$$\frac{c}{2b^2} = \frac{2\pi}{T} \frac{DT}{2\pi} = D$$
(2.h)

och således

$$\frac{\partial \partial^{*}}{\partial t} = D \frac{\partial^{2} \partial^{*}}{\partial z^{2}}$$

Men detta är ekv. (1.2) och beviset är genomfört.

### Närmare analys av ekvationen (2.2).

Om vi med <u>c</u> betecknar det s.k. geotermiska måttet, så kan ekvationen (2.2) något fullständigare skrivas

$$\mu^{2} = \rho^{2}_{m,0} + c z + \Delta \rho^{2}_{a,0} e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}\right)$$
(3.1)

där termen <u>c z</u> nu uttrycker den med djupet stigande medeltemperaturen  $\mathcal{N}_{m,z}$  eller

$$\partial_{m,z}^{n} = \partial_{m,0}^{n} + c z \qquad (3.2)$$

Det geotermiska måttet brukar ofta anges i grader temperaturstigning per 100 m ökat djup. I fast berg anges medeltalet  $3^{\circ}$  per 100 m. Enligt <u>G. Beskow</u> (1935, s. 184!) kan i lösa kapillärmättade jordlager <u>c</u> då sättas till  $6^{\circ}$  C/100 m eller c = 6  $10^{-4}$  °C/cm (se även längre fram!).

<u>Bestämning av våglängden.</u> Om vi grafiskt avbilda ekv. (2.2) eller (3.1) för t.ex.  $\underline{z} = \underline{z}_i$  erhålles en cosinuskurva (jfr med fig. 4.1!), dvs. temperaturen beskriver för varje djup en enkel harmonisk svängningsrörelse. Vid varje given tidpunkt  $\underline{t} = \underline{t}_i$  bildar temperaturen en med djupet dämpad vågkurva, dvs. <u>temperaturförändringarna i markytan ut-</u> breder sig mot djupet som en fortskridande vågrörelse.

Våglängden definieras såom avståndet mellan två konsekutiva i fas likbelägna delar av vågen. Om vi i överensstämmelse med fysiken betecknar våglängden med  $\lambda$ , så måste då vid en godtycklig tidpunkt  $\underline{t} = \underline{t}_{\underline{i}}$  gälla

$$\left(\frac{2\pi}{T} t_{i} - z_{2} \sqrt{\frac{\pi}{DT}}\right) - \left(\frac{2\pi}{T} t_{i} - z_{1} \sqrt{\frac{\pi}{DT}}\right) = -2\pi \qquad (3.a)$$

där  $z_1$  och  $z_2$  är två djup på avståndet  $\lambda$  och motsvarande en vinkelskillnad av  $2\pi$ . Således efter viss förenkling av ekv. (3.a)

$$(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) \sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{DT}} = 2\pi$$
 (3.b)

eller

$$\lambda = 2\sqrt{\mathrm{TT} \,\mathrm{DT}} \tag{3.3}$$

#### Våglängden är proportionell mot roten ur perioden.

Numeriskt ex. Om vi med  $\lambda_{\rm år}$  beteckna våglängden för en årsvåg och med  $\lambda_{\rm dygn}$  våglängden för en dygnsvåg, så erhålles

$$\frac{\lambda_{\text{år}}}{\lambda_{\text{dygn}}} = \sqrt{\frac{T_{\text{ar}}}{T_{\text{dygn}}}} = \sqrt{\frac{365}{1}} = 19.1$$
(3.c)

eller

$$\lambda_{\text{år}} = 19.1 \lambda_{\text{dygn}}$$
 (3.4)

Bestämning av vågens hastighet. Tiden för en fullständig svängning dvs. perioden har vi betecknat med T. Under denna tid rör sig vågen eller bättre breder vågen (temperaturförändringen!) ut sig längden  $\underline{\lambda}$ . Vågrörelsens hastighet <u>v</u> blir då

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{T} \tag{3.d}$$

dvs. i detta fall

$$\mathbf{v} = 2 \sqrt{\frac{\mathrm{Tr}\,\mathrm{D}}{\mathrm{T}}} \tag{3.5}$$

Vågens nedträngningshastighet är omvänt proportionell mot roten ur perioden.

Numeriskt ex. Med lätt insedda beteckningar erhålles

$$\frac{\mathbf{v}_{dygn}}{\mathbf{v}_{ar}} = \sqrt{\frac{T_{ar}}{T_{dygn}}} = \sqrt{\frac{365}{1}} = 19.1$$
(3.e)

eller

$$v_{\rm dygn} = 19.1 v_{\rm ar}$$
 (3.6)

<u>Anm.</u> Om <u>v</u> och  $\lambda$  införes i uttrycket för vinkeln uti ekv. (3.1), erhålles de viktiga likheterna

$$\left(\frac{2\pi}{T} t - z\sqrt{\frac{\pi}{DT}}\right) = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(v t - z\right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$
(3.7)

Bevisa dessa likheter!

Enligt ekv. (2.3) är amplituden  $\Delta \delta^{0}_{a,z}$  på djupet <u>z</u> bestämd av ut-trycket

$$\Delta \hat{\mathcal{N}}_{a,z} = \Delta \hat{\mathcal{N}}_{a,o}^{q} e^{-z \sqrt{\frac{11}{DT}}}$$

Förhållandet mellan amplituderna på djupen  $z_1$  och  $z_2$  blir alltså

$$\frac{\Delta \hat{\gamma}_{a,z_{1}}}{\Delta \hat{\gamma}_{a,z_{2}}} = \frac{e^{-z_{1}}\sqrt{\frac{\pi}{DT}}}{e^{-z_{2}}\sqrt{\frac{\pi}{DT}}} = e^{(z_{2}-z_{1})\sqrt{\frac{\pi}{DT}}}$$
(3.8)

Av denna ekvation framgår, att om djupet <u>z</u> tillåtes växa i aritmetisk serie dvs.  $z_{1+i} - z_i = \text{konst.}$  för <u>i</u> = 1, 2, 3 ..., så avtar amplituderna  $\Delta p_{a,z_i}^{(j)}$  i geometrisk serie. Uttrycket

$$\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{DT}}} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\mathrm{T}}{\mathrm{v}}$$

kallas i vågrörelseläran dämpkonstant (rumsdämpkonst.).

<u>Fasförskjutningen  $\Delta t$  kan definieras som den tid det tar för vinkeln, argumentet  $(\frac{2\pi}{T} t - z\sqrt{\frac{\pi}{DT}})$ , att på djupet  $z_2$  uppnå ett vid en tidigare tidpunkt  $t_1$  på djupet  $z_1$  (<  $z_2$ ) uppnått värde  $\frac{2\pi}{T}$   $t_1 - z_1\sqrt{\frac{\pi}{DT}}$ . Således skall gälla ( $t_2 = t_1 + \Delta t$ )</u>

$$\frac{2\pi}{T} (t_1 + \Delta t) - z_2 \sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \frac{2\pi}{T} t_1 - z_1 \sqrt{\frac{\pi}{DT}}$$
(a)

som ger

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{2} \sqrt{\frac{T}{TD}}$$
(3.9)

Det är tydligt, att denna fasförskjutning helt enkelt också är bestämd av uttrycket

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{v}$$
(3.10)

dvs. lika med den tid det tar för vågen att gå från djupet  $z_1$  till djupet  $z_2$ .

Vi sammanställer slutligen resultaten av vår analys i nedanstående översiktligt givna satser och formler:

<u>Sats 3.1.</u> Temperaturförändringarna i markytan utbreder sig mot djupet som en fortskridande vågrörelse.

<u>Sats 3.2.</u> Våglängden  $\lambda$  är härvid direkt proportionell mot roten ur svängningstiden <u>T</u> eller perioden. I formel

$$\lambda = 2 \sqrt{\pi} DT \qquad (3.3)$$

<u>Sats 3.3.</u> Vågens nedträngningshastighet <u>v</u> är omvänt proportionell mot roten ur perioden. I formel

$$\mathbf{v} = 2 \sqrt{\frac{\pi \mathbf{D}}{\mathbf{T}}}$$
(3.5)

Sats 3.4. Temperaturamplituden  $\Delta \rho_a^{\partial}$  avtar i geometrisk progression, när djupet <u>z</u> tillåtes växa i aritmetisk progression. I formel

$$\frac{\Delta \rho_{a, z_{1}}}{\Delta \rho_{a, z_{2}}} = e^{\left(z_{2} - z_{1}\right)\sqrt{\frac{17}{DT}}}$$
(3.8)

<u>Sats 3.5.</u> Fasförskjutningen <u>At</u> eller fördröjningen växer lineärt med djupet <u>z</u> och den är direkt proportionell mot kvadratroten ur perioden T. I formel

$$\Delta t = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{T}{T D}} = \frac{z}{v}$$
 (3.9) o. (3.10)

(Observera att  $\underline{z}_1$  här satts = 0 och att index för  $\underline{z}_2$  strukits!)

## <u>4.</u> <u>Numerisk genomräkning av ett teoretiskt</u> exempel på en årsvåg.

För Ultuna (Uppsala) gäller att  $n_{m}^{\gamma} = 5.2$ ,  $n_{max}^{\gamma} = + 16.8$  och  $n_{min}^{\gamma} = -3.8$  allt i grader C. Av detta erhålles  $2\Delta_{\mu}^{\gamma}$ ,  $= 20.6^{\circ}$  C. Överslagsvis kan vi sätta

$$v^{T} = 5.2 + 6.10^{-4} z + 12 e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - z \sqrt{\frac{\pi}{DT}}\right)$$
 (4.1)

Av litteraturen framgår, att vi såsom ett lämpligt medelvärde för <u>D</u> kan sätta <u>D</u> = 0.004  $\frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}$ . Vi omräknar detta till cm<sup>2</sup>/dag. Således

$$0.004 \ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sek}} = 0.004 \ \frac{3600 \cdot 24}{3600 \cdot 24} \ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sek}} = 346 \ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{dag}}$$

<u>Våglängden  $\lambda$  blir</u>

$$\lambda = 2 \sqrt{\pi DT} = 2 \sqrt{3.1416.346.365} = 1259 \text{ cm} = 12.6 \text{ m}$$

Temperaturförändringarna fortplanta sig nedåt med <u>hastigheten v</u>

$$\mathbf{v} = 2\sqrt[3]{\frac{\pi}{T}} = 2\sqrt[3]{\frac{3.1416.346}{365}} = \frac{2.1.772.18.60}{19.11} = 3.45 \frac{\text{cm}}{\text{dag}}$$
$$\mathbf{v} = 1.04 \frac{\text{m}}{\text{mån.}} \approx 1 \frac{\text{m}}{\text{mån.}}$$

Dämpkonstanten blir

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \sqrt{\frac{3.1416}{346.365}} = \frac{1.772}{18.60.19.11} = 0.005 \text{ cm}^{-1}$$

Uttrycket för amplituden blir alltså

$$\Delta p_{a, z}^{0} = 12 e^{-0.005 z}$$

För  $\underline{z} = 100$  cm = 1 m erhålles amplituden 7.28° C.

Amplitudminskningen i procent för varje meters ökat djup blir

$$100 \cdot \frac{12 - 7.28}{12} = 39.3 \% \approx 40 \%$$

Fasförskjutningen är bestämd av uttrycken (3.9 o. 3.10)

$$a t = \frac{z_2 - z_1}{2} \sqrt{\frac{T}{TD}} = \frac{z_2 - z_1}{v}$$

eller i detta fall

$$\Delta t = \frac{z_2 - z_1}{3.45} \text{ dagar}$$

För  $z_1 = 0$  och  $z_2 = 100$  cm, erhålles

$$\Delta t = \frac{100}{3.45} = 29.0 \text{ dagar}$$

Fasförskjutningen är alltså i runt tal 30 dagar för varje meters ökat djup.

En närmare analys av huru sex mätpunkter bör fördela sig vid experimentella mätningar till 6 meters djup visar (se ex. 4.1!), att mätpunkterna lämpligen fördelas enligt nedanstående översikt:  $z_1 = 30$  cm,  $z_2 = 70$  cm,  $z_3 = 120$  cm,  $z_4 = 190$  cm,  $z_5 = 300$  cm och  $z_6 = 600$  cm. I tabell (4.1) anges amplituden  $A_1^{(3)}$ , och fasförskjutningen <u>At</u>

I tabell (4.1) anges amplituden  $4_{\beta}^{\beta}_{a,z}$  och fasförskjutningen <u>At</u> utom för ovan angivna djup även för alla jämna halva metrar till sex meters djup.

Ta	b	e	1	1	4		1.	
-	-	-				Concerning of the		-

Z CM	0.005 z	e <sup>-0.005</sup> z	Δ <sup>βn</sup> a, z oC	<b>∆t</b> Dagar	Anmärkningar
0	0.000	1.0000	12.00	0.0	
<u>30</u>	0.150	0.8607	10.33	8.7	
50	0.250	0.7788	9.35	14.5	
<u>70</u>	0.350	0.7047	8.46	20.3	
100	0.500	0.6065	7.28	29.0	
<u>120</u>	0.600	0,5488	6.59	34.8	
150	0.750	0.4724	5.67	43.5	
<u>190</u>	0.950	0.3867	4.64	55.1	
200	1.000	0.3679	4.41	58.0	
250	1.250	0.2865	3.44	72.5	
300	1.500	0.2231	2.68	87.0	
350	1.750	0.1738	2.09	101.5	
400	2.000	0.1353	1.62	116.0	
450	2.250	0.1054	1.26	130.5	
500	2.500	0.0821	0.99	145.0	
550	2.750	0.0639	0.77	159•4	
<u>600</u>	3.000	0.0498	0.60	174.0	

I ekv. (4.1) är vinkeln uttryckt i radianer. För att kunna konstruera de på figurerna 4.1. – 4.3. uppritade kurvorna är det nödvändigt att erhålla ett tillräckligt antal sammanhörande <u>t</u>- och  $\underline{\mathbb{A}}^{+}$ -värden. Om vi inför grader som vinkelmått och dessutom beakta eventuellt förekommande begynnelsevillkor, erhålles

$$\beta^{2} = 5.2 + 6.10^{-4}z + 12.e^{-0.005}z \cos \frac{360}{T} \left[ (t + t_{o}) - \frac{z}{v} \right]$$
(4.a)

 $\int = 5.2 + 6 \cdot 10^{-4} z + 12 \cdot e^{-0.005 z} \cos 0.986 \left[ (t + t_0) - 0.290 z \right] (4.b)$ Jämför med ekv. 3.7)! Obs T = 365 dagar!

Enklaste sättet att konstruera kurvorna på de angivna figurerna torde vara att på ett mm-rutat papper t.ex. sätta tidsaxeln för ett år =  $360 \text{ mm dvs. } 1^{\circ} \approx 1 \text{ mm}$ . Vi upprättar därför tabell (4.2) samt uppritar "grundkurvorna" utan någon fasförskjutning dvs. rakt under varandra. Därefter överföres dessa genom överläggning på ett ljusbord, varvid kurvorna förskjutes i överensstämmelse med de beräknade och i tab. (4.2) införda fasförskjutningarna. På detta sätt erhålles kurvorna på fig. 4.1. De för konstruktionen av kurvorna på figurerna 4.2. och 4.3. nödvändiga värdena erhålles sedan genom avläsning av eller grafisk överföring från fig. 4.1.

Enligt ekvationen (2.2) är temperaturen  $\underline{\alpha}^h$  en funktion av de två oberoende variablerna  $\underline{z}$  = djup och  $\underline{t}$  = tid. Vid grafisk framställning i planet erhålles därför tre olika kurvskaror, allteftersom den ena eller andra av de tre storheterna betraktas som parameter.

Betraktas djupet <u>z</u> som parameter, erhålles ett enkelt trigonometriskt samband mellan temperaturen <u>n</u> och tiden <u>t</u>. Den grafiska framställningen (fig. 4.1.) ger oss en åskådlig bild av temperaturens variation med tiden på de valda djupen. De enskilda kurvorna kallas <u>geotermer</u>. Experimentellt erhålles sådana kurvor vid t.ex. automatisk registrering av temperaturen på olika djup.

Betraktas tiden <u>t</u> som parameter, erhålles ett samband av något mera komplicerad art mellan temperaturen  $\underline{f}^{\mathcal{P}}$  och djupet <u>z</u>. Den grafiska framställningen (fig. 4.2.) ger oss en åskådlig bild av temperaturens variation med djupet vid de olika valda tidpunkterna. De enskilda kurvorna kallas <u>tautokroner</u>. Enligt ekvationen (2.2) är de med djupet starkt dämpade vågkurvor. Experimentellt erhålles de om temperaturen på några olika djup avläses t.ex. en viss dag och de erhållna värdena inprickas i ett temperatur-djupdiagram och punkterna sammanbindes.

Betraktas temperaturen  $\underline{\mathcal{N}}$  som parameter, erhålles ett komplicerat samband mellan <u>t</u> och <u>z</u>. Den grafiska framställningen (fig. 4.3.) ger oss en åskådlig bild av djupet och varaktigheten av olika temperaturer i marken. De enskilda kurvorna kallas <u>termoisopleter</u>.

2.		4.0 1.6		+5.56	6.16	+4.96	6.16	4.96	6.15	4.97	6.14	4.98		6.10	5.02	6.08	5.04	6.05	5.07	6.02	5.10	5.98	5.14	5.95	5.17	5.90	5.22	5.86	5.26	5.81	5.31	5.77	5.35	5.72	5.40	5.66	5.46	5.51	5.56
-		51		0.60 b	0.60		0.60		0.59		0.58	7 J J		0.54		0.52		0.49		0.46		0.42		0.39	data mangang sa	0.34	antidad I any not A cab	0•30		0.25		0.21		0.16		0.10	0.05	Statils form composit	0•00
		0.5		+5.47	6.83	4.31	6.83	4.31	6.81	4.33	6.79	4.35	02.0	6.71	4.43	6.66	4.48	6.60	4.54	6.54	4.60	6.46	4.68	6.38	4.76	6.29	4.85	6.20	4.94	6.10	5.04	6.00	5.14	5.90	5.24	5.79	5.68	5.46	5.57
				1.26 b	1.26		1.26		1.24		1.22	07	•	1.14		1.09		1.03		76.0		0.89		0.81		0.72		0.63		0.53		0.43		0.33		0.22	0.11		0.00
		0 0		+5.38	8.06	+2.70	8.05	2.71	8.02	2.74	7.97	2.79	2.86	7.81	2.95	7.70	3.06	7.58	3.18	7*43	3.33	7.28	3.48	7.10	3.66	6.92	3.84	6 <b>.</b> 72	4.04	6.51	4.25	6.30	4.46	6.07	4.69	5.05	5.61	5.15	5.38 3.38 5.00
		87 85	-	2.68 b	2.68		2.67		2.64	letabilitan generalasa en	2.59	0 20	c• ) c	2.43	herry, Syddynegol Bry	2.32	and a call when any	2.20		2.05	a tura municipalita pro	1.90		1.72	en un sijnen geget blev sør	1.54	afgegester getter og	1.34	1929 (1929 (1929) (1929) (1929)		an Anna	0.92		0.69		0.47	0.23	<b>1114</b> - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 -	0000
				45.31	9.95	+0.67	9•93	0.69	9.88	0.74	9.79	0.83	0.95	9.52	1.10	9.33	1.29	9.11	1.51	8.86	1.76	8.59	. 2.03	8.29	2.33	7.97	2.65	7.63	2.99	7.27	3.35	6 • 90	3.72	6.51	4.11	6.12	5.70	4.91	
		55		4.64 b	4.64		4.62		4.57		4.48	A ZG	•+	4.21		4.02		3.80		3.55		5.28		2.98		2.66		2.32		1.96		1.59		1.20		0.81	0.40		00•0
		• 8	0	+5.27	11.86	-1.32	11.83	1.29	11.76	1.22	11.64	11.46	0.92	11.24	0.70	10.98	0.44	10.67	0.13	10.32	+0.22	9.93	0.61	9.51	1.03	9.05	1.49	8.57	1.97	8.05	2.51	7.52	3.02	6.98	3.56	6.41	4.15 5.84	4.70	5.27
	ing	34	12	6.59 b	6.59		6.56		6.49		6.37	6.19		5.97		5.71		5.40		5.05		4.66		4.24		3.78		3.30		2.78		2.25		1.71		1.14	0.57		0.00
	irskjutn	)•3 •0	1 Cm	+5.24	13.70	-3.22	13.67	3.19	13.57	3.09	13.41	13.19	2.71	12.91	2.43	12.57	2.09	12.17	1.69	11.72	1.24	11.22	0.74	10.68	0.20	10.09	+0.59	9.47	1.0°1	8.82	1.66	8.13	2.35	7.43	3.05	6.61 z 77	5.98	4.50	5.24
	Fasf	50 50	Djuj	8.46 b	8.46		8.43		8.33		8.17	7.95		7.67		7.33		6.93		6.48		5.98		5.44		4.85		4.23		3.58		2.89		2.19		1.4.1	0.74		0.00
		-7	0	+5.22	15.55	-5.11	15.51	5.07	15.39	4.95	15.20	4.07	4.49	14.58	4.14	14.17	3.73	13.68	3.24	13.13	2.69	12.52	2.08	11.86	1.42	11.15	10	10.39	40.0+	9.59	0.85	8.75	1.69	7.89	2.55	20.99 2 A Z	0.42 6.12	4.32	5.22 5.22
		ωω	K	10.33 b	10.33		10.29		10.17		9.98	9.71		9.36		8.95	6	8.46	4, for 1, ( ( ( ( ( ( (-	7.91		7.30	,	6.64	l	5.93		5.17	1	4.57	erregen kanstallet in dige	3.53		2.67	C 2 7	6	06•0	<b>60, 100, 00, 00, 00, 00</b>	
			. Le chante	+5.20	17.20	-9-1	17.15 Emiliar	6.75	17.02	6.62	97.01 6 zo	16.48	6.08	16.08	5.68	15.59	5.19	15.03	4.63	14.39	3.99	13.69	3.29	12.91	16.2	12.08	R0.	11.20	0.00	1.2.01	+0.13	9.30	1.10	8.31	2.09	07.1 2 12	6.25	4.15	2 5 2 0 2 0
		Dag. (	0	12 b	12.00		11.95		11.82	(	66.FT	11.28	29 19 20 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19	10.88		10.39		9.83		9.19		8.49		1.7.1		0.88		00.9	E C	1.0.4		4.10		3.11		Ø <b>N</b> • 7	1.05	unt claudicu (b. etc	
•2•		ا م	COSO		1.0000		0.9962		0.9848		606.0	79397		0.9063		0.8660		0.8192		0.7660		0.7071		0.6428		961.6.0		0.000		0.4220		0.3420		0.2588	1727	1011.00	0.0872		0000
Tabell 4		Vinkel	°×		0	180	5	175	10	170	CL 291	20	160	25	155	30	150	35	145	40	140	45	155	50	001	CC 101	67	00	021	60	611	02	110	75	C01	100	85	95	06

•	
N	
•	
4	
_	
-il	
Ø	
12	
G	
Fil	

Den av <u>R. Gandahl</u> (jfr med Grundförbättring 1957, årg. 10, nr 1!) konstruerade tjäldjupsmätaren kan sägas direkt ge oss termoisopleten för  $0^{\circ}$  C.

<u>Ex. 4.1.</u> För att mäta marktemperaturens växling under året skall sex termometrar placeras på olika djup. Den översta skall placeras på 30 cm djup och den nedersta (djupaste) på 600 cm djup. Bestäm den lämpligaste fördelningen av de övriga fyra termometrarna!

Lösning. Om vi i anslutning till vårt numeriska exempel antar att  $\Delta v_{a,o}^{\dagger}$  är 12<sup>°</sup> C, så kan vi använda tabellens 4.1 siffror för konstruktionen av nedanstående kurva. Lösningen framgår sedan av figuren!











 $\hat{N} = f(z, t), \hat{N}$  betraktad som parameter. I ekvationen (3.1) förekommer uttrycket

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}}$$
 (a)

på två ställen. Uttrycket kan också skrivas

$$\sqrt{\frac{\pi}{DT}} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}DT} = \frac{2\pi}{\lambda}$$
(b)

Substitueras uttrycket (a) enl. (b), erhålles

$$\phi^{\text{B}} = \rho^{\text{B}}_{\text{m,o}} + c z + \Delta \phi^{\text{B}}_{\text{a,o}} e^{-2 \pi \frac{Z}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$
(5.2)

där dessutom tecknet för vinkeln ändrats enligt den kända relationen

$$\cos \alpha = \cos (-\alpha)$$
 (c)

Ekvationen (5.2) är en synnerligen användbar form vid beräkningar och diagramkonstruktioner.

Om vi för enkelhetens skull sätta  $\underline{c} = 0$ , vilket ju för alla  $\underline{z} = 2$  m betyder ett fel i  $\sqrt[n]{m,200} = 0.12^{\circ}$  C, och räknar  $\underline{\sqrt{7}}$  från medelvärdet, förenklas ekv. (5.2) till

$$\mathcal{N} = \Delta \hat{\mathcal{N}}_{a,0} e^{-2\pi \frac{z}{\lambda}} \cos 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$
(5.3)

Med hjälp av detta uttryck kan tabellerna 5.1 och 5.2 beräknas

$\frac{z}{\lambda}$	$\frac{\Delta \rho^{j_{a}} a, z}{\Delta \rho^{j_{a}} a, o}$	$\frac{z}{\lambda}$	Δp <sup>a</sup> .z Δp <sup>a</sup> .o
0.00	1.000	0.50	0.043
0.05	0.730	0.60	0.023
0.10	0.533	0.70	0.012
0.15	0.390	0.80	0.006
0.20	0.284	0.90	0.0035
0.30	0.152	1.00	0.00187
0.40	0.081		

Tabell 5.1.

Av tabellen framgår, att amplituden på ett djup av omkring 0.75  $\lambda$  sjunkit till en procent av amplituden i ytan och att den på djupet  $z = \lambda$  endast uppgår till c:a 0.2 % av amplituden i ytan.

Om vi uttrycker z i decimaler av  $\lambda$  dvs.  $z = n\lambda$  och <u>t</u> i tolftedelar av perioden T, så kan vi lätt beräkna och uppställa tabell 5.2.

Tabell 5.2.

n t	0	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
0	1.000	0.694	0.431	0.088	-0.059	-0.065	-0.043	-0.019
Т/12	0.866	0.714	0.531	0.212	0.032	-0.033	-0.037	-0.023
2T/12	0.500	0.541	0.487	0.278	0.105	0.009	-0.022	-0.021
3T/12	0.000	0.225	0.314	0.271	0.144	0.048	0.000	-0.014
4T/12	-0.500	-0.152	0.056	0.190	0.149	0.074	0.022	-0.002
5T/12	-0.866	-0.488	-0.217	0.059	0.113	0.081	0.037	0.009

Tabellen behöver ej ytterligare utbyggas, enär för t =  $\frac{6T}{12}$  vinkeln blir 2  $\pi$  n - 2  $\pi$  ·  $\frac{6T}{12T}$  = 2  $\pi$  n -  $\pi$  . För beräkning av  $\rho^2$  -värden motsvarande intervallet  $\pi$  -2  $\pi$  kan då relationen

 $\cos\left( \alpha - \overline{T_{i}} \right) = -\cos \alpha$ 

utnyttjas.

## Numerisk genomräkning av ett teoretiskt exempel på en dygnsvåg.

Dygnsvågen beräknas i anslutning till de medelförhållanden, som preciseras av tautokronen för juni dvs. kurva nr 6 på fig. 4.2.

Vi antar, att dygnets medeltemperatur är +13.7° C (se nedan!) och att amplituden är 10° C. Tiden anges i timmar. Om <u>D</u> = 0.004  $\frac{\text{om}^2}{\text{sek}}$ , så blir

$$D = 0.004 \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} = 0.004 \cdot \frac{3600}{3600} \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}} = 14.4 \frac{\text{cm}^2}{\text{tim}}$$

Således

 $\lambda = 2\sqrt{77 \cdot 14.4.24} = 2.1.7725.3.7947.4.8990 = 65.90 \text{ cm}$ 

$$v = \frac{\lambda}{24} = \frac{65.90}{24} = 2.746 \frac{\text{cm}}{\text{tim}}$$

Dämpkonstanten blir

$$\sqrt{\frac{1}{DT}} = \frac{1.7725}{3.7947 \cdot 4.8990} = 0.09535 \text{ cm}^{-1} \approx 0.10 \text{ cm}^{-1}$$

För medeltemperaturens minskning med djupet inom intervallet 0-30 cm erhålles vid noggrann avläsning av tautokronen z = 0,  $\rho^2 = 13.70$  samt z = 30,  $\rho^2 = 11.30$ .

$$\Delta v_{m,z}^{\odot} = 13.7 - 0.08 z$$

Ekvationen (2.2) kan nu skrivas

$$\beta^{3} = 13.7 - 0.08 \cdot z + 10 \cdot e^{-\frac{z}{10}} \cos \frac{2\pi}{24} \left[ (t + t_{0}) - \frac{z}{2.75} \right]$$
 (6.1)

Vi beräknar tabellerna 6.1. och 6.2. samt konstruerar kurvorna på fig. 6.1. och 6.2. Termoisopleterna har i detta fall icke blivit uppritade. Den intresserade läsaren kan själv som övning konstruera dem genom grafisk överföring av värden från fig. 6.1. till ett djup-tidsdiagram, vars tidsaxel överensstämmer med tidsaxeln i diagrammet på figur 6.1.

Tabell 6.1.

Z Cm	<sup>z/</sup> 10	e 10	oc oc	∧t tim.	
0	0.00	1.000	10.00	0.000	
2.7	0.27	0.7634	7.63	0.983	
5	0.50	0.6065	6.07	1.821	
6.5	0.65	0.5221	5.22	2.367	
10	1.00	0.3679	3.68	3.642	
12.5	1.25	0.2865	2.87	4•553	
15	1.50	0.2231	2.23	5.463	
2.0	2.00	0.1353	1.35	7.284	
25	2.50	0.0821	0.82	9.105	
30	3.00	0.0498	0.50	10.93	and the second se

	12.12 887 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.886 1.887 1.886 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.887 1.886 1.887 1.897 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.997 1.	13.18     12.87       13.18     2.87       18.40     2.87       18.40     2.87       18.58     2.86       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.83       18.52     2.49       8.14     2.70       8.14     2.49       17.91     2.60       8.45     2.49       17.91     2.49       8.45     2.49       17.91     2.60       8.45     2.49       17.91     2.50       8.90     2.35       8.90     2.35       9.18     2.03       9.18     2.03       9.49     2.03	$\pm$ cm $6.5$ $+13.18$ $2.87$ $5.22$ $+13.18$ $2.87$ $12.5$ $5.22$ $18.40$ $2.86$ $5.20$ $18.58$ $2.86$ $7.98$ $7.98$ $2.86$ $7.98$ $7.98$ $2.86$ $7.98$ $8.04$ $8.04$ $5.04$ $18.52$ $2.83$ $8.14$ $18.22$ $2.87$ $4.91$ $18.22$ $2.70$ $4.73$ $17.91$ $2.60$ $4.73$ $17.91$ $2.60$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $8.45$ $8.45$ $2.70$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $8.66$ $8.45$ $2.55$ $4.00$ $17.18$ $2.50$ $4.00$ $17.18$ $2.03$ $5.69$ $16.87$ $2.03$	7 $6.5$ $+13.18$ $2.87$ $+13.48$ $5.22$ $b$ $+13.18$ $2.87$ $21.11$ $5.22$ $18.40$ $2.86$ $5.85$ $5.20$ $18.38$ $2.86$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $2.86$ $5.88$ $5.20$ $18.38$ $2.86$ $5.97$ $8.04$ $2.83$ $5.97$ $8.04$ $2.79$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.97$ $8.04$ $2.70$ $5.040$ $4.73$ $17.91$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.51$ $4.91$ $18.09$ $6.51$ $4.73$ $17.91$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $20.09$ $4.52$ $17.46$ $20.09$ $4.52$ $17.16$ $19.73$ $4.00$ $17.18$ $19.73$ $4.00$ $17.18$ $19.32$ $9.18$ $7.64$ $2.69$ $18.88$ $3.69$ $16.87$	2.7 $2.04$ mm f = 5.22 b $+13.48$ $5.22$ b $+13.18$ $2.67$ $7.63$ $21.111$ $5.22$ $18.40$ $2.81$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.58$ $2.86$ $7.51$ $5.88$ $7.98$ $7.96$ $2.83$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.58$ $2.86$ $7.57$ $20.99$ $5.14$ $18.52$ $2.86$ $7.57$ $20.99$ $5.14$ $18.52$ $2.83$ $7.57$ $20.99$ $5.14$ $18.22$ $2.87$ $7.77$ $20.95$ $5.04$ $18.22$ $2.87$ $6.92$ $20.99$ $4.71$ $18.22$ $2.70$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $2.60$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $2.49$ $6.87$ $6.87$ $4.00$ $17.18$ $2.35$ $6.84$ $19.73$ $4.28$ $17.76$ $2.35$ $5.84$ $19.73$ $4.00$ $17.18$ $2.03$ $5.40$ $18.88$ $3.69$ $16.87$ $2.03$	2.7 $2.4$ m, $6.5$ $12.87$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.81$ $2.86$ $2.85$ $2.85$ $7.57$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.86$ $2.70$ $2.82$ $2.86$
		-13.18     2.87       18.40     2.8       18.40     2.8       18.58     2.6       18.58     2.6       18.52     2.6       8.04     2.7       8.04     2.7       18.52     2.6       8.04     2.7       8.04     2.7       18.22     2.6       8.04     2.7       8.04     2.7       18.22     2.7       8.27     2.7       8.27     2.7       8.45     2.7       8.45     2.4       8.45     2.4       8.45     2.4       8.45     2.4       17.46     2.4       8.90     2.4       9.45     2.4       9.18     2.6       9.18     2.6       9.18     2.6       9.18     2.6       9.18     2.6       9.40     2.6	5.22 b     +13.18     2.87       5.22 l     18.40     2.8       5.20 l     18.40     2.8       5.14     18.38     2.6       5.14     18.38     2.6       7.98     7.98     2.6       7.98     7.98     2.6       5.04     18.32     2.6       4.91     18.32     2.6       4.91     18.22     2.6       4.91     18.22     2.7       4.73     17.91     2.6       4.52     8.45     2.6       4.52     8.45     2.6       4.52     17.70     2.6       4.00     17.46     2.3       5.69     16.87     2.6       5.69     16.87     2.6	+13.46       5.22       b       +13.16       2.87         21.11       5.22       18.40       2.8         5.85       7.96       7.96       2.6         5.86       7.96       7.98       2.6         5.88       5.20       18.38       2.6         5.86       5.04       18.32       2.6         5.97       8.04       2.6       2.6         5.97       8.04       18.32       2.7         5.97       8.04       18.32       2.7         6.11       8.14       8.14       2.6         6.31       4.91       18.22       2.7         6.31       8.14       8.14       2.6         6.31       8.14       8.14       2.6         6.31       8.17       8.27       8.45         6.56       4.91       18.09       2.7         6.56       4.52       17.70       2.6         19.73       4.28       17.46       2.7         19.72       4.00       17.46       2.7         19.72       4.00       17.18       2.6         19.52       4.00       9.17       2.6         19.52	7.63 b $+13.48$ $5.22$ b $+13.18$ $2.87$ $7.63$ $21.11$ $5.22$ $18.40$ $2.8$ $7.60$ $5.85$ $7.96$ $7.96$ $5.86$ $5.20$ $18.38$ $2.6$ $7.51$ $5.97$ $7.98$ $2.6$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.38$ $2.6$ $7.57$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $2.6$ $7.57$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $2.6$ $7.37$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.7$ $6.71$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.7$ $6.51$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.6$ $6.51$ $20.60$ $4.73$ $17.91$ $2.6$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $8.45$ $2.6$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $2.6$ $6.56$ $4.28$ $17.46$ $2.2$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $2.3$ $6.264$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $2.6$ $6.25$ $19.73$ $4.00$ $17.18$ $2.6$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $2.6$ $7.64$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $2.6$	+13.70 $7.63$ $+13.48$ $5.22$ $+13.18$ $2.87$ $23.70$ $7.63$ $21.11$ $5.22$ $18.40$ $2.8$ $3.70$ $7.63$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $2.6$ $3.74$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $2.6$ $3.74$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $2.6$ $3.74$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $2.6$ $23.55$ $7.57$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $2.6$ $23.56$ $7.57$ $20.95$ $5.04$ $18.32$ $2.6$ $23.56$ $7.37$ $20.95$ $5.04$ $18.22$ $2.7$ $23.56$ $7.37$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.7$ $4.04$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.7$ $4.04$ $6.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.7$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $2.7$ $2.2.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $2.6$ $2.2.36$ $6.61$ $20.65$ $4.91$ $8.45$ $2.7$ $2.2.36$ $6.61$ $20.65$ $4.91$ $8.45$ $2.7$ $2.189$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $2.7$ $2.189$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $2.7$ $2.189$ $6.25$ $19.73$ $4.00$ $17.18$ $2.6$ $2.136$ $5.84$ $19.36$ $9.18$ $2.6$ $2.136$ $5.84$
2.87 2.86 2.85 2.83 2.77 2.60 1.0 2.60 1.0 2.60 1.0 2.60 1.0 2.60 1.0 2.60 1.0 2.0 1.0 2.0 1.0 2.0 2.0 1.0 2.0 2.0 1.0 2.0 2.0 2.0 2.0 2.0 2.0 2.0 2.0 2.0 2		18.40         7.96         7.96         18.40         18.58         18.58         18.52         8.04         18.22         8.04         18.22         8.04         18.22         8.14         18.22         8.14         17.91         8.45         8.45         8.45         17.46         8.45         9.45         17.46         17.46         17.46         17.46         17.46         17.46         16.87         9.48         9.48         9.48         9.48         9.48         9.48         9.48	5.22       18.40         7.96         7.96         7.96         5.14         18.58         5.14         18.58         7.98         7.98         7.98         7.98         7.98         7.98         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.04         8.14         4.73         8.17.91         8.45         4.52         8.45	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	7.63 $21.111$ $5.22$ $18.40$ $7.60$ $5.85$ $7.96$ $7.96$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $7.51$ $5.97$ $5.20$ $18.38$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.32$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $20.05$ $4.91$ $18.22$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $8.14$ $6.51$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $6.51$ $6.56$ $4.28$ $17.46$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.46$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.46$ $6.584$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $7.64$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $7.64$ $7.64$ $9.18$	23.70 $7.63$ $21.11$ $5.22$ $18.40$ $3.70$ $5.85$ $5.20$ $18.40$ $3.74$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $3.74$ $7.51$ $5.099$ $5.14$ $18.52$ $3.85$ $7.51$ $20.999$ $5.14$ $18.52$ $3.85$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.52$ $3.85$ $7.57$ $20.95$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $4.50$ $7.57$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.73$ $17.91$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $8.46$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $8.14$ $5.04$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.73$ $4.50$ $9.18$ $6.04$ $5.84$ $19.78$ $7.64$ $9.18$ $20.777$ $5.40$ $18.88$ $3.69$ $16.87$
2.866 2.83 2.60 2.10 2.10 2.10 2.10 2.10 2.10 2.10 2.1		7.96 18.38 7.98 18.32 8.04 18.22 8.14 18.09 8.14 17.91 8.45 17.91 8.45 8.45 8.45 8.45 17.91 8.66 8.66 8.66 8.66 17.18 9.18 9.18 9.18	7.96         5.20       18.38         5.14       18.38         5.14       18.32         5.04       18.32         8.04       8.04         8.04       8.04         18.32       8.04         4.91       18.22         4.91       18.22         4.91       18.22         4.91       18.09         4.52       17.91         8.14       8.45         4.52       17.91         8.45       8.45         4.52       8.45         8.45       8.45         8.66       8.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         8.66       9.45         7.00       17.46         9.69       9.48         9.40       9.48         9.40       9.48         9.40       9.48         9.40       9.48	5.85       7.96         21.08       5.20       18.38         5.88       7.96         5.88       7.98         5.88       7.98         5.80       5.14       18.32         5.97       5.14       18.32         50.99       5.14       18.32         50.95       5.04       18.22         6.11       8.14       8.14         20.65       4.91       18.22         6.31       4.73       17.91         6.31       4.73       17.91         6.56       4.52       8.45         6.87       8.45       8.45         6.87       8.45       8.45         6.87       4.52       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.200       17.18         19.88       5.69       9.18         7.64       5.69       16.87	5.85 $7.96$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $5.97$ $5.20$ $18.38$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $7.57$ $20.85$ $5.04$ $18.32$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.32$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.12$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.61$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $6.51$ $6.51$ $4.73$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $8.45$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $7.23$ $4.28$ $17.46$ $8.66$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $7.64$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $7.64$ $5.40$ $16.87$	3.70 $5.85$ $7.96$ $23.66$ $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.58$ $3.74$ $5.88$ $5.20$ $18.58$ $3.74$ $5.88$ $5.04$ $18.32$ $3.85$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $3.85$ $7.57$ $20.85$ $5.04$ $18.32$ $3.85$ $7.57$ $20.85$ $5.04$ $18.32$ $3.85$ $7.57$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $4.50$ $6.51$ $6.51$ $8.14$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.76$ $6.51$ $4.91$ $18.09$ $22.76$ $6.56$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $5.64$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $5.64$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.16$ $5.04$ $18.88$ $3.69$ $16.87$
2.86 2.77 2.77 2.70 2.60 1.1 2.60 1.1 1.1 2.5 1.1 2.5 1.1 2.5 1.1 2.5 1.1 2.5 1.1 5.5 2.1 1.5 5.5 1.5 5.5 1.5 5.5 1.5 5.5 5.5 5		18.38         7.98         18.32         18.32         8.04         18.22         8.04         18.22         8.14         18.22         8.14         17.91         17.91         8.45         17.91         8.66         17.91         8.66         17.18         9.68         9.18         9.18         9.18         9.18         9.18         9.18         9.18         9.18	<ul> <li>5.20 18.38</li> <li>5.14 18.32</li> <li>5.04 18.32</li> <li>5.04 18.32</li> <li>8.04</li> <li>8.04</li> <li>8.14</li> <li>4.91 18.22</li> <li>8.14</li> <li>4.73 17.91</li> <li>8.27</li> <li>4.73 17.91</li> <li>8.45</li> <li>4.52 17.70</li> <li>8.45</li> <li>4.52 17.70</li> <li>8.45</li> <li>8.45</li> <li>8.45</li> <li>4.52 17.70</li> <li>8.45</li> <li>8.45</li> <li>9.18</li> <li>3.69 16.87</li> </ul>	21.08 $5.20$ $18.58$ $5.88$ $7.98$ $5.86$ $7.98$ $5.97$ $8.04$ $5.97$ $8.04$ $5.97$ $8.04$ $5.97$ $8.04$ $5.97$ $8.14$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $8.14$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.31$ $4.73$ $17.91$ $6.56$ $4.91$ $18.09$ $6.576$ $4.73$ $17.91$ $6.56$ $4.52$ $8.45$ $6.87$ $4.52$ $8.45$ $6.87$ $4.52$ $8.45$ $6.87$ $4.52$ $8.45$ $6.87$ $4.52$ $8.45$ $6.87$ $4.52$ $8.45$ $19.73$ $4.52$ $8.45$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $19.72$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $7.64$ $7.69$ $9.18$	7.60 $21.08$ $5.20$ $18.58$ $5.88$ $5.20$ $18.58$ $7.98$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.52$ $7.57$ $20.85$ $5.04$ $18.52$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.51$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.91$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $7.23$ $7.26$ $8.66$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $7.64$ $7.69$ $16.87$	23.66 $7.60$ $21.08$ $5.20$ $18.38$ $3.74$ $5.88$ $5.20$ $18.38$ $3.74$ $5.97$ $5.97$ $7.58$ $23.55$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $23.56$ $7.57$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.85$ $4.91$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.50$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $4.50$ $6.11$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $4.50$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.72$ $17.70$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.76$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.76$ $6.04$ $5.84$ $19.72$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $6.04$ $7.64$ $7.69$ $16.87$
2.83 2.77 2.70 2.60 1.1 2.60 1.1 1.1 2.60		7.98 18.32 8.04 18.22 8.14 18.09 8.45 17.91 8.45 17.91 8.45 8.45 8.45 17.91 8.45 17.18 9.18 9.18 9.18 9.18	7.98       5.14     18.32       5.04     18.32       8.04     8.04       9.14     8.04       4.91     18.22       4.91     18.22       8.14     8.14       4.73     17.91       4.52     17.91       4.52     17.91       4.52     17.91       4.52     8.45       4.52     8.45       4.52     17.91       8.66     9.45       3.69     16.87       9.18     9.18       5.69     16.87	5.88       7.98         5.97       5.14       18.52         5.97       5.04       18.52         6.11       8.04       8.04         20.85       5.04       18.22         6.11       8.04       8.04         20.65       4.91       18.22         6.31       4.91       18.09         6.31       4.73       17.91         8.45       8.45         6.56       4.52       17.91         8.45       8.45         6.87       4.52       17.91         19.73       4.52       8.66         19.73       4.28       17.46         19.72       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.52       4.00       17.46         19.88       5.69       16.87	5.88 $7.98$ $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.52$ $5.97$ $5.97$ $8.04$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $8.04$ $8.14$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.31$ $6.31$ $8.14$ $8.14$ $6.71$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $6.51$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.46$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $7.23$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $7.64$ $7.69$ $16.87$	3.74 $5.88$ $7.98$ $23.55$ $7.51$ $5.88$ $792$ $23.55$ $751$ $2099$ $514$ $1832$ $3.85$ $737$ $2085$ $504$ $1822$ $4.04$ $737$ $2085$ $504$ $1822$ $4.04$ $717$ $2065$ $491$ $1822$ $404$ $717$ $2065$ $491$ $1822$ $404$ $717$ $2065$ $491$ $1822$ $404$ $631$ $631$ $814$ $2310$ $717$ $2065$ $491$ $1822$ $464$ $692$ $2040$ $473$ $1791$ $2236$ $661$ $2009$ $452$ $1746$ $2236$ $661$ $2009$ $452$ $1746$ $2189$ $625$ $1973$ $428$ $1746$ $2189$ $625$ $1973$ $428$ $866$ $2136$ $584$ $1932$ $400$ $1718$ $2136$ $584$ $1932$ $400$ $1718$ $2077$ $540$ $1888$ $369$ $1687$ $2077$ $540$ $1888$ $369$ $1687$
2.83 2.77 2.70 2.60 15 2.60		18.32 8.04 8.04 18.22 8.14 17.91 8.27 17.91 8.45 17.91 8.45 17.91 8.45 17.91 8.45 17.91 8.45 17.18 9.18 9.18 9.18	5.14     18.32       5.04     18.32       8.04     8.04       8.04     8.04       4.91     18.22       4.91     18.22       8.14     8.14       4.73     17.91       8.27     8.45       4.52     17.91       8.66     8.45       4.52     17.91       8.66     8.45       4.52     17.18       8.66     9.18       5.69     16.87       9.18     9.18	20.999       5.144       18.32         5.97       8.04       8.04         5.97       8.04       8.04         20.85       5.04       18.22         6.11       8.14       8.14         20.65       4.91       8.14         6.11       8.14       8.14         20.65       4.91       18.09         6.51       4.91       18.09         6.51       4.73       17.91         20.40       4.73       17.91         6.56       4.52       8.45         20.09       4.52       8.45         19.75       4.28       17.46         19.75       4.28       17.46         19.72       4.00       17.46         19.52       4.00       17.46         19.52       4.00       17.46         19.52       4.00       17.46         19.88       5.69       17.46	7.51 $20.99$ $5.14$ $18.32$ $7.57$ $5.97$ $8.04$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $6.11$ $8.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $6.51$ $6.51$ $8.14$ $8.14$ $6.51$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $6.56$ $4.91$ $4.73$ $17.91$ $6.51$ $6.56$ $4.52$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $8.45$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $8.45$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $7.23$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $7.64$ $7.64$ $9.18$	23.55 $7.51$ $20.99$ $5.14$ $18.32$ $3.85$ $7.57$ $5.07$ $8.04$ $3.85$ $7.37$ $5.97$ $8.04$ $23.36$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.50$ $6.31$ $6.31$ $8.14$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $8.45$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.46$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $5.40$ $18.88$ $5.69$ $16.87$
2.70 2.70 2.10 15 2.60 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15		8.04 18.22 8.14 18.09 17.91 17.91 8.45 8.45 17.18 17.18 9.18 9.18 9.10 9.10	8.04       5.04     18.22       8.14       4.91     18.22       8.14       18.27       8.14       17.91       8.27       4.52       17.91       8.45       4.52       17.91       8.45       4.52       17.91       8.45       4.52       17.91       8.45       17.91       8.45       9.45       17.91       8.45       9.45       9.45       9.45       9.45       9.46       9.45       9.45       9.46       9.46       9.46       9.48       9.48       9.48       9.48       9.49       9.40       9.46       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.418       9.40       9.40       9.40       9.40       9.40       9.	5.97       8.04         50.85       5.04       18.22         6.11       8.14         6.11       8.14         6.11       8.14         6.31       8.14         20.65       4.91       18.22         6.31       8.14       8.14         20.65       4.91       18.09         6.31       4.73       17.91         8.45       8.45       8.45         20.09       4.52       17.91         6.56       4.52       8.45         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.35       4.00       17.46	5.97       5.04       8.04         7.37       20.85       5.04       18.22         6.11       6.11       8.14         7.17       20.65       4.91       8.14         6.31       6.31       8.14       8.14         7.17       20.65       4.91       18.22         6.92       20.40       4.73       17.91         6.56       20.40       4.52       17.91         6.61       20.09       4.52       17.70         6.61       20.09       4.52       8.45         6.61       20.09       4.52       8.45         6.51       20.09       4.52       8.45         6.51       20.09       4.52       8.45         6.61       20.09       4.52       8.45         6.25       19.73       4.28       17.46         7.23       7.23       4.00       17.46         5.84       19.32       4.00       9.18         7.64       7.64       9.18       9.18         7.64       18.88       5.40       16.87	3.85 $5.97$ $5.97$ $8.04$ $23.36$ $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $6.11$ $6.11$ $8.14$ $4.04$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $8.14$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.22$ $4.30$ $6.31$ $6.31$ $8.14$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.46$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $20.77$ $5.40$ $18.88$ $3.69$ $9.18$
2.77 15 2.70 15 2.60 15		18.22 8.14 8.14 18.09 8.27 17.91 8.45 17.19 8.45 17.18 9.46 9.18 9.18 9.19 9.18	5.04     18.22       8.14       4.91     8.14       8.14       8.14       17.91       8.27       4.73       17.91       8.45       4.52       17.91       8.45       4.52       17.91       8.45       4.52       17.91       8.45       4.52       17.18       9.18       5.69       16.87       9.18       9.18       9.18       9.18       9.18       9.16       9.16       9.16	20.85       5.04       18.22         6.11       8.14         6.11       8.14         20.65       4.91       18.09         6.31       8.27       8.27         20.40       4.73       17.91         6.56       4.52       17.91         20.09       4.52       17.91         6.87       8.45       8.45         20.09       4.52       17.70         6.87       4.52       17.70         6.87       8.45       8.66         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.72       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.88       3.69       17.46	7.37 $20.85$ $5.04$ $18.22$ $6.11$ $6.11$ $8.14$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $6.31$ $6.31$ $8.27$ $8.27$ $6.32$ $6.31$ $4.73$ $17.91$ $6.61$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.91$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $5.84$ $19.73$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $7.64$ $18.88$ $5.69$ $16.87$	23.36 $7.37$ $20.85$ $5.04$ $18.22$ $4.04$ $6.11$ $6.11$ $8.14$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $8.14$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $4.30$ $6.31$ $6.31$ $8.27$ $8.27$ $4.50$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.20$ $8.66$ $5.94$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $20.77$ $5.40$ $18.88$ $3.69$ $9.18$
2.70 15 2.60 15		8.14 18.09 8.27 8.27 17.91 8.45 17.70 8.66 17.18 9.18 9.18 9.18 9.19	4.91       8.14         4.91       18.09         4.73       17.91         4.73       17.91         4.52       17.70         8.45       8.45         4.52       17.70         8.66       17.70         4.28       17.46         4.00       17.46         3.69       16.87         5.69       16.87	6.11     8.14       20.65     4.91     18.09       6.31     8.27       6.31     8.27       6.31     8.27       6.31     8.27       20.40     4.73     17.91       6.56     4.52     17.91       6.87     8.45       6.87     8.45       6.87     8.45       6.87     8.45       19.73     4.52       19.73     4.28       19.73     4.28       19.73     4.28       19.73     4.28       19.73     4.00       19.32     4.00       19.32     4.00       19.45     9.18       7.64     9.18       18.88     3.69       16.87     16.87	7.17     6.11     8.14       7.17     20.65     4.91     18.09       6.31     6.31     8.27       6.32     20.40     4.73     17.91       6.56     4.52     17.91     8.45       6.61     20.09     4.52     17.70       6.65     19.73     4.28     17.46       6.25     19.73     4.28     17.46       5.84     19.32     4.00     17.18       7.64     9.18     7.64     9.18       5.40     18.88     3.69     16.87	4.04 $6.11$ $6.11$ $8.14$ $23.10$ $7.17$ $20.65$ $4.91$ $18.09$ $4.30$ $6.31$ $6.31$ $8.27$ $4.50$ $6.92$ $50.40$ $4.73$ $17.91$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $5.04$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $20.77$ $5.40$ $18.88$ $3.69$
2.60 15 2.60 15		18.09 8.27 17.91 8.45 17.70 8.66 8.90 9.18 9.18 9.18 9.10 9.10	4.91     18.09       4.73     17.91       4.73     17.91       4.52     17.70       4.52     17.70       8.66       4.28     17.46       8.90       4.00     17.18       3.69     9.18       5.69     16.87	20.65       4.91       18.09         6.31       8.27         20.40       4.73       17.91         20.40       4.52       17.91         20.40       4.52       17.91         6.56       8.45       8.45         6.57       8.45       8.45         19.73       4.52       17.70         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48         19.48       5.69       16.87	7.17     20.65     4.91     18.09       6.31     6.31     8.27       6.32     20.40     4.73     17.91       6.56     4.57     17.91     8.45       6.61     20.09     4.52     17.70       6.65     19.73     4.28     17.46       6.25     19.73     4.28     17.46       5.84     19.32     4.00     17.18       7.64     7.64     9.18       5.40     18.88     3.69     16.87	23.10 $7.17$ $20.655$ $4.91$ $18.09$ $4.30$ $6.31$ $6.31$ $8.27$ $22.76$ $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $20.77$ $5.40$ $18.88$ $3.69$
2.60		8.27 17.91 8.45 8.66 17.46 8.90 9.18 16.87 9.19	8.27       4.73     17.91       4.52     17.91       8.45       4.52     17.70       8.66       4.28     17.46       8.66       4.00     17.46       9.18       3.69     9.18       7.69     16.87	6.31     8.27       20.40     4.73     17.91       6.56     8.45       6.87     8.45       20.09     4.52     17.70       8.66     8.66       19.73     4.28     17.46       19.73     4.28     17.46       19.73     4.28     17.46       19.73     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.46	6.92     6.31     8.27       6.92     20.40     4.73     17.91       6.56     6.56     8.45       6.61     20.09     4.52     17.70       6.67     20.09     4.52     17.70       6.87     6.87     8.66       6.25     19.73     4.28     17.46       7.23     4.28     17.46       7.23     4.00     17.46       7.64     19.32     4.00     17.18       7.64     19.32     4.00     17.18       7.40     18.88     3.69     16.87	4.30 $6.31$ $6.31$ $8.27$ $22.76$ $6.92$ $20.400$ $4.73$ $17.91$ $4.64$ $6.566$ $6.566$ $8.45$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $5.04$ $6.87$ $24.52$ $17.70$ $5.04$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.70$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.32$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $20.77$ $5.40$ $18.88$ $3.69$ $16.87$
2.60 15		17.91 8.45 17.70 8.66 17.46 8.90 17.18 9.18 16.87 16.87	4.73     17.91       4.52     17.91       4.52     17.70       8.45     8.45       4.28     17.46       4.28     17.46       8.90     8.90       4.00     17.18       9.18     9.18       5.69     16.87	20.40       4.73       17.91         6.56       8.45         6.56       8.45         20.09       4.52       17.70         6.87       8.66         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.28       17.46         19.73       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.32       4.00       17.46         19.52       4.00       17.46         19.52       4.00       17.46	6.92       20.40       4.73       17.91         6.56       8.45       8.45         6.61       20.09       4.52       17.70         6.61       20.09       4.52       17.70         6.87       6.87       8.66         6.25       19.73       4.28       17.46         7.23       4.28       17.46         7.23       4.00       17.18         7.64       19.32       4.00       17.18         5.40       18.88       3.69       16.87	22.76 $6.92$ $20.40$ $4.73$ $17.91$ $4.64$ $6.566$ $6.56$ $8.45$ $22.36$ $6.61$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $5.04$ $6.87$ $20.09$ $4.52$ $17.70$ $5.04$ $6.87$ $6.87$ $8.66$ $5.04$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.89$ $6.25$ $19.73$ $4.28$ $17.46$ $21.36$ $5.84$ $19.52$ $4.00$ $17.18$ $6.04$ $7.64$ $7.64$ $9.18$ $20.77$ $5.40$ $18.88$ $3.69$ $16.87$
		8.45 17.70 8.66 17.46 8.90 9.18 16.87 9.19	8.45         4.52       17.70         8.66         4.28       17.46         8.90         4.00       17.18         9.18         5.69       16.87	6.56     8.45       20.09     4.52     17.70       6.87     8.66       19.73     4.28     17.46       19.73     4.28     17.46       19.73     4.28     17.46       7.23     4.00     17.46       19.32     4.00     17.18       19.32     4.00     17.18       19.32     4.00     17.18       19.32     4.00     17.46       19.32     4.00     17.18       19.88     3.69     16.87	6.56     8.45       6.61     20.09     4.52     17.70       6.87     6.87     8.66       6.25     19.73     4.28     17.46       7.23     4.28     17.46       7.23     4.00     17.46       7.40     19.32     4.00     17.18       5.40     18.88     3.69     9.18	4.64       6.56       6.56       8.45         22.36       6.61       20.09       4.52       17.70         5.04       6.87       8.66       8.66         21.89       6.25       19.73       4.28       17.46         21.89       6.25       19.73       4.28       17.46         21.36       5.84       19.32       4.00       17.18         21.36       5.84       19.32       4.00       17.18         20.47       5.40       18.88       3.69       9.18
0 77		17.70 8.66 17.46 8.90 17.18 9.18 16.87 9.10	4.52       17.70         4.28       17.46         4.28       17.46         8.90       8.90         4.00       17.18         9.18       9.18         5.69       16.87	20.09       4.52       17.70         6.87       8.66         19.73       4.28       17.46         7.23       4.28       17.46         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48         19.32       4.00       17.48	6.61       20.09       4.52       17.70         6.87       6.87       8.66         6.25       19.73       4.28       17.46         7.23       4.28       17.46       8.90         5.84       19.32       4.00       17.18         7.64       9.18       9.18       9.18         5.40       18.88       3.69       16.87	22.36       6.61       20.09       4.52       17.70         5.04       6.87       8.66       8.66         21.89       6.25       19.73       4.28       17.46         21.36       5.84       19.73       4.28       17.46         21.36       5.84       19.32       4.00       17.18         6.04       7.64       9.18       9.18         20.77       5.40       18.88       3.69       16.87
2.49 15		8.66 17.46 8.90 17.18 9.18 16.87 9.10	4.28     17.46       4.28     17.46       8.90     8.90       4.00     17.18       9.18     9.18       5.69     16.87	6.87     8.66       19.73     4.28     17.46       7.23     4.28     17.46       19.32     4.00     17.18       7.64     9.18       18.88     3.69     16.87	6.87     8.66       6.25     19.73     4.28     17.46       7.23     4.28     17.46       5.84     19.32     4.00     17.18       7.64     9.18       5.40     18.88     3.69     16.87	5.04     6.87     6.87     8.66       21.89     6.25     19.73     4.28     17.46       5.51     7.23     4.00     17.18       21.36     5.84     19.32     4.00     17.18       6.04     7.64     9.18     9.18       20.77     5.40     18.88     3.69     16.87
0	0 0	17.46 8.90 17.18 9.18 16.87	4.28     17.46       8.90     8.90       4.00     17.18       9.18     9.18       3.69     16.87	19.73     4.28     17.46       7.23     4.28     17.46       19.32     4.00     17.18       7.64     9.18       18.88     5.69     16.87	6.25       19.73       4.28       17.46         7.23       7.28       8.90         5.84       19.32       4.00       17.18         7.64       9.18       9.18         5.40       18.88       3.69       16.87	21.89     6.25     19.73     4.28     17.46       5.51     7.23     4.28     17.46       21.36     5.84     19.32     4.00     17.18       21.36     5.84     19.32     4.00     17.18       20.77     5.40     18.88     3.69     16.87
2.35 15	CU	8.90 17.18 9.18 16.87	8.90       4.00       17.18       9.18       5.69	7.23     8.90       19.32     4.00     17.18       7.64     9.18       18.88     3.69     16.87	7.23         8.90           5.84         19.32         4.00         17.18           7.64         9.18         9.18           5.40         18.88         3.69         16.87	5.51     7.23     8.90       21.36     5.84     19.32     4.00     17.18       6.04     7.64     9.18       20.77     5.40     18.88     3.69     16.87
10	(N	17.18 9.18 16.87 9.10	4.00 17.18 9.18 3.69 16.87	19.32         4.00         17.18           7.64         9.18           18.88         3.69         16.87	5.84         19.32         4.00         17.18           7.64         9.18           5.40         18.88         3.69         16.87	21.36     5.84     19.32     4.00     17.18       6.04     7.64     9.18       20.77     5.40     18.88     3.69     16.87
2.20 14		9.18 16.87 9.70	3.69 16.87	7.64 9.18 18.88 3.69 16.87	7.64         9.18           5.40         18.88         3.69         16.87	6.04         7.64         9.18           20.77         5.40         18.88         3.69         16.87
10		16.87	3.69 16.87	18.88 3.69 16.87	5.40 18.88 3.69 16.87	20.77 5.40 18.88 3.69 16.87
2.03 14		01.0				
10	sharri ang siyika dasa dasil ana Uriya ya Dasimi kata ang siya	1.47	Y.4Y	8.08	8.08	6.63 8.08 9.49
1.84 14	-	16.54.	3.36 16.54.	18.38 3.36 16.54.	4.90 18.38 3.36 16.54.	20.13 4.90 18.38 3.36 16.54.
10		9.82	9.82	8.58	8.58	7.27 8.58 9.82
1.65 14		16.17	2.99 16.17	17.86 2.99 16.17	4.38 17.86 2.99 16.17	19.44 4.58 17.86 2.99 16.17
11		10.19	10.19	9.10	9.10	7.96 9.10 10.19
1.44 14		15.79	2.61 15.79	17.30 2.61 15.79	3.82 17.30 2.61 15.79	18.70 3.82 17.30 2.61 15.79
<u>-</u> ,		10.57	10.57	9.66 10.57	9.66 10.57	8.70 9.66 10.57
1.21 13	-	15.39	2.21 15.39	16.70 2.21 15.39	3.22 16.70 2.21 15.39	17.93 3.22 16.70 2.21 15.39
<del>7</del> - 7-		10.97	10.97	10.26 10.97	10.97	9.47 10.97
0.98 13		14.97	1.79 14.97	16.09 1.79 14.97	2.61 16.09 1.79 14.97	17.12 2.61 16.09 1.79 14.97
 -		11.39	11.39	10.87	10.87	10.28 10.87 11.39
0.74 15		14.53	1.35 14.53	15.45 1.35 14.53	1.97 15.45 1.35 14.53	16.29 1.97 15.45 1.35 14.53
11		11.83	11.83	11.51 11.83	11.51 11.83	11.11 11.63
0.50 13		14.09	0.91 14.09	14.81 0.91 14.09 12.15 1.2 1.2 1.2 1.2 1.2 1.2 1.2	1.33 14.81 0.91 14.09 12.15 12.15	15.44 1.33 14.81 0.91 14.09 11.96 12.12 12.15
0.25 12	C	12.51	12.21 0.46	12.21 J. 26 J. 26	12.21 0.057 12.51 0.067 12.54	14.57 0.67 14.15 0.46 12.15 14.15
12		12.72	V•40 12.04 12.72	12.81 Vieto 12.72	12.81 12.81 12.72	12.83 12.81 12.81 12.81 12.72
0.00 12	0	13.18	0.00 13.18	13.48 0.00 13.18 12.48 1.0.00 13.18	0.00 13.48 0.00 13.18 12.48	13.70 0.00 13.48 0.00 13.18 13.70 13.48 0.00 13.18

a (a)

21.

Tabell 6.2.



Temperatur <sup>3</sup>C





Ex. 6.1. Visa, att ekvationen för en termoisoplet kan skrivas

$$t = \frac{T}{\lambda}z - t_{o} + \frac{T}{2\pi} \operatorname{arc} \cos \frac{\vec{w}_{i} - \vec{r}_{m,o} - cz}{\Delta \vec{r}_{a,o} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}}$$
(a)

där  $\dot{\mathcal{P}}_{\underline{i}}$  är den konstanta temperatur, som termoisopleten motsvarar.

Lösning: Under beaktande av begynnelsevillkoren, uttryckta i t, och med  $\lambda$  infört, kan ekvationen (3.1) skrivas

$$\hat{\mathcal{N}} = \hat{\mathcal{N}}_{m,0}^{h} + c z + \Delta \hat{\mathcal{N}}_{a,0}^{h} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z} \cos 2\pi \left(\frac{t+t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$
(b)

Termoisopleten definieras av att  $\underline{\beta}^{\mathcal{P}}$  är konstant =  $\underline{\beta}^{\mathcal{P}}_{\underline{i}}$ . Genom insättning av detta värde och enkla omformningar erhålles

$$\frac{\gamma_{1}^{m} - \gamma_{m,0}^{m} - c z}{\alpha_{1}^{m}a, o} = \frac{2\pi}{\lambda} z = \cos 2\pi i \left(\frac{t + t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$
(c)

eller om cosinusfunktionens invers införes

$$2 \pi \left(\frac{t+t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) = \arccos \cos \frac{\lambda^{\gamma_{1}} - \lambda^{\gamma_{1}}}{\Delta \lambda^{\gamma_{1}}} - \frac{2\pi}{\lambda} z \qquad (d)$$

varav slutligen (obs.  $v = \frac{\lambda}{T}!$ )

$$t = \frac{z}{v} - t_{o} + \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\sqrt[n]{1} - \sqrt[n]{m,o} - c z}{\sum_{a,o} e^{\frac{\pi}{\lambda}} - \frac{2\pi}{\lambda} z}$$
(e)

Ex. 6.2. Undersök, om någon av de s.k. <u>termoisopleterna</u> har formen av en rät linje.

Lösning: Enl. ex. 6.1. erhålles de olika termoisopleterna ur uttrycket

$$t = \frac{z}{v} - t_{o} + \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\mu^{T} - \mu^{T}}{\lambda r_{a,o}^{2}} - \frac{c z}{\lambda}$$
(a)

för olika värden på  $\mu_1^{(i)} = \text{konst.}$ 

Av uttrycket framgår, att <u>t</u> blir en lineär funktion av <u>z</u>, om det inträffar, att det trigonometriska uttrycket blir konst. för något värde

på  $\frac{\partial}{\partial i}$ . Detta är tydligen endast möjligt, om  $\frac{\partial}{\partial i} = \frac{\partial}{m,0}$  och c z kan försummas.

Nämnaren

$$\Delta h_{a,0}^{m} e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}$$
 (b)

är tydligen  $\neq 0$  och en funktion av djupet, men om <u>c</u>z försummas och  $\hat{\mathcal{N}}_{\underline{i}} = \hat{\mathcal{N}}_{\underline{m},0}$ , så blir täljaren = 0 och

$$\operatorname{arc} \cos = \frac{2 n + 1}{2} \pi \qquad (c)$$

t är då en lineär funktion av z eller

$$t = \frac{z}{v} + \left(\frac{2n+1}{4} - \frac{t}{T}\right) T$$
 (d)

vilket är ekv. för en serie räta parallella linjer med vinkelkoefficienten = inverterade värdet av vågens hastighet och ordinatan i origo t<sub>1</sub>

$$t_1 = \left(\frac{2 n + 1}{4} - \frac{t_0}{T}\right) T$$

Två konsekutiva parallella linjer ligger på avståndet

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2}$$

dvs. halva perioden.