

BIBLIOTEKET

SVERIGES LANTBRUKSUNIVERSITET
Institutionen för markvetenskap
Avd för hydroteknik
750 07 UPPSALA 7

BIBLIOTEKET

KOMPENDIUM I AGRONOMISK HYDROTEKNIK

ELEMENTÄR HYDROMEKANIK

SIGVARD ANDERSSON

1952

Kungl.
Lantbruks högskolan, Uppsala

STENCILTRYCK (NR) 19

AGRONOMISK
INSTITUTIONEN FÖR LANTBRUKETS HYDROTEKNIK
UPPSALA 1952

Institutionen för lantbrukets hydroteknik delger bl. a. i sin tidskrift *Grundförbättring* resultat från institutionens olika verksamhetsgrenar. Allt material blir emellertid inte föremål för tryckning. Undersökningsresultat av preliminär natur och annat material som av olika anledningar ej ges ut i tryck delges ofta i stencilerad form. Institutionen har ansett det lämpligt att redovisa dylikt material i form av en i fri följd utarbetad serie, benämnd stenciltryck. Serien finns endast tillgänglig på institutionen och kan i mån av tillgång erhållas därifrån.

Adress: Institutionen för lantbrukets hydroteknik, *Uppsala 7*

Stenciltryck

Nr	År	Författare och titel
1—12		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson. Redogörelse för resultaten av täckdikningsförsöken åren 1951—1962.
13—15		Aug. Håkansson, Gösta Berglund, Janne Eriksson, Waldemar Johansson. Resultat av täckdikningsförsök och bevattningsförsök åren 1963—1965.
16	1940	Gunnar Hallgren. Dalgångarna Fyrisån-Östersjön; några hydrotekniska studier.
17	1942	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan grundvattenståndet och vattennivån i en recipient.
18	1943	Gunnar Hallgren. Om sambandet mellan nederbörd och skördeavkastning.
19	1952	Sigvard Andersson. Kompedium i agronomisk hydroteknik. Elementär hydromekanik.

TEN AGRONOMISKA HYDROTEKNIKENS OMFATTNING OCH INDELNING.

Agronomisk hydroteknik kan definieras som läran om åkermarkens vattenhushållning och metoderna för dess reglering till jordbrukets gagn. Den agronomiska hydrotekniken har i vidaste mening till uppgift att bidra till utforskandet av den miljö, vari våra kulturväxternas rötter leva, och att utifrån den härigenom vunna kunskapen reglera densamma. Härav följer att ämnet behöver utnyttja och göra tillämpligt erfarenheter från många av naturvetenskapens domäner. Dess egen grundläggande forskning tillhör framför allt ämnena markfysik och hydrologi. Den agronomiska hydrotekniken har härvid i kanske högre grad än andra närliggande delar av jordbruksvetenskapen att beakta alvens och grundens egenskaper.

En djupare förståelse av markens och växternas vattenhushållning kan endast erhållas i den mån som resultaten utnyttjas från de områden av växtfysiologien och ekologien, vilka syssla med kulturväxternas rotsystem, vattenupptagande och vattenavgivande. Vid de tekniska ingreppen är det viktigt, att de inom dessa områden framkomna resultaten beaktas.

De allmännaste och viktigaste satserna ur hydromekniken bilda underlaget för den tekniska delen. I vissa sammanhang äro dessa även av grundläggande betydelse vid studiet av vattnets rörelse och fastläggning i marken. På detta ämne och de ovan nämnda har den tillämpade agronomiska hydrotekniken att grunda sina ingrepp och regleringar.

Såsom en relativt fristående men icke därför mindre betydelsefull del står det socialt-rättsliga frågekomplex, som sammanhänger med ämnet och som finnes sammanfattat i den Svenska vattenlagen. I detta sammanhang spela begreppen kostnad och båtnad en betydelsefull roll, då de statliga stödåtgärderna utformats med hänsyn till förhållandet mellan den beräknade nyttan av och kostnaden vid företagets genomförande. När flera intressenter ingå i företaget fördelas kostnaden efter vunnen båtnad.

Det är här ej nödvändigt att stanna vid den närmare definitionen på och innebörden av ovan angivna vetenskaper. Såsom samlande mål och gemensam riktpunkt för undervisning och forskning inom ämnet agronomisk hydroteknik bör stå en oavslutlig strävan efter att vidga vår kunskap om åkermarken såsom vattenmagasin och livsmiljö för kulturväxternas rötter. Endast i den mån, som denna vår kunskap växer, ökas också våra möjligheter till förnuftiga och planmässiga ingripanden i markens och växternas vattenhushållning.

För det ovan i korthet definierade och betydelsefulla området av jordbruks-

vetenskapen infördes i mitten av 1930-talet av ämnesrådets förste företrädare vid Lantbrukshögskolan, professor H. Flodkvist, namnet agronomisk hydroteknik. Härvid frångicks den tidigare från tyskan stammade termen kulturteknik. Genom den nya namngivningen undreks den oklarhet och mångtydighet, som den gamla benämningen innebar, samtidigt som ämnets omfattning och centrala innehåll preciserades.

Denna presentation av ämnet agronomisk hydroteknik visar, att detsamma lämpligen indelas i tvenne huvudområden: A. grundläggande eller naturvetenskaplig del och B. tillämpad eller praktisk del. Dessa huvudområden kunna sedan bli föremål för en mer eller mindre långt gående uppdelning i delområden. Ämnets grundläggande del uppdelas lämpligen i I elementär hydromekanik och II hydrologi; markprofilens vattenhushållning. Omfattningen av och innehållet i dessa båda discipliner framgår av den i respektive delar givna innehållsförteckningen. Den vidare uppdelningen och systematiseringen av ämnets tillämpade del genomföres i annat sammanhang.

SVERIGES LANTBRUKSUNIVERSITET
Institutionen för markvetenskap
Avd för hydroteknik
750 07 UPPSALA 7 BIBLIOTEKET

Del I.

ELEMENTÄR HYDROMEKANIK.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

	Sida
Den agronomiska hydroteknikens omfattning och indelning	I
 <u>Del I. Elementär hydromekanik.</u>	
 <u>1. Inledning.</u>	
11. Några definitioner	1
12. Vätskors mekaniska egenskaper	1
121. Den ideala vätskan	3
13. Dimensioner och enheter	3
131. Accelerationslagen	4
132. Måttenheter, mätetal, dimensionsformler	4
 <u>2. Hydrostatik.</u>	
21. Begreppet vätsketryck	10
211. Tryckets oberoende av riktningen	11
212. Nivåytor	12
22. Eulers allmänna jämviktsekvationer; hydrostatikens funda- mentalekvation	13
221. Några tillämpningar på hydrostatikens fundamen- tekvation	15
2211. En vätska under tyngdkraftens inverkan	15
2212. Vätskeytan i en tank, som rör sig med lik- formigt accelererad rörelse	15
2213. Vätska i ett kärl, som roterar	17
23. Hydrostatiskt tryck mot plana ytor	19
231. Tryckkraftens storlek	19
232. Tryckcentrum och dess läge	21
24. Hydrostatiskt tryck mot buktiga ytor	24
 <u>3. Hydrodynamik.</u>	
31. Grunddragen av vätskerörelsens kinematik	29
311. Bankurva, väg, strömlinje	29
312. Stationära strömningar, strömrör, referenssystem ...	30
313. Lagranges respektive Eulers metod att beskriva en vätskas rörelse	31
314. Hastighet och acceleration	32

	Sida
315. Kontinuitetsekvationen	33
316. Förenklat betraktelsesätt, medelvärde, flöde	35
3161. Kontinuitetsekvationen gällande för medelhas- tigheten v_m	37
32. Några för den ideella vätskan gällande lagar	39
321. Rörelseekvationerna för en ideell vätska hänförda till naturliga koordinater	40
322. Bernoullis ekvation	42
3221. De enskilda termernas betydelse i Bernoullis ekvation	43
3222. Bernoullis ekvation längs normalen mot ström- linjen	48
3223. Toricellis lag	53
3224. Om trycket i en strömmande vätska	55
33. Inre friktion eller viskositet	57
331. Definition av begreppet viskositet, enheter	58
34. Dimensionsanalys och dynamisk likformighet	61
341. Några enkla exempel på dimensionsanalysens använd- barhet	61
342. Buckingham's π -teorem	63
343. Dynamisk likformighet	68
3431. Reynolds tal	70
3432. Froudes tal	71
35. Utströmning	73
351. Utströmningkoefficient	74
352. Utströmningens mängd vid konstant tryckhöjd	77
3521. Fri utströmning genom vertikal, rektangulär öppning	78
3522. Täckt utströmning genom vertikal öppning	78
3523. Skarpkantat fritt överfall	80
3524. Överfallsdammar, skibordsdammar	82
3525. Brett överfall	82
353. Utströmningens mängd vid variabel tryckhöjd	84
36. Strömning	87
361. Några termer och definitioner	87
362. Bernoullis ekvation med förlustterm; begreppet fall..	88
37. Olika strömningssformer i rör: laminär och turbulent ström- ning	89
38. Motståndstal och rörfriktionskoefficient	93
381. Rörfriktionskoefficientens storlek vid laminär ström- ning	95

	Sida
382. Rörfriktionskoefficienten vid turbulent strömning	99
3821. Hastighetsfördelningen vid turbulent strömning .	100
3822. Formler för rörfriktionskoefficientens storlek vid turbulent strömning	101
3823. Tegel- och betongrörsledningar	106
39. Särskilda motstånd i slutna ledningar	109
391. Inloppsförluster vid brotrummor	112
40. Strömning i öppna ledningar	113
401. Likformig och olikformig strömning i öppna ledningar ..	114
41. Förlusthöjden vid likformig strömning i öppna ledningar	115
411. Bernoullis ekvation för stationär likformig strömning i öppna ledningar	115
412. Formler för förlusthöjden vid likformig strömning i öpp- na ledningar	116
42. Om hastighetsfördelningen i öppna ledningar	125
43. Olikformig strömning i öppna ledningar	129
431. Härledning av differentialekvationen för olikformig strömning i öppna ledningar	129
432. Närmare diskussion av differentialekvationen för olik- formig strömning. Strömmande och stråkande vattenrö- relse	132
44. Om begreppet specifik energi	133
441. Specifika energien vid en vätskas strömning i en öppen ledning med rektangulärt tvärsnitt	134
45. Vattensprång	139
46. Några kommentarer till formeln för avrinningen över ett brett överfall. Bestämmande sektion	145
47. Några praktiska metoder och formler för beräkning av olikfor- mig strömning	147
471. Olikformig strömning i vattendrag med varierande tvär- profil	147
472. Olikformig strömning i kanal med regelbunden tvärprofil	149
4721. Dämning och dänningskurvor	149
4722. Sänkning och sänkningskurvor	158
<u>Litteraturanvisningar</u>	162

Bilaga: Tabeller med kommentarer och exempel till Kompendium i ele-
mentär hydromekanik.

1. Inledning.

11. Några definitioner.

Hydromekanik är läran om vätskors jämvikt och rörelse. Den moderna hydromekaniken är i hög grad baserad på en kombination av experiment och matematisk analys. En allmän strävan är att med hjälp av dimensionsanalys (se längre fram!), dynamisk likformighet o.s.v. försöka ge utförda experiment ökad bärvidd m.a. ord att slå en brygga mellan den experimentellt och praktiskt inställda hydrauliken och den klassiska hydrodynamiken, som utgör en gren av den matematiska fysiken.

Hydromekaniken indelas i hydrostatik och hydrodynamik. Hydrostatik är läran om vätskors jämvikt. Det är en exakt vetenskap, vars lagar kunna härledas rent matematiskt utan anknytning till omfattande experiment. Hydrodynamik är läran om vätskors rörelse. Denna kan i sin tur indelas i kinematik eller geometrisk rörelselära samt kinetik. I kinematiken undersökes och beskrives rörelsens geometri, d.v.s. huru kroppar i detta fall vätskor röra sig. I kinetiken studeras rörelsens orsaker och omvänt den av dem betingade rörelsen. Från den allmänna mekaniken erinras om att härvid de hypotetiska begreppen kraft, tröghet och materiell punkt äro av fundamental betydelse. Hydrostatiken betraktas ofta som en underavdelning av kinetiken. I hydrostatiken äro de accelererande krafternas summa noll.

Våra studier i hydromekanik avse att 1. ge allmän träning i deduktivt-matematiskt tänkande och metodik, 2. bilda underlaget för de dimensioneringar och beräkningar, som behöva göras i den praktiska delen och 3. ge vissa grundbegrepp behövliga för studiet av hydrologien.

12. Vätskors mekaniska egenskaper.

Hydromekaniken har fått sitt namn av det grekiska ordet för vatten (hydr). Hydromekaniken har också sin största användning på vatten och ur agronomisk-hydroteknisk synpunkt är det den enda vätska som intresserar oss. Vi komma likväl att försöka göra våra härledning och diskussioner med hänsyn till ett mera allmänt vätskebegrepp, då detta tillvägagångssätt ökar användbarheten av de härledda satserna samt vidgar förståelsen för den strävan till generalitet, som utmärker vetenskapen i allmänhet.

En vätska kan karakteriseras ur i huvudsak tvenne olika synpunkter:
1. molekylarteoretiskt, d.v.s. genom att ange vätskans molekylbyggnad, mole-

kylernas rymdkonfiguration, uppträdande, inter- och intramolekylära krafter etc. och 2. utifrån ett studium av vätskans mekaniska egenskaper såsom seghet eller viskositet, sammantryckbarhet, elasticitet m.m. Den första synpunkten skall närmare belysas i inledningen till hydrologien, då vattnets förhållande i jorden i hög grad måste bestämmas av dess molekylära byggnad. För hydromekniken är den senare synpunkten den viktigare.

En vätska kan definieras såsom en materiell, kontinuerligt sammanhängande kropp, som — i motsats till en fast kropp — är kännetecknad av delarnas lättrörlighet i förhållande till varandra. Detta innebär, att en vätska bjuder endast ringa motstånd vid formförändringar. En vätska saknar bestämd form men har i regel bestämd volym. Formen rättar sig efter begränsningen av det kärl, vari vätskan befinner sig.

I stort sett överensstämmande med ovan givna allmänna definition av begreppet vätska är denna: en vätska är en kropp, som i statisk jämvikt icke kan upptaga någon skjuvspänning. I en vätska utjämnas alla tangentialkrafter, likgiltigt huru små de än äro, förutsatt att vätskan tillåtes komma i jämvikt. Denna egenskap särskiljer de två tillståndsformerna fast och flytande.

Figur 1.01 visar en schematisk bild av tvenne metallstavar förenade medelst

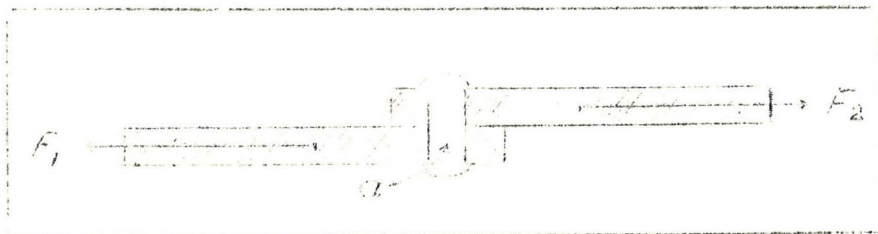


Fig. 1.01

ett nitförband a. Krafterna F_1 och F_2 sträva att föra stavarna isär medelst en parallellförskjutning. Vid jämvikt balanseras

den i niten härigenom uppväckta skärspänningen av i niten existerande molekylära krafter, kohesionskrafter. Tänka vi oss niten ersatt med en vätska, så skulle även en infinitesimal kraft förorsaka en kontinuerlig rörelse.

I vila kunna således vätskor icke upptaga några skjuvspänningar (givetvis ej heller dragspänningar). När olika vätskeskikt befinner sig i relativ rörelse, har det emellertid visat sig, att tangentiella krafter uppträda i gränssytorna. Dessa förorsaka energiförluster vid vätskornas strömning. I analogi med den vid fasta kroppars rörelse uppträdande friktionen kallas denna företeelse vätskors inre friktion eller viskositet. Den kommer att mera ingående behandlas längre fram. En vätska, vars inre friktion är så stor, att den ej kan försummas, kallas seg eller viskös.

Ofta betraktas gaserna såsom en underavdelning av vätskorna. Man talar då om vätskor i egentlig mening och om gaser. De egentliga vätskorna skilja sig från gaserna bl.a. däri, att de förra ha bestämd volym, de senare sakna bestämd volym, en vätska kan ha en fri yta, t.ex. ytan av en sjö, gaserna däremot fylla hela det rum, i vilket de befinner sig o.s.v. I fortsättningen ha vi ingen anled-

ning att närmare sysselsätta oss med gaser, men det kan vara intressant att här påpeka, att samma lagar gälla för gasers som för vätskors rörelse upp till hastigheter på ca 170 m/s (≈ 600 km/h).

Medan gaserna äro i hög grad sammantryckbara, kompressibla, kunna vätskorna vid de flesta praktiska problem betraktas såsom osammantryckbara. Så är t.ex. för vatten av 0°C volymminskningen för varje kp/cm^2 tryckökning 0.05 % av den ursprungliga volymen. Vid stigande temperatur blir sammantryckbarheten ännu mindre. Borttages en tryckökning på en vätska återtar den fullständigt sin ursprungliga volym, d.v.s. dess elasticitet är fullkomlig. Som en följd av dessa egenskaper kan en vätskas specifika vikt betraktas såsom konstant.

Matematiskt definieras sambandet mellan en tryckökning och motsvarande volymminskning hos en vätska av ekvationen

$$dp = -k \frac{dV}{V} \quad (1.01)$$

där dp = tryckökning (i kp/cm^2)

dV = volymminskning (l, m^3)

V = total ursprunglig volym

k = sammantryckbarhetsmodul

För vatten är $k = 21000 \text{ kp/cm}^2$.

121. Den ideala vätskan.

Inom den allmänna mekaniken spelar begreppet stel kropp en viktig roll. Denna idealisering av verkliga kroppar möjliggör i många fall en större enkelhet i den matematiska behandlingen av rörelse- och jämviktsproblem, Bortse vi från de verkliga vätskornas inre friktion och sammantryckbarhet erhålla vi inom hydromekaniken ett motsvarande begrepp den ideella vätskan. Många av hydrodynamikens klassiska matematiska undersökningar gjordes på denna tänkta ideella vätska.

Trots att det i många fall visat sig svårt att bringa de erhållna ekvationerna till överensstämmelse med experimentella resultat, ha likväl värdefulla allmänna resultat erhållits. I många fall kan en matematisk analys vara en ekonomisk och värdefull metod för upptäckandet och förståelsen av "certain trends", vilka icke så lätt framträda vid ett rent empiriskt studium.

13. Dimensioner och enheter.

För att i möjligaste mån undanröja den oklarhet, som uppträdat av olika enhetssystem förorsakar, skall här i korthet det i detta kompendium använda enhetssystemet diskuteras. Någon utförligare behandling är ej möjlig att ge, utan

den intresserade hänvisas för ett mera ingående studium till gängse läro- och uppslagsböcker (se även längre fram!). Vid lösandet av problem är det alltid bäst att konsekvent räkna under användandet av ett system och att omvandla givna data till detta, om så behövs. Önskas svaret givet i en mera speciell form, kan en reduktion sedan företagas. Vid användandet av engelsk och amerikansk litteratur med där ofta uppträdande från våra avvikande enheter eller sorter, är säkerhet i omräkningar från den ena enheten till den andra nödvändig.

131. Accelerationslagen.

Grundläggande för mekanikens enheter är Newtons 2. lag, accelerationslagen. Denna lyder: accelerationen är proportionell mot den verkande kraften och riktad längs den rätta linje i vilken kraften verkar.

Denna lag har närmare studerats i fysiken. Vi repetera här endast för sammanhangets skull dess innehåll. Befinner sig en materiell punkt i vila, eller rör den sig i en rätlinjig bana med likformig hastighet, kunna vi därav draga den slutsatsen, att antingen verkar på densamma inga krafter eller också hålla de varandra i jämvikt. Är rörelsen föränderlig, vare sig förändringen avser hastighetens storlek eller riktning, måste en kraft eller ett system av krafter, vilka senare kunna ersättas med en resulterande kraft, verka på punkten ifråga. Verkar kraften i tangentens riktning, får man en tangentialacceleration, d.v.s. hastigheten i banan kommer att öka eller minska; verkar däremot kraften i normalens riktning, ger den upphov till en normalacceleration, d.v.s. en förändring i punktens rörelseriktning.

Enligt superpositionslagen är dessutom kraftens verkan oberoende av om andra krafter samtidigt angripa punkten samt av den materiella punktens förutvarande rörelsetillstånd.

Matematiskt kan lagen formuleras

$$F = c \cdot m \cdot a$$

där F = den verkande kraften (vektorstorhet)

c = en konstant, vars numeriska värde beror av de valda enheterna

m = en skalär storhet, kroppens massa

a = accelerationen (vektorstorhet).

132. Måttenheter, mätetal, dimensionsformler.

Fysikaliska storheter angivas kvantitativt genom att deras storlek i förhållande till en bestämd storhet av samma slag bestämmes. Den senare storheten kallas då måttenhet eller kort och gott enhet. Det antal gånger den valda enheten innehålls i den uppmätta storheten kallas storhetens mätetal, således

$$\text{Mätetal} = \frac{\text{Storhet}}{\text{Enhet}}$$

Storheten kan alltså sägas vara produkten av mätetal och enhet.

En ekvation, som definierar den valda enheten med hjälp av andra enklare enheter kallas enhetsekvation. T.ex. (h = timme)

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (1.02)$$

En ekvation, som endast anger ett samband mellan fysikaliska storheter, kallas storhetsekvation. T.ex.

$$v = \frac{l}{t} \quad (1.03)$$

I denna ekvation är ingenting utsagt om de enheter, i vilka v, l och t skola mätas.

Divideras storhetsekvationens båda membra med enhetsekvationens motsvarande membra, erhålles en storhets-enhetsekvation. T.ex.

$$\frac{v}{\text{km/h}} = \frac{l/\text{km}}{t/\text{h}} \quad (1.04)$$

Med hjälp av dessa ekvationer kunna omvandlingar lätt göras. Antag t.ex. att l mätes i km och t i timmar (h) men att v önskas angiven i cm/s, huru lyder då storhets-enhetsekvationen?

Enhetsekvationen blir

$$1 \text{ km/h} = \frac{100\,000 \text{ cm}}{3600 \text{ s}} = \frac{10^3}{36} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

eller

$$\text{cm/s} = \frac{36}{10^3} \cdot \text{km/h}$$

Följaktligen

$$\frac{v}{\text{cm/s}} = \frac{10^3}{36} \frac{l/\text{km}}{t/\text{h}}$$

Kvalitativt anger man en storhet genom dess dimension i form av en dimensionsformel, varvid man brukar utgå från vissa mer eller mindre godtyckligt valda fundamentaldimensioner, t.ex. längd, tid och kraft eller längd, tid och massa. En enhets dimension är produkten av fundamentalenheternas potenser. Härvid betecknas massan med M, längden med L och tiden med T.

I detta arbete definieras grundenheterna eller fundamentalenheterna (dimensionerna) sålunda:

Enheten för längd, 1 m längden vid 0°C av den internationella prototypen för metern.

Enheten för massa, 1 kilogram massan av den internationella prototypen för kilogrammet.

Enheten för tid, 1 sekund, $\frac{1}{84600}$ av ett medelsoldygn.

Med hjälp av dessa grundenheter och Newtons lag definieras enheten för kraft:

Enheten för kraft, 1 kilogramkraft (kgf) eller 1 kilopond (kp)...
... den kraft, som åt massan 1 kg ger en acceleration av
 $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$.

Kraftekvationen får formen

$$F = \frac{1}{g_0} \cdot m \cdot a \quad (1.05)$$

Vid praktiska beräkningar kan g_0 i allmänhet avrundas till värdet 9.81.

Enligt svensk lag är massa = vikt. En kropps vikt får ej förblandas med dess tyngd, som är ett mått på den kraft, varmed jorden attraherar kroppen. På en ort, där tyngdkraftens acceleration är g blir tyngden G av en kropp med massan m tydligen enligt (1.05).

$$G = \frac{1}{g_0} \cdot m \cdot g = \frac{g}{g_0} \cdot m$$

I de flesta fall, då noggrannheten ej behöver vara större än några promille, kan faktorn $\frac{g}{g_0}$ sättas = 1. Vi kunna då säga, att en kropp, vars massa är m kg har tyngden m kp.

Bland övriga system erinras om c-g-s-systemet, där kraftekvationen har den enkla formen $F = m \cdot a$. Vidare erinras om Giorgisystemet, där kraftenheten är den kraft, som åt massan 1 kg ger en acceleration av 1 m/s^2 . Kraftekvationen har även här formen $F = m \cdot a$. Kraftenheten kallas 1 Newton och betecknas med n. Av ovanstående erhålles lätt

$$1n = \frac{1}{9.81} \text{ kp}$$

och alltså $1n \approx 0.1$ kp eller $1n \approx$ tyngden av 1 hg.

Med hjälp av dessa grundenheter och definitionsekvationer eller fysikaliska samband härledas sedan övriga enheter.

Ex. 1.01. Vilken dimension har accelerationen?

Lösning: Accelerationen definieras av ekvationen

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Dimensionsekvationen för accelerationen blir då (kantig parentes markerar dimension)

$$[\text{Acceleration}] = \left[\frac{dv}{dt} \right] = \frac{\frac{L}{T}}{T} = L \cdot T^{-2}$$

Ex. 1.02. Härled dimensionsuttrycket för energi!

Lösning: Energi är allt, som kan omvandlas till arbete. Arbete W definieras av ekvationen

$$W = \vec{F} \cdot \vec{l} \quad (\vec{F} \text{ och } \vec{l} \text{ vektorer})$$

Härav erhålles

$$[\text{Arbete}] = [\vec{F} \cdot \vec{l}] = M \cdot \frac{L}{T^2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

Tabell 1 innehåller en sammanställning av några viktigare mekaniska storheters beteckningar och dimensionsformler.

Tabell 1. Några viktigare mekaniska storheters beteckningar och dimensionsformler.

Storhet	Beteckning	Dimensionsformel	Vanligen använd enhet
<u>Geometriska</u>			
Längd	L, \bar{l}^x)	L	Meter, m
Yta, area	A	L ²	Kvadratmeter, m ²
Volym	V	L ³	Kubikmeter, m ³
Höjd, förlusthöjd	H, h, h _f	L	Meter, m
<u>Kinematiska</u>			
Tid	t	T	Sekund, s; timma, h
Varv pr minut	n	T ⁻¹	Varv pr minut, r.p.m.
Hastighet	v	L·T ⁻¹	Meter pr sek. m/s
Vinkelhastighet	ω	T ⁻¹	Radianer pr sekund
Acceleration	a	L·T ⁻²	Meter pr sekund ² , m/s ²
Tyngdkr. acc.	g	L·T ⁻²	" " " , (9.81 m/s ²)
Vinkelacc.	α	T ⁻²	Radianer pr sekund ²
Kinematisk visk.	ν	L ² ·T ⁻¹	Stok, cm ² /s
Flöde, vätskeföring	q	L ³ ·T ⁻¹	m ³ /s, cm ³ /s o.s.v.
<u>Dynamiska</u>			
Massa	M, m	M	Kilogram, gram, kg, g
Kraft	F	M·L·T ⁻²	Kilogramkraft, kgf, kilopond, kp
Ytspänning	σ	M·T ⁻²	Dyn/cm, Erg/cm ² , kpm/m ²
Täthet, sp. vikt	ρ, s	M·L ⁻³	kg/dm ³ , g/cm ³
Spec. tyngd	γ	M·L ⁻² ·T ⁻²	kp/dm ³ , p/cm ³
Viskositet	μ	M·L ⁻¹ ·T ⁻¹	Poise, dyn-sekund/cm ²
Tryck	P, p	M·L ⁻¹ ·T ⁻²	Atmosfärer, kp/cm ²
Elasticitetsmodul	E	M·L ⁻¹ ·T ⁻²	kp/cm ²
Impuls	I	M·L·T ⁻¹	Kilopondmeter pr sek., kpm/s
Arbete, energi	W	M·L ² ·T ⁻²	Kilopondmeter, kpm
Effekt	P	M·L ² ·T ⁻³	Hästkrafter, hk; kilowatt, kW

x) Obs! För att i formler och vid beräkningar kunna skilja bokstaven l från l, när l står ensamt och betecknar längd, användes beteckningen \bar{l} för längd.

Längre fram komma vi att i ett särskilt avsnitt studera den hjälp för lösandet av mekaniska problem, som dimensionsbetraktelser kunna ge. Den här givna framställningen har avsett att aktualisera vissa begrepp, och vi komma att i fortsättningen utnyttja denna genomgång vid behov.

Det kan vara värt att observera, att γ enligt det föregående blir numeriskt = 1 och $s = \frac{g}{g_0} \cdot \gamma \approx 1$. Dimensionen är dock som synes en annan, och vid många härledningar och diskussioner är det nödvändigt att hålla de båda begreppen isär. I det tekniska systemet är γ ca 9.81 ggr större än 1 (se t.ex. Lundberg: Lärobok i hydromekanik!).

2. Hydrostatik.

Hydrostatiken har redan definierats såsom läran om vätskers jämvikt. Den är såsom vetenskap mycket gammal. Dess grundsatser formulerades redan under antiken. Att en vätska befinner sig i jämvikt, innebär att inga relativa förskjutningar av vätskeelementen förekomma. Detta betyder också, att inga skjufkrafter existera i vätskan. Det kärl, i vilket vätskan befinner sig, kan där- emot delta i olika slag av rörelse. Vätskans jämviktsförhållanden studeras då med avseende på ett med kärlet fast förbundet koordinatsystem.

21. Begreppet vätskestryck.

En vätska kan betraktas såsom bestående av en stor mängd partiklar eller element i kontakt med varandra. Figur 2.01 visar en sådan partikel inuti en vätska, som befinner sig i vila relativt ett med vätskans begränsning fast förbundet koordinatsystem. De krafter, som hålla detta element i jämvikt, äro

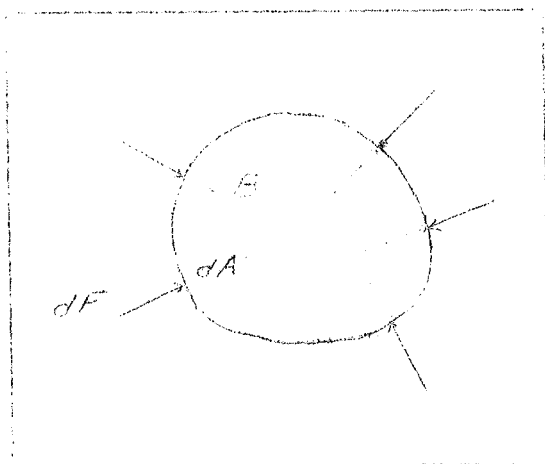


Fig. 2.01

normalkrafter från omgivande element samt på elementet verkande masskrafter (krafter proportionella mot elementets massa såsom tyngdkraft, centripetalkrafter etc.). Enligt Newtons 3. lag måste dessa krafter naturligtvis svara mot i elementet existerande spänningar. På figuren ha dessa krafter streckats. Jämför för övrigt aktiva och passiva krafter!

Om nu dA betecknar ett ytelement kring en godtycklig punkt B och dF den på ytele-

mentet verkande normalkraften, så utgör kvoten

$$p = \frac{dF}{dA} \tag{2.01}$$

det på ytelementet verkande vätskestrycket p i punkten B. p kallas ibland specifika trycket till skillnad mot totala tryckkraften på en yta. Vanligtvis kallas p dock enbart trycket. I ord kan således trycket definieras såsom tryckkraften per ytenhet. Det anges oftast i kp/cm^2 (kg/cm^2) eller atmosfärer. Här skiljer man mellan fysikalisk atmosfär = 1 atm = 1.0333 kp/cm^2 och teknisk atmosfär = 1 at = 1 kp/cm^2 .

Om trycket över en större yta A kan anses konstant = p , kan tydligen totala tryckkraften omedelbart erhållas ur ekv. 2.01 genom integration. Således

$$dF = p dA$$

och

$$F = p \cdot A$$

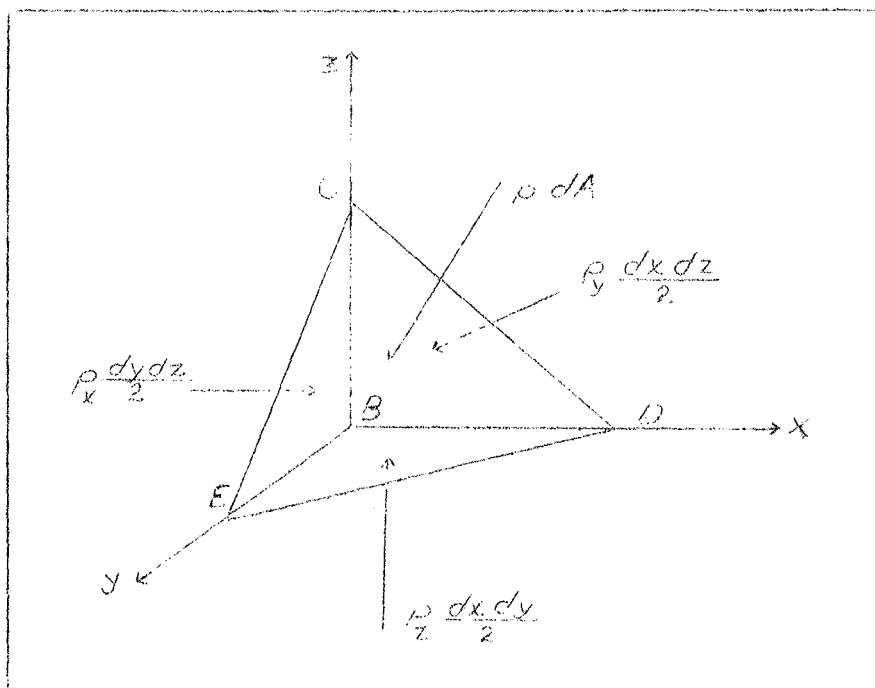
(2.02)

211. Tryckets oberoende av riktningen.

Vi skola nu bevisa följande sats: i varje punkt inuti en vätska i relativ vila är storleken av trycket oberoende av den betraktade riktningen.

Låt punkten B vara origo i ett rätvinkligt koordinatsystem enligt figur 2.02 och låt den oändligt lilla tetraedern BCDE representera ett vätskeelement, som avskär sträckorna dx, dy och dz på koordinataxlarna. p_x , p_y och p_z beteckna trycken i respektive axelriktningar och p trycket mot den sneda tetraederytan CDE.

Tryckkrafternas storlek mot begränsningsytorna framgår av figuren. Förutom



av dessa tryckkrafter angripes vätskeelementet även av masskrafter t.ex. tyngdkraften. Under det att tryckkrafterna är proportionella mot de ytor de angripa, är masskrafterna proportionella mot elementets volym. Tetraederytorna är små av 2:dra ordningen, medan volymen blir liten av 3:dje ordningen. Enligt differentialkalky-

Fig. 2.02

len kunna därför mass-

krafterna försummas vid dx, dy och $dz \rightarrow 0$. Tryckkrafterna måste därför vid jämvikt ge resultaten = 0 i samtliga axelriktningar.

De vinklar, som normalen till ytan $CDE = dA$ bildar med koordinataxlarna x, y och z, beteckna vid med α , β och γ . Genom ett studium av vinkelförhållandena i figuren erhålla vi följande projektionskvationer

$$dA \cos \alpha = \frac{dydz}{2} \tag{a}$$

$$dA \cos \beta = \frac{dx dz}{2} \tag{b}$$

$$dA \cos \gamma = \frac{dx dy}{2} \tag{c}$$

Jämviktsvillkoren för de på tetraederytorna angripande krafterna ge dessutom ekvationerna (d), (e) och (f)

$$p dA \cos \alpha - p_x \frac{dy dz}{2} = 0 \quad (d)$$

$$p dA \cos \beta - p_y \frac{dx dz}{2} = 0 \quad (e)$$

$$p dA \cos \gamma - p_z \frac{dx dy}{2} = 0 \quad (f)$$

Kombineras dessa båda ekvationssystem, erhålles

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (g)$$

Således: trycket i en godtycklig punkt inuti en vätska är lika i alla riktningar. I en annan punkt B_1 av vätskan råder i allmänhet ett annat tryck p_1 , som dock även är oberoende av riktningen. Vätskestrycket ändrar sig således endast med orten, är en ren ortsfunktion eller punktfunktion. Matematiskt kan detta symboliskt uttryckas med ekvationen

$$p = f(x, y, z)$$

De ovan härledda satserna gälla även för vätskeelement i omedelbar beröring med en fast kropp, t.ex. kärnväggen. Trycket är sålunda oberoende av väggens lutning och är alltid riktad vinkelrätt mot väggen.

Satsen om tryckets oberoende av riktningen gäller för ideella vätskor såväl i vila som i rörelse. För viskösa vätskor gäller densamma endast, om inga formförändringar uppträda, ty endast i sådana fall försvinna tangentialkrafterna.

212. Nivåytor.

Vi ha ovan funnit, att trycket i en vätska är en kontinuerlig funktion av ortskoordinaterna x , y och z eller

$$p = f(x, y, z) \quad (2.03)$$

Om i denna ekvation p sättes $= p_1$, erhålles

$$p_1 = f(x, y, z)$$

vilket geometriskt betyder en yta fysikaliskt karakteriserad av att på densamma överallt råder samma tryck p_1 . En sådan yta kallas en nivåyta eller ekvipotentialyta^{x)}.

Om differensen i tryck Δp mellan olika närliggande nivåytor alltid är densamma, kommer avståndet Δn mellan nivåytorna att vara omvänt proportionellt mot tryckfallet eller tryckgradienten $\frac{\Delta p}{\Delta n}$.

x) Vid närmare betraktande och av vad som ovan sagts framgår, att en nivåyta i varje punkt är vinkelrät mot de i punkten uppträdande masskrafterna.

22. Eulers allmänna jämviktsekvationer; hydrostatikens fundamentalekvation.

Vi skola nu härleda de allmänna villkoren för att ett vätskeelement skall befinna sig i relativ jämvikt, d.v.s. villkoren för att inga förskjutningar mellan de olika vätskeelementen skola uppstå. Dessa allmänna jämviktsvillkor uppställdes i mitten av 1700-talet, för första gången av den store schweiziske matematikern Leonhard Euler (1707-1783).

Vi betrakta i en homogen vätska med tätheten ρ ett prismatiskt element med kantlängderna dx , dy och dz . Trycket i punkten (x, y, z) är p . De längs de positiva axelriktningarna verksamma masskrafterna betecknas med X , Y och Z . Vi uppställa jämviktsvillkoret längs x -axeln. Den åt höger riktade tryckkraften fås lätt till $p \, dy \, dz$. Tryckgradienten i positiva x -axelns riktning kan tecknas $\frac{\partial p}{\partial x}$ (= partiella derivatan av p med avseende på x). Partiella differentialen eller förändringen i trycket vid förflyttningen sträckan dx längs x -axeln blir $\frac{\partial p}{\partial x} dx$. Följaktligen blir den åt vänster riktade tryckkraften $(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy \, dz$. Vid jämvikt skall gälla, då masskraften blir $\rho \, dx \, dy \, dz \, X$

$$p \, dy \, dz + \rho \, dx \, dy \, dz \, X - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) \, dy \, dz = 0 \quad (a)$$

Hyfsas denna ekvation erhålles

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \quad (a^1)$$

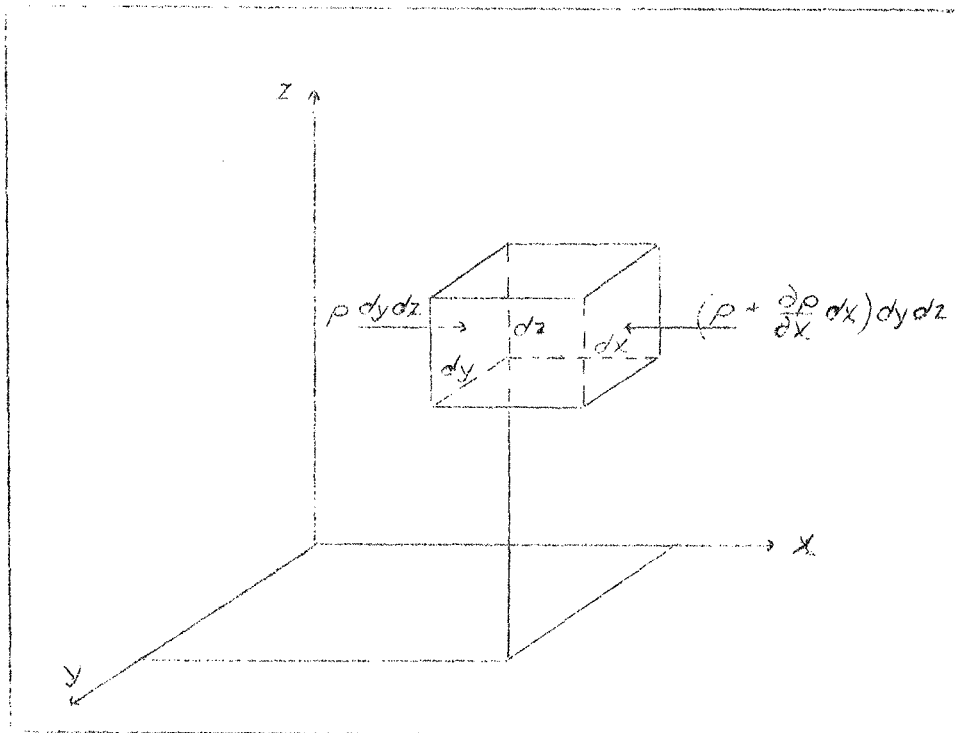


Fig. 2.03

För de övriga axelriktningarna erhålles analoge uttryck, varför jämviktsvillkoret blir

$$\begin{cases} \frac{d p}{d x} = \varrho X & (a) \\ \frac{d p}{d y} = \varrho Y & (b) \\ \frac{d p}{d z} = \varrho Z & (c) \end{cases} \quad (2.04)$$

I ord uttryckt säga dessa ekvationer att tryckgradienten längs axlarna är direkt proportionell mot vätskans täthet och den verkande masskraften.

Nu är

$$d p = \frac{d p}{d x} d x + \frac{d p}{d y} d y + \frac{d p}{d z} d z$$

enligt differentialkalkylen. Multipliceras ekvationen (a) med dx, ekvationen (b) med dy och (c) med dz och adderas de uppkomna ekvationerna led för led, erhålles

$$\frac{d p}{d x} d x + \frac{d p}{d y} d y + \frac{d p}{d z} d z = \varrho X d x + \varrho Y d y + \varrho Z d z$$

Av detta följer

$$\boxed{d p = \varrho X d x + \varrho Y d y + \varrho Z d z} \quad (2.05)$$

Ekvationen (2.05) benämnes hydrostatikens fundamentalekvation.

Eftersom dp är en fullständig differential (se differentialkalkylen!) måste även högra membrum vara detsamma. Vi beteckna denna differential med dΩ. Då gäller

$$d \Omega = X d x + Y d y + Z d z$$

eller

$$\begin{cases} \frac{d \Omega}{d x} = X & (a) \\ \frac{d \Omega}{d y} = Y & (b) \\ \frac{d \Omega}{d z} = Z & (c) \end{cases} \quad (2.06)$$

Ω kallas kraftfunktion och är liksom p en funktion av orten. Fysikaliskt representerar den den potentiella energien per massenhet. Funktionen har den egenskapen, att dess förändring pr längdenhet, gradient, är lika med kraftens storlek i denna riktning.

Tydligt gäller

$$d \Omega = \frac{1}{\varrho} d p \quad (2.07)$$

Integreras erhålles $\Omega = \frac{1}{\varrho} p + c$

Ett villkor för att en vätska skall befinna sig i jämvikt är att det existerar en kraftfunktion. Den för oss viktigaste kraftfunktionen är tyngdkraften.

221. Några tillämpningar på hydrostatikens fundamentalekvation.

2211. En vätska under tyngdkraftens inverkan. Om z-axeln sammanfaller med lodlinjen blir $Z = -1$ (egentligen $-\frac{g}{g_0} \cdot 1$) och $X = Y = 0$ eftersom tyngdkraften saknar komponenter i horisontalplanet. Hydrostatikens fundamentalekvation reduceras då till formen

$$dp = -1 \cdot \rho dz \quad (a)$$

Integration ger ($1 \cdot \rho$ blir tydligen $= \gamma$)

$$p = -\gamma \cdot z + c \quad (b)$$

Omkastas z-axelns riktning och utbytes z mot h, erhålles

$$\boxed{p = p_0 + \gamma h} \quad (2.08)$$

Ex. 2.01. Huru hög måste en Hg-pelare vara, för att åstadkomma ett tryck av 1 teknisk atmosfär?

Lösning: En teknisk atmosfär är $= 1 \text{ kp/cm}^2$. Om pelarens höjd antages vara x m, erhålles

$$x \cdot 10 \cdot 0.01 \cdot 13.6 = 1$$

$$x = 0.735 \text{ m} = 73.5 \text{ cm} \quad \text{Svar: } \underline{73.5 \text{ cm}}$$

Ex. 2.02. Huru stort är det absoluta trycket i kp/cm^2 1.5 m under vattenytan i en ångpanna, då ångans övertryck är 16 kp/cm^2 . Vattnets täthet vid rådande temperatur är 0.865 kg/dm^3 .

Lösning: Trycket blir $16 + 15 \cdot 0.01 \cdot 0.865 = 16.13 \text{ kp/cm}^2$.

2212. Vätskeytan i en tank, som rör sig med likformigt accelererad rörelse.

I ett öppet kärl (fig. 2.04), som rör sig rätlinigt i en viss riktning med accelerationen a, befinner sig en vätska med specifika vikten s. Massenheten i punkten A utsättes för tyngdkraften $\frac{g}{g_0} \text{ kp}$ samt de av accelerationen förorsakade reaktionskrafterna F_h och F_v . Detta ger i överensstämmelse med ekv. (2.05)

$$dp = -s \cdot \frac{a}{g_0} \cos \alpha \cdot dx - s \cdot \left(\frac{g}{g_0} + \frac{a}{g_0} \sin \alpha \right) dz \quad (a)$$

För en nivåyta är $dp = 0$, varför

$$dz = -\frac{\cos \alpha}{\frac{g}{a} + \sin \alpha} dx \quad (b)$$

Integrera!

$$z = -\frac{\cos \alpha}{\frac{g}{a} + \sin \alpha} \cdot x + c \quad (c)$$

För $x = 0$ erhålles $z = z_0 = c$. Ekvipotentialytornas ekvation blir således

$$z = z_0 - \frac{\cos \alpha}{\frac{g}{a} + \sin \alpha} \cdot x \quad (d)$$

Tryckets tillväxt med djupet erhålles ur ekvationen (e) i ekvations-systemet (2.06)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad (e)$$

Om z räknas från den fria vätskeytan för varje x , erhålles ur denna ekvation och figuren

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\left(s \cdot \frac{g}{g_0} + s \cdot \frac{a}{g_0} \cdot \sin \alpha\right) \quad (f)$$

Genom integration och konstantbestämning erhålles slutligen, om z ersättes med h och axelriktningen omkastas

$$p = p_0 + \frac{\rho g}{g_0} \left(1 + \frac{a}{g} \sin \alpha\right) h \quad (g)$$

Denna ekvation kan även skrivas

$$p = P_0 + \rho \left(1 + \frac{a}{g} \sin \alpha\right) h \quad (2.09)$$

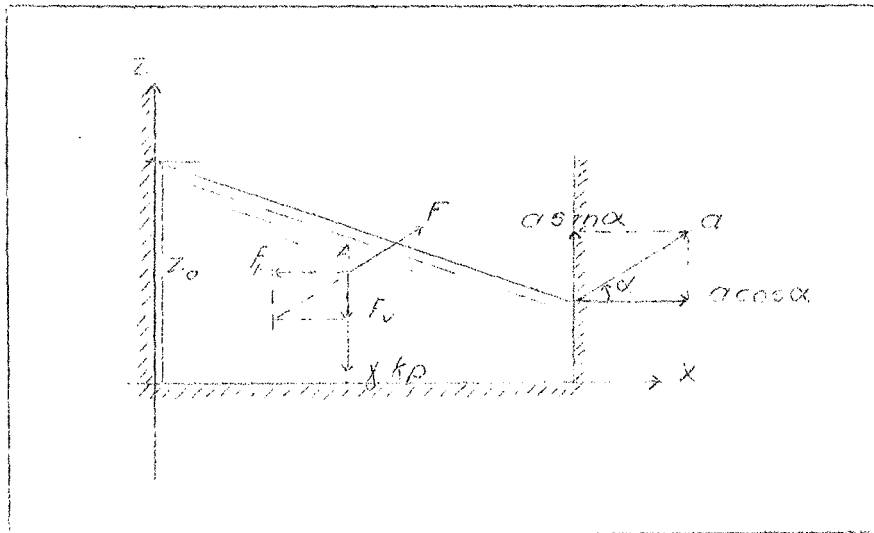


Fig. 2.04

Några specialfall:

$\alpha = 0$. Nivåytornas ekvation blir

$$z = z_0 - \frac{a}{g} x$$

och ekvationen för tryckets tillväxt med djupet får formen

$$p = p_0 + \rho h$$

Är här $a = g$ blir

$$z = z_0 - x$$

d.v.s. nivåytornas lutning blir 45° .

$\alpha = 90^\circ$ Nivåytornas ekvation blir

$$z = z_0$$

d.v.s. de äro horisontala.

Tryckets tillväxt med djupet blir

$$p = p_0 + \gamma \left(1 + \frac{a}{g}\right) h$$

$\alpha = -90^\circ$. Här blir $z = z_0$ och således nivåytorna horisontella. Tryckets tillväxt med djupet blir

$$p = p_0 + \gamma \left(1 - \frac{a}{g}\right) h$$

Speciellt gäller, om $a = g$, att $p = p_0$ och således trycket oberoende av djupet. Vätskan beter sig, som om den vore utan tyngd.

2213. Vätska i ett kärl, som roterar. Det cylindriska kärlet i figur 2.05 antages delvis vara fyllt med vätska. Bringas kärlet att rotera kring en fast axel, visar det sig, att vätskytan sjunker vid centrum under det att den stiger vid sidorna. Efter inträtt stationärt (d.v.s. oberoende av tiden) tillstånd uppträda inga förskjutningar i vätskan relativt kärlet och alltså det med detta fast förbundna koordinatsystemet. På grund av rotationssymmetrin, kan uppgiften behandlas som ett tvådimensionellt problem.

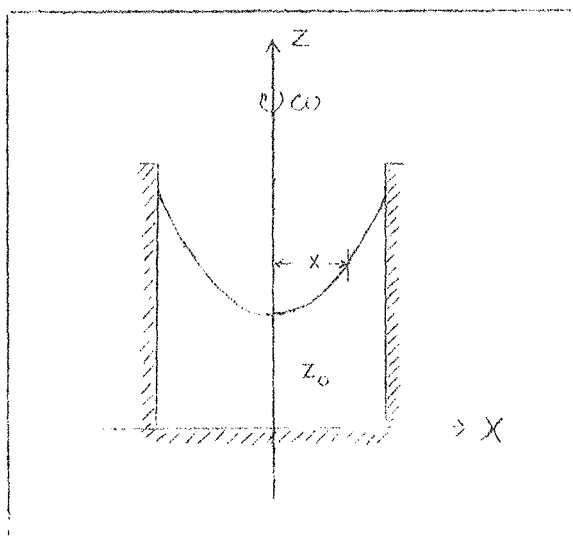


Fig. 2.05

För en ekvipotentialyta är $dp = 0$.

Masskrafterna äro här centrifugalkraften

$$X = \frac{v^2}{g_0} x \quad (a)$$

och tyngdkraften per massenhet

$$Z = - \frac{g}{g_0} \quad (b)$$

Hydrostatikens fundamentalekvation ger således

$$0 = \rho \frac{v^2}{g_0} dx - \rho \cdot \frac{g}{g_0} dz \quad (c)$$

eller, när $v = \omega \cdot x$

$$\omega^2 \cdot x \cdot dx = g dz \quad (d)$$

Efter integration

$$z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + c \quad (e)$$

Om x sättes = 0 erhålles $c = z_0$ och således

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} x^2 \quad (2.10)$$

Ekvationen visar att nivåytorna äro rotationsparaboloider.

Ex. 2.03. Bevisa att vätskeytan sjunker lika mycket i centrum som den stiger vid kärkanterna räknat från den ursprungliga nivån vid det i avdelning 2213 behandlade problemet.

Lösning: Den ursprungliga nivån betecknas med h . Att rotationsparaboloideus volym är hälften av den omskrivna cylinderns volym antages vara bekant från matematiken (Härled formeln!). Med de beteckningar, som införts på figur 2.06 uppställes då lätt ekvationen

$$\pi r^2 h = \pi r^2 H - \frac{1}{2} \pi r^2 (H - z_0) \quad (a)$$

vilken lätt hyfsas till formen

$$2h = 2H - H + z_0 \quad (b)$$

som även kan skrivas

$$h - z_0 = H - h \quad (c)$$

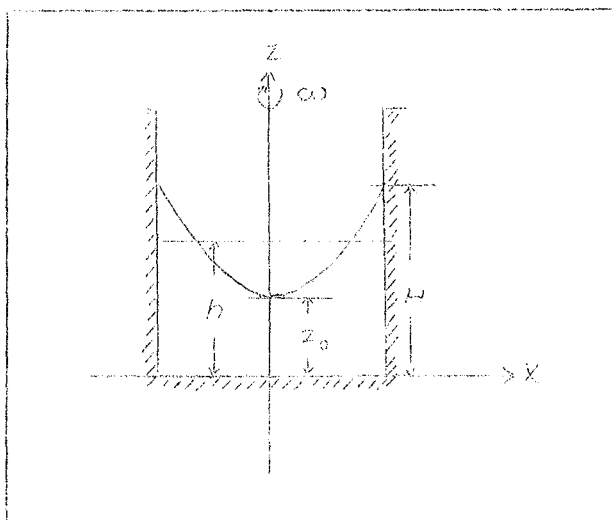


Fig. 2.06

Denna ekvation anger således, huru högt vätskeytan stiger vid kanterna över den ursprungliga nivån. Analogt erhålles för nedsjunkningen

$$h - z_0 = \frac{\omega^2}{4g} r^2 \quad (f)$$

Ex. 2.04. En halvsfärisk skål med radien r är fylld med vatten. Den försättes i rotation med vinkelhastigheten $\omega = 1$ radian/s. Huru mycket vatten rinner härvid ut ur skålen?

Lösning: Figur 2.07 återger förhållandena vid uppnått stationärt tillstånd. Enligt det föregående måste då gälla

$$H - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

Av denna ekvation synes, att vätskeytan i centrum sjunker $h - z_0$ och att den vid kanterna stiger $H - h$ och att dessa differenser äro lika stora. Insättes i ekv. (2.10) $x = r$, erhålles $z = H$ och således

$$H = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (d)$$

men eftersom $z_0 = 2h - H$, erhålles genom substitution

$$H - h = \frac{\omega^2}{4g} r^2 \quad (e)$$

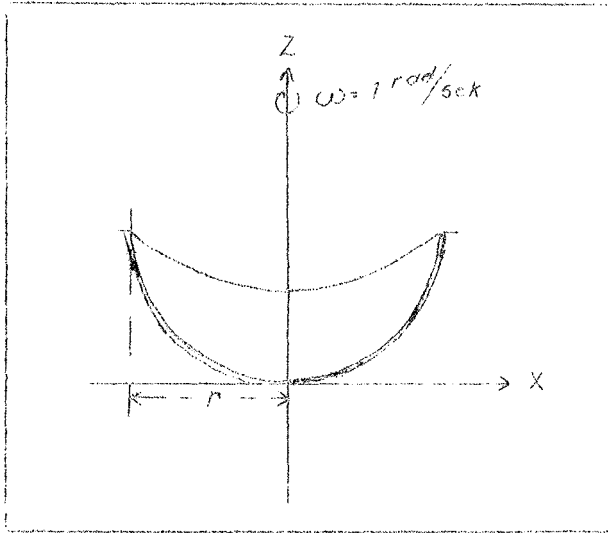


Fig. 2.07

Volymen av det utrunna vattnet blir

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 (H - z_0) = \frac{\pi \omega^2 \cdot r^4}{4g}$$

eller, om när i detta fall $\omega = 1$,

$$V = \frac{\pi r^4}{4g}$$

Svar: Den utrunna volymen är

$$\frac{\pi r^4}{4g}$$

23. Hydrostatiskt tryck mot plana ytor.

231. Tryckkraftens storlek.

Vi skola nu härleda några viktiga sätser om vätsketryck mot plana ytor.

I figur 2.08 må linjen BC vara skärningen av en sådan yta vinkelrät mot papperets plan. Den regel-

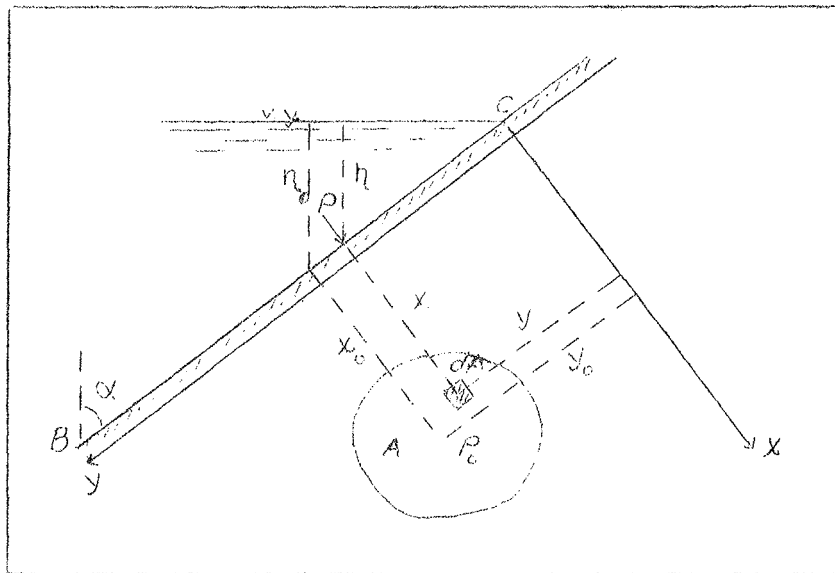


Fig. 2.08

bundna ytan A må vara en del av denna yta. På ytans BC vänstra sida befinner sig en vätska med specifika tyngden γ . I övrigt torde koordinatsystemets läge och övriga beteckningar framgå av figuren. x-axeln ligger i skärningslinjen mellan BC och vätskeytan. Vi kunna omedelbart uppställa

ekvationerna

$$dF = p dA = \gamma \cdot h \cdot dA \quad (a)$$

Nu är enligt figuren

$$h = y \cdot \cos \alpha$$

varför

$$dF = \gamma \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot dA \quad (b)$$

Integrera!

$$F = \gamma \cos \alpha \int y \cdot dA \quad (d)$$

Integralen $\int y \cdot dA$ är tydligen ytan A:s moment med avseende på x-axeln. Men enligt mekaniken gäller

$$\int y \, dA = y_0 \cdot A \quad (e)$$

eller i ord "det hela moment = summan av delarnas moment" och således

$$F = \gamma \cos \alpha \int y \, dA = \gamma \cos \alpha \cdot y_0 \cdot A \quad (f)$$

Nu är enligt figuren

$$y_0 \cos \alpha = h_0$$

som infört i (f) ger

$$F = \gamma \cdot h_0 \cdot A \quad (2.11)$$

Detta viktiga resultat kan i ord uttryckas så: Den hydrostatiska tryckkraften mot en plan yta är lika med tyngden av en vätskepelare, som har ytan till bas och ytans tyngdpunktsavstånd till den fria vätskeytan till höjd.

Ex. 2.05. En halvcirkulär ränna fylld med vatten kan stängas medelst en lucka av motsvarande form. Huru stor är tryckkraften mot luckan, när den är stängd?

Lösning: Den halvcirkulära ytans tyngdpunkt ligger på djupet $\frac{4r}{3\pi}$. Vattenstrycket mot luckan blir alltså

$$F = 1 \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3} r^3$$

Obs! Härled formeln för halvcirkelns tyngdpunkt!

Ex. 2.06. Ett stort öppet avloppsdike med bottenbredden b, dagbredden B samt djupet h skall däckas upp medelst en spåntvägg. Huru stor blir tryckkraften mot dammen, när diket är helt fyllt med vatten?

Lösning: Beteckningar och antaganden framgå av figur 2.09.

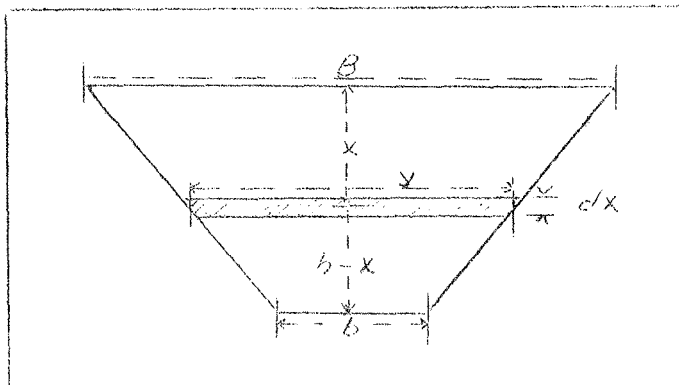


Fig. 2.09

Tryckkraften på ytelementet (se figuren!) blir

$$dF = 1 \cdot x \cdot y dx \quad (a)$$

eller

$$F = \int_0^h xy dx \quad (b)$$

Likformiga figurer ge

$$y = B - \frac{B-b}{h} x \quad (c)$$

vilket överför (b) till formen

$$F = \int_0^h \left(Bx - \frac{B-b}{h} x^2 \right) dx = B \frac{x^2}{2} - \frac{B-b}{h} \frac{x^3}{3}$$

$$F = \frac{B+2b}{6} \cdot h^2$$

Svar: Tryckkraften är $\frac{B+2b}{6} \cdot h^2$

Sifferexempel: $b = 2 \text{ m}$, $B = 10 \text{ m}$ och $h = 2 \text{ m}$ ger

$$F = \frac{10+4}{6} \cdot 4 \cdot 1000 = 9330 \text{ kp}$$

232. Tryckcentrum och dess läge.

Tryckcentrum definieras såsom angreppspunkten för resultanten till samtliga tryckkrafter på en yta. Läget av detta tryckcentrum härledes i anslutning till figur 2.10. Vi bestämma först dess y-koordinat eller djupläge. Förutsättningarna överensstämmer med de för figur 2.08 angivna. Beteckningarnas betydelse torde i övrigt tillräckligt tydligt framgå av figuren. T_c är ytan A:s tryckcentrum. Enligt definitionen skall tydligen tryckcentrums y-koordinat uppfylla villkoret

$$F \cdot y_c = \int y \, dF \tag{a}$$

där F är tryckkraften mot ytan A . Med hjälp av figurens beteckningar kunna följande substitutioner och omformningar göras

$$\gamma \cdot \eta_o \cdot A \cdot y_c = \int y \cdot \gamma \cdot \eta \cdot dA \tag{b}$$

$$\gamma \cdot y_o \cos \alpha \cdot A \cdot y_c = \int y \cdot \gamma \cdot y \cos \alpha \cdot dA \tag{c}$$

$$A \cdot y_o \cdot y_c = \int y^2 \cdot dA \tag{d}$$

Nu är enligt mekaniken $\int y^2 dA = I_x$ ytan A:s tröghetsmoment med avseende på axeln x . Vidare gäller, att I_x är förbundet med I_o , tröghetsmomentet kring en axel genom tyngdpunkten parallell med x -axeln, medelst sambandet

$$I_x = I_o + y_o^2 \cdot A$$

Således gäller

$$y_c = \frac{\int y^2 dA}{y_o \cdot A} = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A} \tag{2.12}$$

Av ekvationen framgår, att tryckcentrum alltid ligger lägre än tyngdpunkten. I speciella fall kunna de sammanfalla (Vilka?).

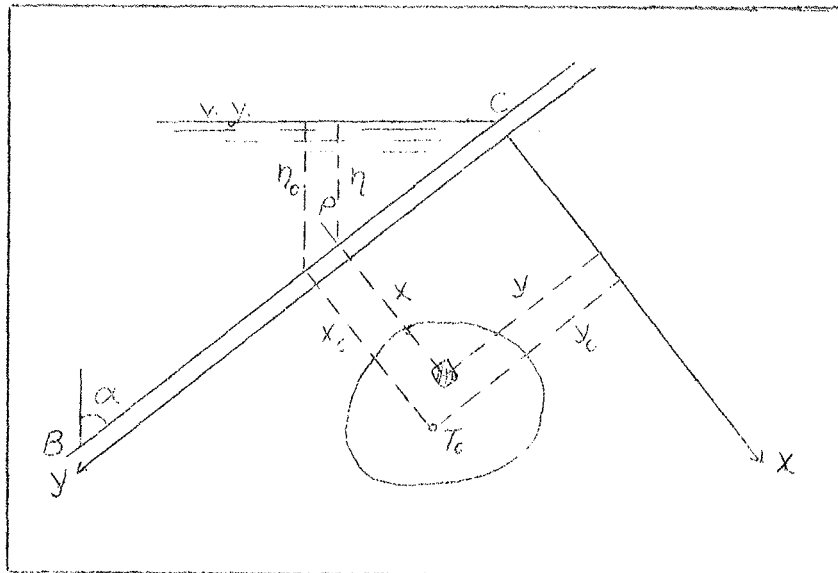


Fig. 2.10

Ex. 2.07. Beräkna tryckcentrum för en rektangel, som har sin ena kantlinje parallell med vätskeytan och vars tyngdpunkt ligger på djupet h .

Lösning: Rektangelns dimensioner antages vara de på figur 2.11 införda. Av denna framgår även övriga beteckningar. Om rektangelns tröghetsmoment med avseende på en axel genom T_0 och parallell med vätskeytan ej antages bekant,

användes formeln

$$y_c = \frac{\int y^2 dA}{y_0 \cdot A}$$

Således

$$y_c = \frac{\int_{h-\frac{a}{2}}^{h+\frac{a}{2}} y^2 b dy}{h \cdot ab} = \frac{1}{ha} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{h-\frac{a}{2}}^{h+\frac{a}{2}} \quad (a)$$

$$y_c = h + \frac{a^2}{12h} \quad (b)$$

Antages I_0 bekant

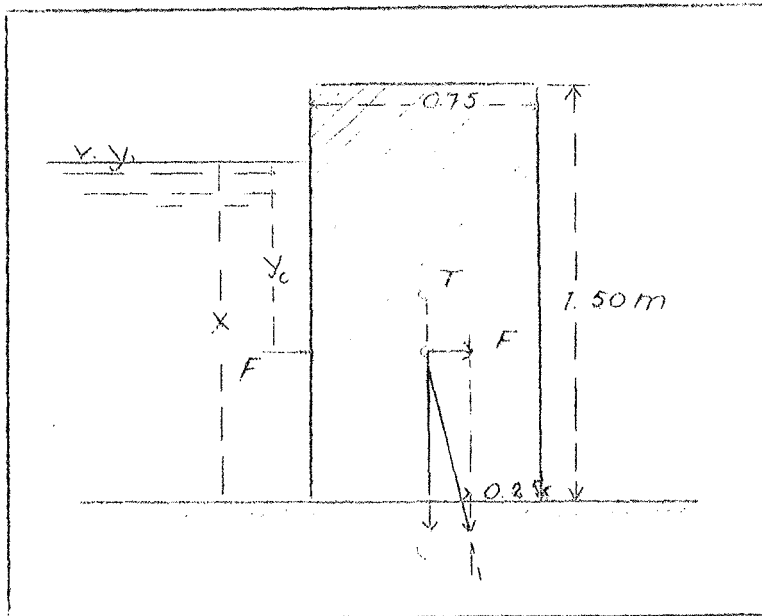
$$I_0 = \frac{ba^3}{12}$$

erhålles omedelbart

$$y_c = y_0 + \frac{I_0}{y_0 \cdot A} = h + \frac{ba^3}{12h \cdot ab} = h + \frac{a^2}{12h}$$

Ex. 2.08. En damm av sten ($\rho = 3 \text{ kg/dm}^3$) med rektangulärt tvärsnitt har en höjd av 1.5 m och en bredd av 0.75 m. Huru högt kan vattnet stå på ena sidan om densamma utan att risk för stjälpning skall inträffa, d.v.s. utan att resulterande tryckkraften mot basen skall falla utanför mellersta tredjedelen av densamma?

Lösning: På figur 2.12 finnas behövliga beteckningar införda. Alla beräkningar hänföra sig till 1 längdmeter av dammen. Vattnet antages få stiga x m högt.



$$G = 3 \cdot 15 \cdot 7.5 \cdot 10 = 3375 \text{ kp}$$

$$F = 1 \cdot 10x \cdot 10 \cdot 5x = 500 x^2$$

$$y_c = h + \frac{a^2}{12h} = \frac{2x}{3}$$

Likformiga trianglar ge

$$\frac{500 x^2}{3375} = \frac{0.375 - 0.250}{x - \frac{2x}{3}} =$$

$$= \frac{0.125}{\frac{x}{3}}$$

$$x^3 = 2.53$$

$$x = 1.36$$

Fig. 2.12

Svar: Vattnet får stå 1.36 m högt.

Vid mera oregelbundna ytor är tryckcentrums läge ej bestämt enbart genom kännedom om dess y -koordinat. Vi vilja för fullständighetens skull även bestämma tryckcentrums läge med avseende på dess x -koordinat. Betrakta återigen figur 2.10! Enligt den givna definitionen på tryckcentrum måste gälla

$$F \cdot x_c = \int x dF = \int x \cdot (\rho \cdot g \cdot y) \cdot dA = \int x \cdot \rho \cdot g \cdot y \cos(\alpha) \cdot dA$$

eller

$$\rho \cdot g \cdot y_0 \cdot A \cdot x_c = \rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \int xy dA$$

men $y_0 = y_0 \cos(\alpha)$

varför

$$y_0 \cdot A \cdot x_c = \int xy dA$$

eller

$$x_c = \frac{\int xy dA}{y_0 \cdot A} \quad (2.13)$$

Integralen $\int xy dA$ kallas inom mekaniken centrifugalmoment eller tröghetsprodukt och tecknas C_{xy} . Om ytan A har en symmetriaxel parallell med y -axeln

och denna tillåtes sammanfalla med symmetriaxeln, blir $C_{xy} = 0$ (Bevisa detta!). Så är i allmänhet fallet vid praktiska tillämpningar.

Utan närmare diskussion anföras även för y_c och x_c följande samband:

$$y_c = \frac{\int y^2 dA}{y_o \cdot A} = \frac{\int y dA}{\int y dA} = \frac{\iint y^2 dx dy}{\iint y dx dy} \quad (2.14)$$

$$x_c = \frac{\int xy dA}{y_o \cdot A} = \frac{\int xy dA}{\int y dA} = \frac{\iint xy dx dy}{\iint y dx dy} \quad (2.15)$$

24. Hydrostatiskt tryck mot buktiga ytor.

Vid bestämmandet av tryckkraftens storlek och riktning mot en buktig yta är det lämpligt att först söka dess horisontala komponent F_x och dess vertikala komponent F_y . Dessa sammansätts sedan till resultanten F , vars anbringningspunkt ligger i skärningspunkten mellan riktninglinjerna för F_x och F_y . Resultantens storlek och riktning äger dock i många fall mindre intresse än dess horisontella och vertikala komponenter. Vi härleda först F_x och F_y genom en enkel jämviktsbetraktelse.

Betrakta figur 2.13! Kurvan AB må vara skärningen av en buktig yta vinkelrät mot papperets plan. I övrigt gäller att G_1 är tyngden av volymen BCDE (beräkningarna avse längdenheten!). G_2 är tyngden av volymen ABC. F_x är tryckkraften på ytan AC och F_{x_1} den av F_x uppväckta reaktionskraften. F_{y_1} är den av tyngderna G_1 och G_2 uppväckta reaktionskraften. Följaktligen gäller F_{y_1} för jämvikt

$$F_{x_1} = F_x \text{ och } F_{y_1} = G_1 + G_2$$

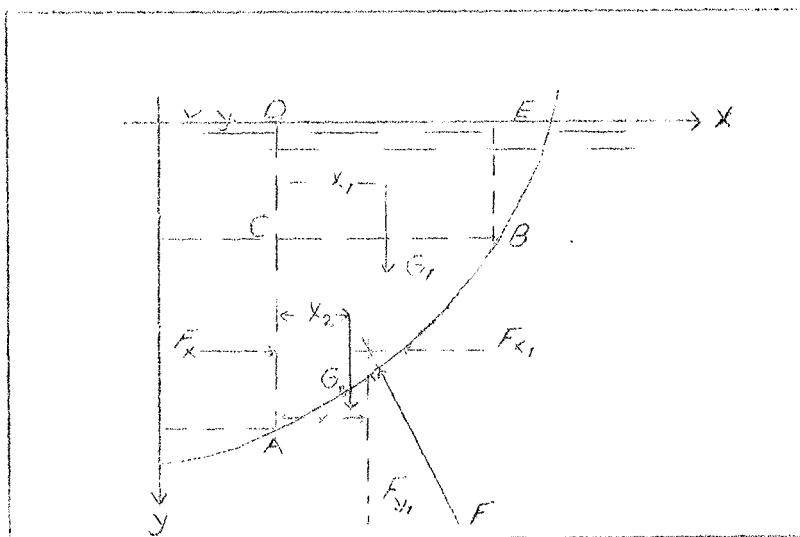


Fig. 2.13

F_x kan tydligen beräknas till storlek och riktning enligt tidigare härledda formler för tryck mot plana ytor. Och således även F_{x_1} . I ord kan resultatet formuleras så: den horisontella tryckkraften på en buktig yta är lika med det tryck, som vätskan utövar på ytans vertikala projektion.

F_{y_1} är till storleken lika med tyngden av volymen ABED och dess anbringnings-

punkt kan beräknas medelst en momentekvation, då G_1 och G_2 tydligen äro anbringade i respektive volymers tyngdpunkter. I detta fall kan momentekvationen med figurens beteckningar skrivas

$$x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2 = (G_1 + G_2)x \quad (b)$$

eller

$$x = \frac{x_1 \cdot G_1 + x_2 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \quad (c)$$

I ord kan lagen om den vertikala tryckkraften på en buktig yta formuleras så: den vertikala tryckkraften på en buktig yta är lika med tyngden av en vertikal vätskepelare, som nedtill begränsas av den givna ytan och upptill av denna ytas projektion på den fria vätskeytan, likgiltigt om vätskan helt fyller detta rum eller ej.

Dessa satser kunna även härledas genom en betraktelse analog med de, som

givits vid härledningarna

av formlerna för tryck mot plana ytor. Betrakta figur 2.14! Med de införda beteckningarna, vilkas betydelse framgår av figuren, erhålles omedelbart ekvationerna

$$dF = \gamma \cdot \delta \cdot dA \quad (a)$$

$$dF_x = \gamma \cdot \delta \cdot dA \sin \alpha \quad (b)$$

$$dF_y = \gamma \cdot \delta \cdot dA \cos \alpha \quad (c)$$

Ekvationen (b) ger vid integration

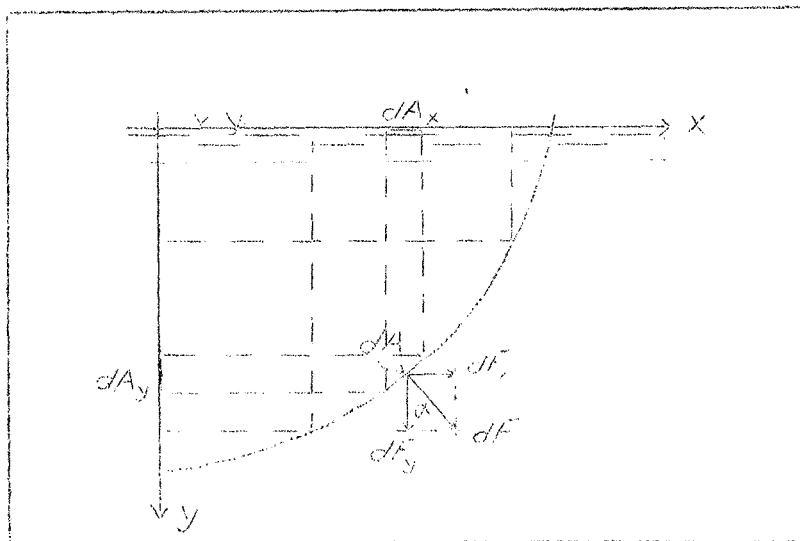


Fig. 2.14

$$F_x = \gamma \int y dA \sin \alpha = \gamma \int y dA_y = \gamma \cdot y_0 \cdot A_y$$

där A_y är den betraktade ytans projektion i vertikalplanet samt y_0 denna projicerade ytans tyngdpunkt.

Ekvation (c) ger

$$F_y = \gamma \int y dA \cos \alpha = \gamma \int y dA_x = \gamma \cdot V$$

onär $\int y dA_x$ tydligen är vätskevolymen V över den betraktade ytan. De erhållna resultaten bekräfta de tidigare på annan väg erhållna och de sammanfattas i ekvationerna (2.16) och (2.17).

$$F_x = \gamma \cdot y_0 \cdot A \quad (2.16)$$

$$F_y = \gamma \cdot V \quad (2.17)$$

Ex. 2.09. Härled Arkimedes princip med hjälp av lagarna för tryck mot buktiga ytor!

Lösning: I figur 2.15 må A beteckna en kropp med fullständigt godtycklig form, vilken nedsänkts i en vätska av specifika vikten s eller specifika tyngden γ . Med figurens beteckningar och under användandet av lagarna för tryck mot buktiga ytor erhålles lätt, om F = spänningen i den tråd, i vilken A är upphängd, F'_y = resulterande nedåtriktade tryckkraften, F''_y = resulterande uppåtriktade tryckkraften och G = kroppens tyngd samt fordran på jämvikt beaktas

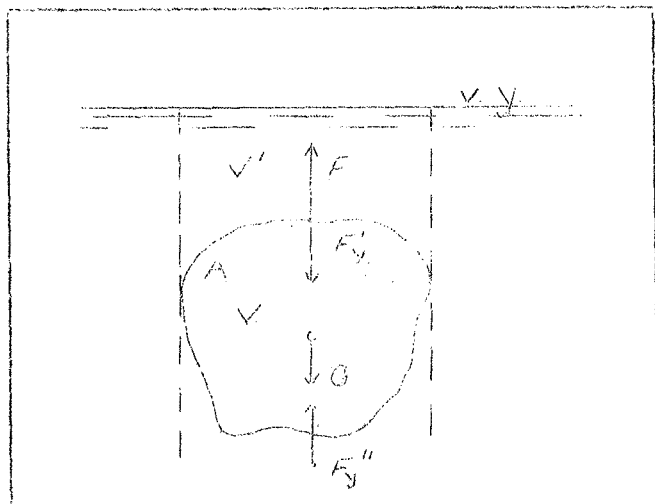


Fig. 2.15

uppåtriktade tryckkraften och G = kroppens tyngd samt fordran på jämvikt beaktas

$$F + F''_y = F'_y + G \quad (a)$$

Men nu är

$$F'_y = \gamma (V' + V) \text{ och } F''_y = \gamma V^i,$$

varför ekvation (a) övergår till

$$F + \gamma (V' + V) = \gamma V^i + G$$

och slutligen

$$F = G - \gamma \cdot V \quad (2.18)$$

Således: Kroppen förlorar lika mycket i vikt som den undanträngda vätskemassan väger (Arkimedes princip).

Ex. 2.10. En cirkelformad lucka med 1 m diameter, placerad i väggen till en vattenbassäng, är rörlig kring en horisontell axel genom luckans centrum, som ligger 3 m under den fria vattenytan. Bestäm det moment, som måste anbringas i axeln i det ögonblick luckan öppnas.

Lösning: Beteckningarna framgå av figur 2.16. Cirkelytans tröghetsmoment kring en diameter är $\frac{\pi r^4}{4}$ (Härled detta!). Alltså gäller i detta fall

$$y_c = y_o + \frac{I_o}{y_o \cdot A} = 3 + \frac{\pi \cdot 0.5^4}{4 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}} = 3 + \frac{1}{48}$$

Tydligt blir det sökta momentet

$$M = \pi \cdot 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{48} = \frac{\pi}{64} = 0.049$$

Svar: 49 kpm.

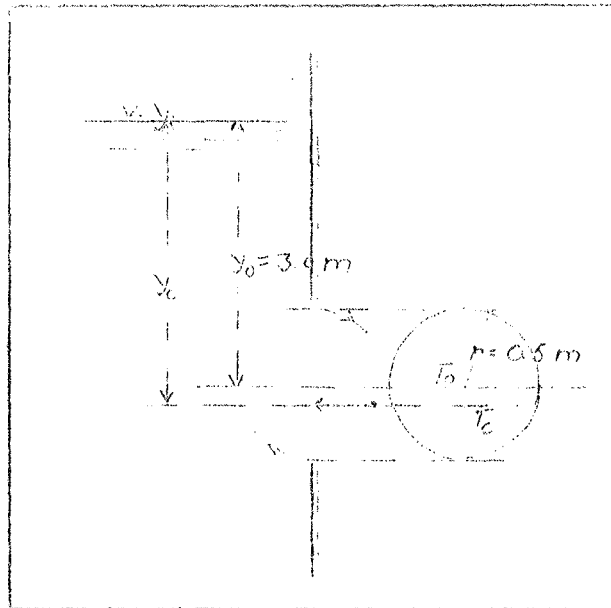


Fig. 2.16

3. Hydrodynamik.

Läran om vätskor i rörelse benämnes hydrodynamik. Denna vetenskap har i sin historiska utveckling åtföljt övriga delar av matematisk fysik. Dess egentliga framkomst skedde först sedan den materiella punktens dynamik utvecklats och först sedan infinitesimalkalkylen införts, d.v.s. efter Newton. Flera forskare hade tidigare förgäves sökt lägga grunden till en rationell hydrodynamik. I ett brev skriver t.ex. Galilei: "Jag har funnit det mindre svårt att upptäcka lagarna för himlakropparnas rörelser trots deras ofattbara avstånd än att undersöka rörelsen hos det flytande vattnet, vilken dock försiggår framför våra ögon."

En vätskas partiklar påverkas i varje ögonblick av sin omgivning. För att fullständigt kunna beskriva en vätskemassas rörelse vore det därför nödvändigt, att varje vätskeelements rörelse i varje ögonblick kunde bestämmas t.ex. på så sätt, att man angav dess koordinater x , y , z i varje ögonblick som funktion av tiden. För praktiska uppgifter kommer det dock icke ifråga att följa de enskilda partiklarnas rörelse. Det är mera ändamålsenligt att veta, huru stora hastighet och tryck äro i varje punkt av vätskan. Härför är det nödvändigt, att de tre hastighetskomponenterna och trycket i varje punkt av vätskan framställas som funktioner av tiden.

År 1755 uppställde Leonhard Euler allmänna rörelselagar för ideella vätskor och lade därmed grunden till den moderna hydrodynamiken. Vid tillämpningen av dessa lagar, vilka uttryckas i ett system av partiella differentialekvationer, på naturliga strömningsförlöpp, uppstå emellertid stora svårigheter. Dessa äro delvis av matematisk natur, men bero framför allt på de icke ideala förhållandena hos verkliga vätskor.

Man inriktade sig emellertid på att på teoretisk väg finna liknande uttryck giltiga för den viskösa vätskans rörelse. Detta lyckades för fransmannen Navier år 1822 och för engelsmannen Stokes år 1845, vilka uppställde de efter dem benämnda Navier-Stokeska ekvationerna. I dessa har tillkommit ett led, betingat av att ej endast tryckkrafter och masskrafter uppträda vid vätskerörelsen utan även friktionskrafter.

Den i rummets alla tre riktningar skeende strömningen, den tredimensionella, kräver naturligtvis den största matematiska utrustningen. I de fall strömningen saknar hastighetskomponent i en viss riktning, d.v.s. är plan eller tvådimensionell, blir problemet något enklare, men även här uppträda betydande svårigheter, om vätskan är seg eller viskös.

Mot ovannämnda svårigheter står nödvändigheten av att få fram tekniskt användbara lagar för de strömningsförlöpp, som förekomma i naturen. Det visar sig

då, att man mycket ofta kan använda sig av ett endimensionellt åskådningssätt, varvid man endast betraktar de i strömningens huvudriktning uppträdande förloppen och inskränker sig till medelförhållandena. Genom tillfogande av experimentellt funna koefficienter bringas härefter de teoretiska härledningarna att i möjligaste utsträckning överensstämma med de verkliga förhållandena.

Efter denna allmänna översikt skola vi nu först studera några nödvändiga och användbara rörelsebegrepp, d.v.s. vätskerörelsens kinematik och sedan i nästföljande avsnitt härleda några för den ideella vätskan gällande rörelsekvationer.

31. Grunddragen av vätskerörelsens kinematik.

I närmast följande avsnitt skola några viktiga begrepp ur den geometriska rörelseläran för vätskor diskuteras. Härvid bortses således tillsvidare från de verkande krafterna. Vad som eftersträvas, är en rent geometrisk beskrivning av hur rörelsen försiggår.

311. Bankurva, väg, strömlinje.

Vid en beskrivning av huru en vätska rör sig har vissa geometriskt definierade linjer och ytor fått en speciell betydelse. Med en vätskepartikels eller ett vätskeelements bana förstår man sammanfattningen av de på varandra kontinuerligt följande lägen, partikeln (elementet) under rörelsen kommer att intaga. Experimentellt kunna bankurvor göras synliga medelst införande av färgämne, aluminiumpulver o.s.v. i det strömmande mediet. Dammpartiklar i luften och föreningar av olika slag i strömmande vatten kunna också ge en uppfattning om partiklarnas banor.

Avståndet mellan tvenne punkter på banan längs densamma kallas partikelns väg (eller banelement vid infinitesimala avstånd). Med partikeln medelhastighet menas kvoten mellan den på en viss tid tillryggalagda vägen och tiden själv. Hastigheten i ett visst ögonblick eller den momentana hastigheten är första derivatan av vägen med avseende på tiden. Hastigheten är en riktad storhet, d.v.s. en vektor.

En strömlinje är en linje, som i varje punkt anger hastighetens riktning, d.v.s. i varje punkt av strömlinjen är den där rådande hastighetens riktning tangent till linjen. Se figur 3.01!

Betrakta en serie av vätskepartiklar i ett visst ögonblick $T = t_1$. Antag att vid varje partikel hastighetsvektorn tänkes uppritad. Dessa visa då varje partikels momentana hastighet. Uppritas i detta ögonblick en serie strömlinjer

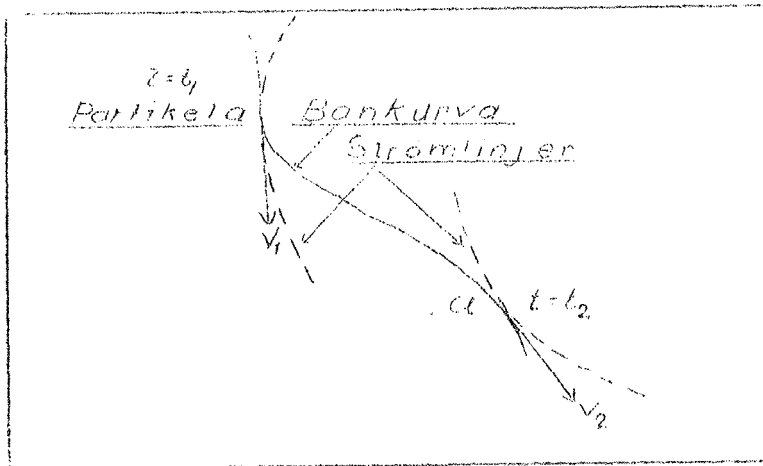


Fig. 3.01

utvisande hastighetens riktning i varje punkt av vätskan, erhålles en s.k. strömbild.

Vid en annan tidpunkt $T = t_2$ ha partiklarna längs sina bankurvor förflyttat sig till andra lägen. Figur 3.01 återger en sådan partikels (a) läge vid två olika tidpunkter. Uppritas även vid det senare ögonblicket strömlinjer erhålles i allmän-

het en annan strömbild. En bankurva hänför sig till en bestämd partikels rörelse eller förflyttning under en viss tid; en strömlinje däremot uppvisar den momentana hastighetens riktning i ett visst ögonblick. Två strömlinjer kunna aldrig skära varandra (varför?).

I detta arbete kommer vägen längs en bankurva i allmänhet att betecknas med s liksom även strömlinjerna. Den momentana hastigheten längs bankurvan (eller strömlinjen) kan då tecknas

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (3.01)$$

312. Stationära strömningar, strömrör, referenssystem.

Om en strömning (ett tillstånd) icke förändras med tiden säges strömningen vara stationär. Hastighet, täthet, tryck etc. behålla sina värden oförändrade vid de olika punkterna av vätskan, d.v.s. alla tidsderivator äro = 0. Däremot kan naturligtvis de för strömningen karakteristiska värdena variera från punkt till punkt, d.v.s. ortsderivatorna $\neq 0$. Motsatsen till stationär strömning är icke stationär (variabel). Eftersom vid stationär strömning strömbilden ej ändras med tiden, komma bankurvor och strömlinjer att sammanfalla.

Om man inuti en vätska i strömning betraktar en begränsad del i strömningens riktning och låter begränsningen utgöras av strömlinjer, erhålles ett strömrör eller en strömtub (vektortub). Vid stationära strömningar måste enligt det föregående överallt i strömröret framrinna samma vätskemängd.

Ibland är det möjligt att genom lämpligt val av referenssystem (koordinat-system) överföra en icke stationär strömning till en stationär och vice versa. Så t.ex. kan en observatör från en båt iakttaga stationär strömning kring båten, medan en observatör från stranden iakttar icke stationär strömning, allteftersom båten kommer och passerar. Liknande gäller t.ex. en observatör, som från en bro

iakttar strömningen kring en bropelare och en annan observatör, som från en passerande båt iakttar samma strömning.

313. Lagranges respektive Eulers metod att beskriva en vätskas rörelse.

Two huvudmetoder att beskriva en vätskas rörelse har uppfunnits: Lagranges respektive Eulers metod. Lagranges (Joseph, Louis Lagrange 1736-1813) metod går ut på att beskriva den enskilda vätskepartikelns rörelse. En beskrivning av den enskilda partikelns bankurva skulle vara ett exempel på Lagranges metod. Man söker med andra ord att bestämma partikelns läge som funktion av initialläget och tiden. På samma sätt söker man bestämma tryck, hastighet, acceleration etc. längs banan.

Eulers metod innebär, att de för strömningen karakteristiska storheterna beskrivas såsom funktioner av läge och tid. Betrakta t.ex. strömningen i röret A vid sektionen BC figur 3.02. Den parabelformade kurvan BB'C visar hastighetens

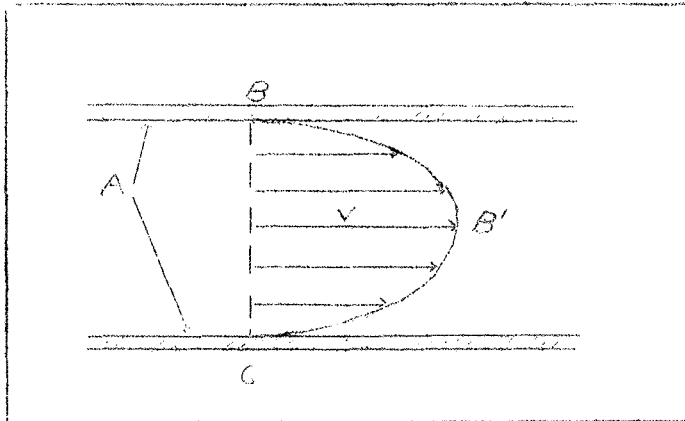


Fig. 3.02

fördelning i tvärsnittet. Olika partiklar eller element passera oavbrutet sektionen, men man känner icke vilka element, som i ett visst ögonblick passera sektionen. Den hastighet, med vilken de passera sektionen, kan däremot anges, såvida hastighetsfördelning är känd.

Allmänt innebär Eulers metod, att hastigheten, trycket, accelerationen, tätheten m.m. sökas som funktioner av koordinaterna x, y och z samt tiden t . Symboliskt kan alltså i anslutning till figur 3.03 t.ex. hastighetens komponenter i punkten P uttryckas med ekvationerna

$$\begin{aligned}v_x &= f_1(x, y, z, t) \\v_y &= f_2(x, y, z, t) \\v_z &= f_3(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{3.02}$$

där v_x, v_y och v_z äro hastighetskomponenterna längs respektive koordinataxlar. Detta ekvationssystem kan i vektor-form skrivas

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z\tag{3.03}$$

Härvid användes ett streck över respektive bokstäver för att ange, att desamma måste uppfattas som vektorer.

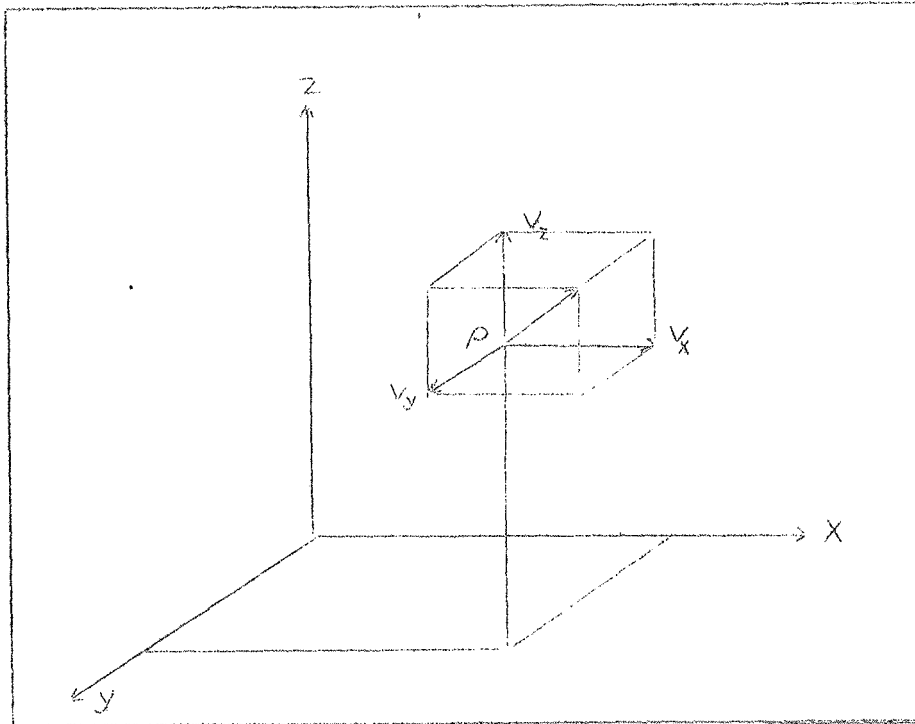


Fig. 3.03

314. Hastighet och acceleration.

I allmänhet varierar hastigheten vid en vätskas strömning både med distansen längs en strömlinje och med tiden, således

$$v = f(s, t) \quad (3.04)$$

Tillämpas på detta uttryck reglerna för bildandet av partiella derivator och totala differentier, erhålles

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (3.05)$$

Divideras detta uttryck led för led med dt, erhålles

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.06)$$

$\frac{dv}{dt}$ kallas här totala accelerationen, $v \frac{\partial v}{\partial s}$ kallas konvektiva accelerationen och $\frac{\partial v}{\partial t}$ lokala accelerationen.

$v \frac{\partial v}{\partial s}$ kan även skrivas $\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s}$. Fysikaliskt anger uttrycket den acceleration, som en punkt måste ha för att från hastigheten v under vägen ds komma upp till hastigheten $v+dv$.

$\frac{\partial v}{\partial t}$ anger hastighetens växling med tiden i en viss punkt. Vid stationär strömning är $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$.

Totala accelerationen $\bar{a} = \frac{dv}{dt}$ är en vektorstorhet, vars vektorkomponenter enligt ekvation (3.02) böra tecknas

$$\bar{a}_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \bar{a}_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{och} \quad \bar{a}_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad \text{S\u00e5ledes g\u00e4ller}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z \quad (3.07)$$

Ur ekvationerna (3.02) erh\u00e5lles enligt differentialkalkylen

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.08)$$

F\u00f6r station\u00e4r str\u00f6mning g\u00e4ller

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

315. Kontinuitetsekvationen.

I ett rum, d\u00e4r en v\u00e4tska str\u00f6mmar, betrakta vi ett prismatiskt element A med kantl\u00e4ngderna dx , dy och dz (se figur 3.04!). V\u00e5r uppgift \u00e4r att f\u00f6rs\u00f6ka ge en matematisk formulering p\u00e5 lagen om massans of\u00f6rst\u00f6rbarhet eller i detta fall, att den i det prismatiska elementet A instr\u00f6mmande massan m\u00e5ste

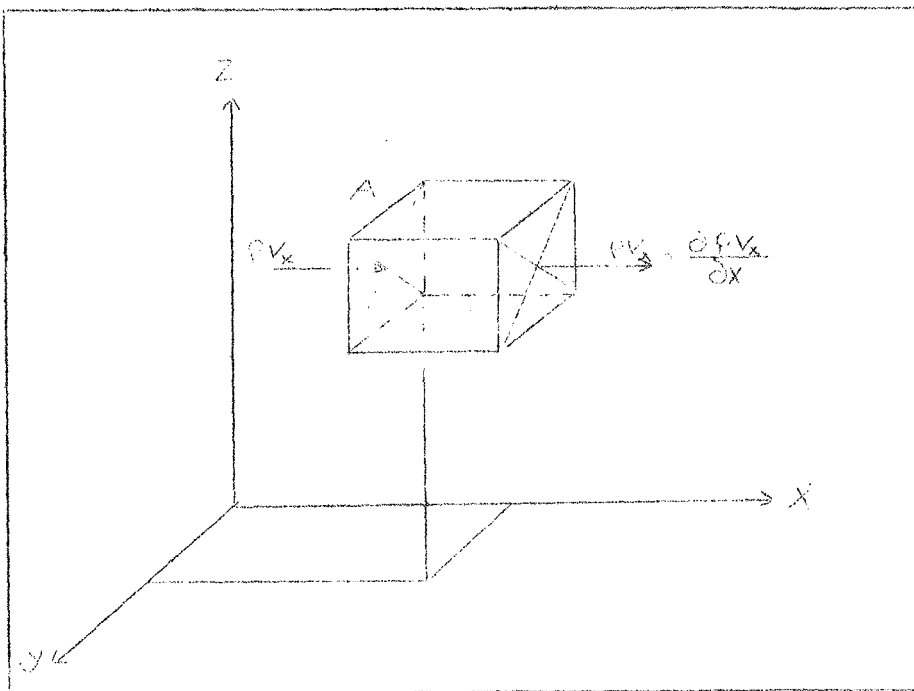


Fig. 3.04

vara lika med den fr\u00e5n elementet utstr\u00f6mmande massan minskad med massf\u00f6r\u00e4ndringen i elementet. T\u00e4theten betraktas h\u00e4r som variabel (ρ \u00e4r en skal\u00e4r eller en ren punktfunktion).

I anslutning till figur 3.04 uppst\u00e4lla vi en balansr\u00e4kning f\u00f6r massf\u00f6r\u00e4ndringen i elementet A.

Längs x-axeln gäller

$$\rho v_x dydz - \left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right) dydz \quad (a)$$

Längs y-axeln gäller

$$\rho v_y dx dz - \left(\rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy \right) dx dz \quad (b)$$

och längs z-axeln

$$\rho v_z dx dy - \left(\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (c)$$

Summeras dessa uttryck erhålles för tiden dt massförändringen

$$- \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (d)$$

Under tiden dt har ρ ändrats med beloppet $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ (Tänk noga igenom uttrycket!), vilket ger massförändringen

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz = \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (e)$$

eller slutligen

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0} \quad (3.09)$$

Detta är den generellt giltiga kontinuitetsekvationen, vilken i många grenar av den matematiska fysiken spelar en stor roll.

Vid stationär strömning är $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ och ekvationen (3.09) får formen

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

För egentliga vätskor (alltså ej gaser) kan ρ i allmänhet betraktas såsom konstant. Då gäller

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \quad (3.10)$$

Vid plan strömning eller tvådimensionell gäller att $v_z = 0$, varför kontinuitetsekvationen ytterligare förenklas och kan skrivas

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Vid parallellströmning eller endimensionell strömning är $v_z = v_y = 0$, varför kontinuitetsekvationen antar den enkla formen

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

eller

$$\frac{dv_x}{dx} = 0$$

som integrerad ger

$$v = \text{konst}$$

Observera att en endimensionell strömning fordrar att alla strömlinjer äro parallella. Även en så enkel strömning, som den i figur 3.05 återgivna, är strängt taget tvådimensionell. Strömningen antages här ske i ett plan, men det är tydligt att t.ex. hastighetsvektorn v har komponenter både längs x -axeln och längs y -axeln.

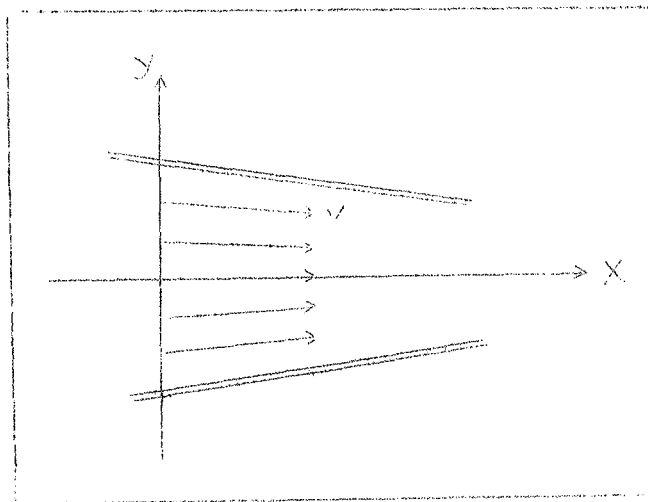


Fig. 3.05

316. Förenklat betraktelsesätt, medelvärde, flöde.

Vid tekniska tillämpningar av hydromekanikens satser har det visat sig, att många problem, som i verkligheten äro tre- eller tvådimensionella, kunna behandlas som endimensionella. I stället för att räkna med från punkt till punkt varierande värden av den sökta storheten räknar man med medelvärden.

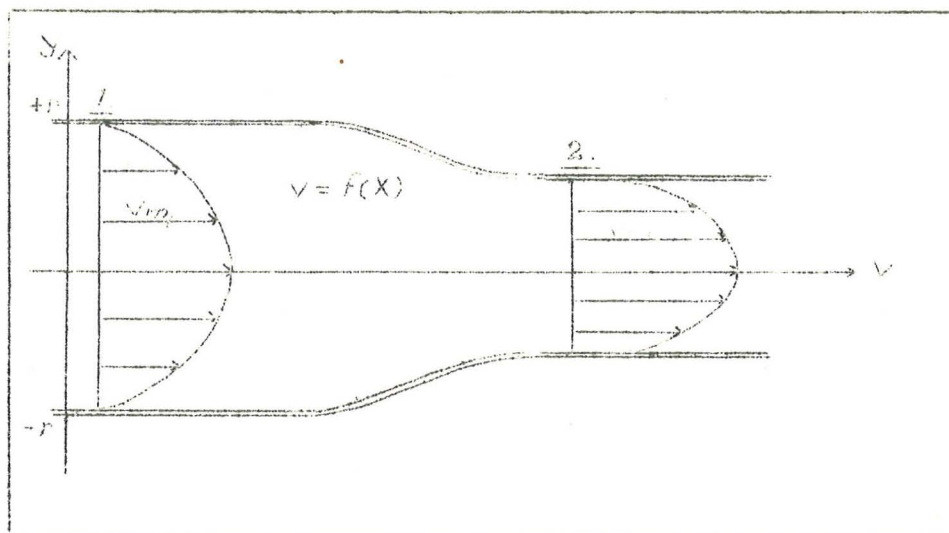


Fig. 3.06

Figur 3.06 utgör en längdsektion av en rörförminskning. Strömningen genom denna är i själva verket tredimensionell men, då strömbilden i alla diameterplan längs röraxeln är lika, kan densamma även strängt matematiskt behandlas som tvådimensionell. Vid de flesta tekniskt viktiga tillämpningar göres dock ytterligare förenklingar, genom att rörelsen betraktas såsom endimensionell och endast de i längdriktningen gående variationerna undersöks eller beaktas. Denna förenkling är så mycket mer nödvändig som hastighetsfördelningen ofta är okänd eller mycket svår att ange (jfr längre fram under begreppet turbulent strömning!)

I anslutning till figur 3.06 erhålla vi för medelhastigheten v_m det generellt giltiga uttrycket

$$\int v dA = \int f(x) dA = v_m \cdot A$$

eller

$$v_m = \frac{\int v dA}{A} = \frac{\int f(x) dA}{A} \quad (3.11)$$

Om vätskemängden dQ antages passera sektionen 1 under tiden dt säges $\frac{dQ}{dt}$ vara flödet (= vätskeföringen) eller den momentana vätskemängd, som per tidsenhet passerar rörsektionen i ett givet ögonblick. Om strömningen är stationär gäller tydligen

$$\frac{dQ}{dt} = \text{konst} = q$$

För v_m gäller då även

$$v_m = \frac{q}{A} \quad (3.12)$$

Då det av sammanhanget framgår, att vi avse medelhastigheten, komma vi att särskilt längre fram utelämma index m . Man bör dock alltid vara klar över skillnaden mellan medelhastighet och verklig från punkt till punkt och från ögonblick till ögonblick (pulsationer) varierande hastighet.

3161. Kontinuitetsekvationen gällande för medelhastigheten v_m .

Betrakta figur 3.06! Om vi beteckna rörsektionens vid 1 area med A_1 och vid 2 med A_2 samt vätskans täthet vid 1 och 2 med ρ_1 respektive ρ_2 , gäller enligt lagen för massans oförstörbarhet

$$v_{m1} \cdot A_1 \cdot \rho_1 = v_{m2} \cdot A_2 \cdot \rho_2$$

och om vätskan är inkompressibel, d.v.s. $\rho_1 = \rho_2$

$$\boxed{v_{m1} \cdot A_1 = v_{m2} \cdot A_2} \quad (3.13)$$

Produkten $A \cdot v$ är tydligen lika med den vätskemängd som per tidsenhet passerar ett godtyckligt tvärsnitt. Således gäller

$$q = A \cdot v_m \quad (3.14)$$

Vid stationär strömning är produkten av tvärsnitt och motsvarande medelhastighet konstant = flödet.

Ex. 3.01. I en konisk rörförträngning av vidstående (figur 3.07) dimensioner ökar q (= flödet) från 5 l/s till 15 l/s under 5 sek. Huru stor är den lokala, konvektiva och totala accelerationen (medeltal) i rörtvärsnittet?

Lösning: Tydligen gäller för den lokala accelerationen i A

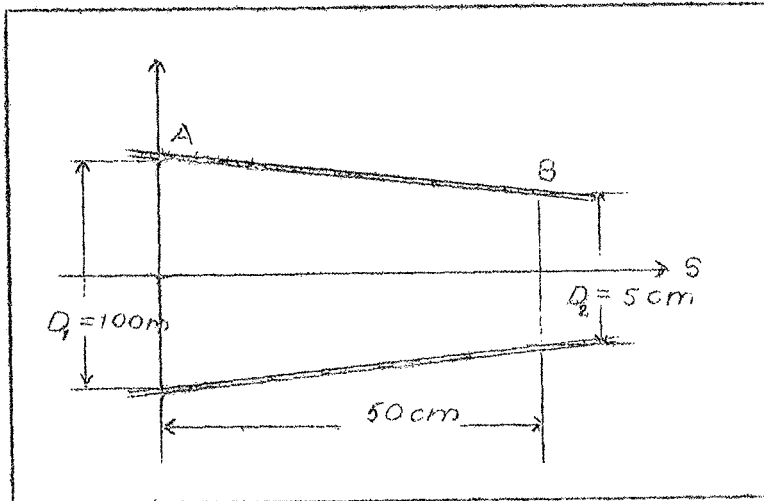


Fig. 3.07

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\frac{0.015}{\pi \frac{0.1}{4}^2} - \frac{0.005}{\pi \frac{0.1}{4}^2}}{5} =$$

$$= \frac{0.040}{0.05\pi} = 0.26 \text{ m/s}^2$$

och i B

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\frac{0.015}{\pi \frac{0.05}{4}^2} - \frac{0.005}{\pi \frac{0.05}{4}^2}}{5} =$$

$$= \frac{0.040}{0.0025 \cdot 5\pi} = \frac{16}{5\pi} =$$

$$= 1.02 \text{ m/s}^2$$

Den konvektiva accelerationen i A blir

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{0.005}{\pi \frac{0.1}{4}^2} \cdot \frac{\frac{0.005}{\pi \frac{0.05}{4}^2} - \frac{0.005}{\pi \frac{0.1}{4}^2}}{0.5} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{12}{\pi} = \frac{24}{\pi} = 2.43 \text{ m/s}^2$$

På analogt sätt beräknas den konvektiva accelerationen i B till 9.73 m/s^2 .

Totala accelerationen i A = $0.26 + 2.43 = 2.69 \text{ m/s}^2$

" " i B = $1.02 + 9.73 = 10.75 \text{ m/s}^2$

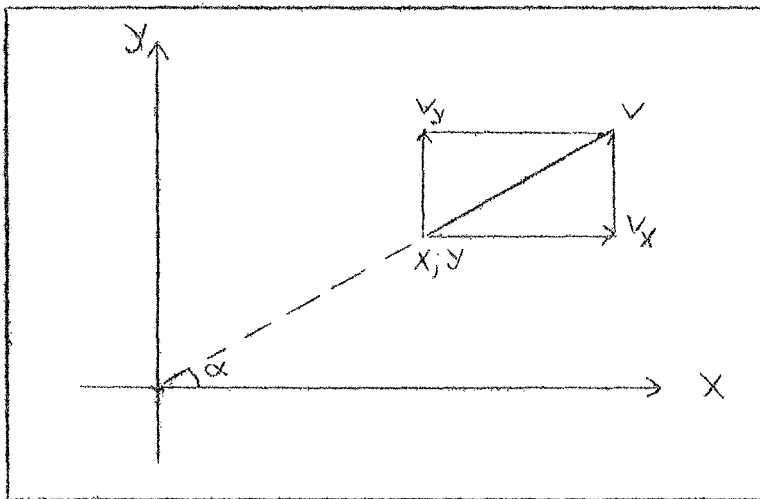
Observera den konvektiva accelerationens betydande storlek!

Svar: För sektionen A gäller: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0.26 \text{ m/s}^2$, $v \frac{\partial v}{\partial t} = 2.43 \text{ m/s}^2$ och

$\frac{dv}{dt} = 2.69 \text{ m/s}^2$, och för B: $\frac{\partial v}{\partial t} = 1.02 \text{ m/s}^2$, $v \frac{\partial v}{\partial t} = 9.73 \text{ m/s}^2$ samt $\frac{dv}{dt} = 10.75 \text{ m/s}^2$.

Ex. 3.02. Vid en viss plan strömning är hastigheten v i varje punkt riktad från origo längs radius vector. Uttryck v_x och v_y med hjälp av koordinaterna x och y samt v !

Lösning: Med de på figur 3.08 införda beteckningarna erhålles lätt



$$v_x = v \cos \alpha =$$

$$= \frac{v \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$v_y = v \sin \alpha =$$

$$= \frac{v \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Fig. 3.08

Ex. 3.03. Vid en tvådimensionell strömning mellan tvänne plattor A och B är hastighetsfördelningen i en godtycklig sektion given genom en parabel med maximal hastighet v_{\max} mitt emellan plattorna och hastigheten 0 vid plattornas insida. Sök medelhastigheten uttryckt i v_{\max} !

Lösning: I anslutning till problemets formulering har figur 3.09 uppritats. Koordinatsystemet lägges lämpligen så som figuren visar. Parabelns ekvation kan

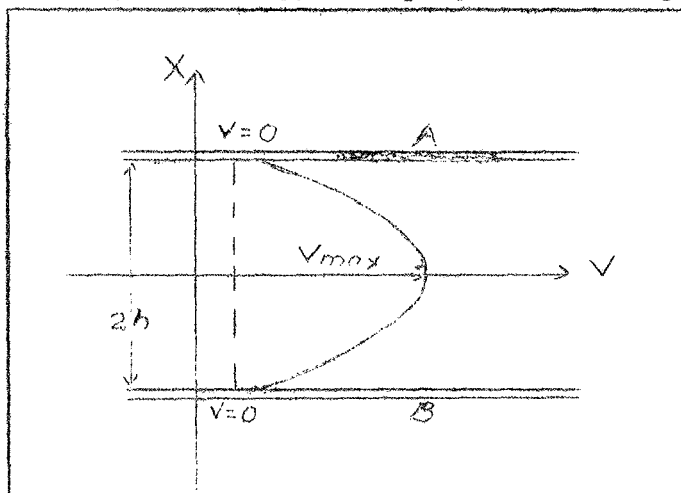


Fig. 3.09

tydligen tecknas

$$v = v_{\max} - cx^2$$

där för $x = \pm h$

$$v = v_{\max} - ch^2 = 0$$

vilket ger

$$c = \frac{v_{\max}}{h^2}$$

Det analytiska uttrycket för hastighetsfördelningen blir följaktligen

$$v = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

Enligt ekvation (3.11) är nu medelhastigheten v_m definierad av ekvationen

$$v_m = \frac{\int v da}{A}$$

Detta ger i vårt speciella fall, om breddenheten betraktas

$$v_m = \frac{\int v dA}{A} = \frac{\int v \cdot l \cdot dx}{2h \cdot l} = \frac{2}{2h} \int_0^h v_{\max} \left[1 - \left(\frac{x}{h} \right)^2 \right] dx = \frac{v_{\max}}{h} \int_0^h \left[1 - \frac{x^2}{h^2} \right] dx$$

$$v_m = \frac{2}{3} v_{\max}$$

Ex. 3.04. En rörförträngning tänkes formad i överensstämmelse med den rotationsyta, som uppkommer, om cirkelbågen AB i figur 3.10 roterar kring x-axeln. Ange hastighetens variation vid en vätskas strömning genom rörförträngningen som funktion av x-koordinaten!

Lösning: Den till cirkelbågen hörande fullständiga cirkeln har tydligen

ekvationen

$$x^2 + (y - 1.05)^2 = 1$$

Löses y ur denna ekvation erhålles

$$y = 1.05 - \sqrt{1 - x^2}$$

Av figuren erhålles lätt, att y är lika med den variabla rörradien. Antages vidare flödet vara q, erhålles det sökta uttrycket för v till

$$v = \frac{q}{\pi (1.05 - \sqrt{1 - x^2})^2}$$

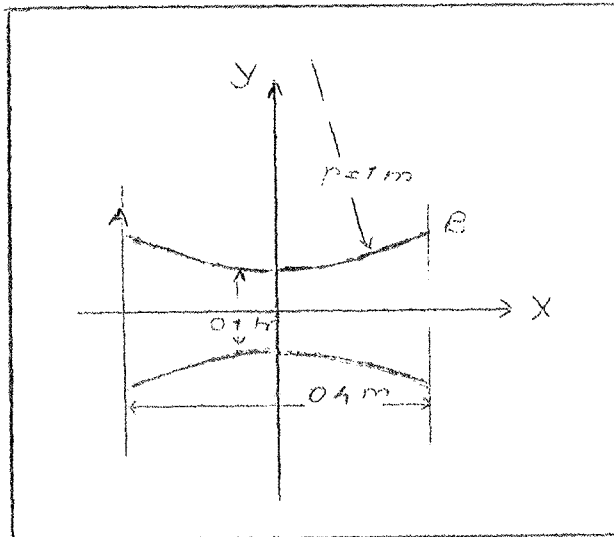


Fig. 3.10

32. Några för den ideella vätskan gällande lagar.

Den föregående diskussionen har givit oss vissa rent kinematiska grundbegrepp, vilka äro lika användbara såväl vid beskrivningen av ideella som viskösa vätskors rörelse. Inom kinematiken är en rent matematisk behandling av problemen ofta möjlig och givande. Vi komma likväl icke långt i förståelsen av vätskornas rörelse med hjälp av rent geometriskt matematiska begrepp. Lika viktigt som det är att kunna entydigt beskriva en rörelse, lika viktigt är det att förstå dess orsaker. Vi måste med andra ord införa ett dynamiskt betraktelsesätt, där rörelsens orsaker äro lika viktiga som rörelsen själv. Här spela de från stela kroppars

mekanik hämtade begreppen kraft, tröghet, friktion m.fl. avgörande roller. Den allmänna mekaniken är en nödvändig grund för hydrodynamiken liksom för hydro-mekaniken överhuvud taget. Detta torde ha framgått av de hittills givna diskussionerna och det torde bli ännu tydligare i fortsättningen. I den kommande framställningen liksom i det föregående skola vi dock försöka att på naturligaste sätt endast anknyta till vissa elementära mekaniska begrepp.

I närmast följande avsnitt införes det dynamiska betraktelsesättet först på en ideell vätska, varvid de i strömmens huvudriktning uppträdande förloppen huvudsakligen betraktas. De härvid erhållna ekvationerna kunna sedan medelst införda lämpliga experimentellt bestämda korrektionstermer och koefficienter tillämpas på viskösa vätskors strömning.

321. Rörelseekvationerna för en ideell vätska hänfödda till naturliga koordinater.

Om en kurvas egenskaper studeras med hjälp av förflyttningen s längs kurvan och den i varje punkt mot kurvan vinkelräta normalen n till krökningscentrum, talar man om naturliga koordinater (nat. parameterframställning). De i en viss punkt uppträdande egenskaperna äro då funktioner av s, n och t. Om vi beteckna en allmän egenskap med c (jfr f.ö. avd. 314!), gäller således

$$c = f(s, n, t) \quad (3.16)$$

Vi skola nu under utnyttjande av dessa koordinater uppställa rörelseekvationerna för en ideell vätska, som under tyngdkraftens inverkan befinner sig i plan rörelse. Inuti en sådan vätska betrakta vi i ett visst ögonblick ett vätskelement A (se figur 3.11!) Elementets bana sammanfaller momentant med den genom elementet gående strömlinjen s. Elementet må ha formen av en parallelepiped med kantlängderna Δs , Δn och Δb . Δs är parallell med den genom A gående strömlinjens tangent i A, Δn är parallell med krökningsradien R och Δb är vinkelrät mot papperets plan. Vätskans specifika tyngd är γ och täthet ϱ . Med de på figuren i övrigt införda beteckningarna, vilkas betydelse eller innebörd tillräckligt tydligt torde framgå av figuren, uppställa vi nu rörelseekvationerna längs tangentricketningen och längs normalen mot krökningscentrum. Vi använda Newtons kraftekvation under formen (1.04)

$$F = \frac{1}{g_0} \cdot m \cdot a$$

Elementets yta vinkelrätt mot s är $\Delta A_s = \Delta n \cdot \Delta b$ och dess yta vinkelrätt mot n $\Delta A_n = \Delta s \cdot \Delta b$

Således gäller längs s-riktningen

$$-\Delta A_s \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \Delta s + \gamma \Delta A_s \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha = \frac{1}{g_0} \cdot \rho \cdot \Delta A_s \cdot \Delta s \cdot a_t \quad (a)$$

Figuren ger vidare

$$\cos \alpha = - \frac{\partial z}{\partial s} \quad (b)$$

Här är tydligen enligt (3.16)

$$v = f(s, n, t) \quad (c)$$

varför

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial n} dn + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (d)$$

vilket ger tangentialaccelerationen

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial n} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (e)$$

men $\frac{dn}{dt}$ är tydligen = 0 och således

$$a_t = v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (f)$$

(jfr för övrigt avd. 314!)

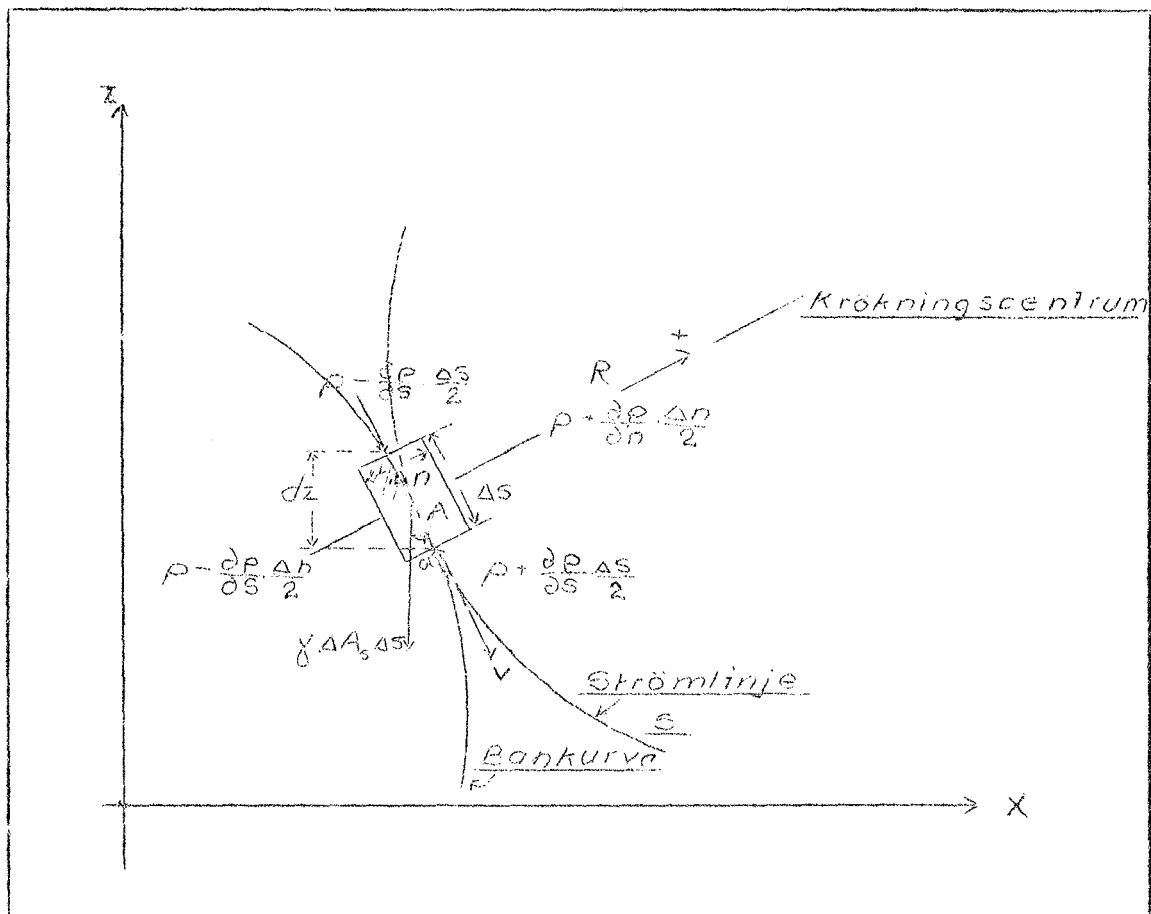


Fig. 3.11

Införes detta uttryck på a_t i ekvation (a) samt även uttrycket på $\cos \alpha$ enligt ekvationen (b) och hyfsas ekvationen, erhålles

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \gamma \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\rho}{g_0} \left(v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (g)$$

vilket även kan skrivas

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\rho v^2}{2g_0} + p + \gamma \cdot z \right) + \frac{\rho}{g_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

Denna ekvation kunna vi multiplicera med ds och integrera längs en ström-
linje. Vi erhålla då

$$\frac{\rho v^2}{2g_0} + p + \gamma \cdot z + \frac{\rho}{g_0} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} dt = c \quad (3.18)$$

I denna ekvation är c en konstant längs den betraktade ström-
linjen.

För rörelsen längs normalen mot krökningscentrum gäller tydligen

$$-\Delta A_n \cdot \frac{\partial p}{\partial n} - \gamma \Delta A_n \cdot \Delta n \cdot \sin \alpha = -\frac{1}{g_0} \cdot \rho \Delta A_n \cdot \Delta n \cdot \frac{v^2}{R} \quad (a')$$

Enligt mekaniken är centripetalaccelerationen $a_c = \frac{v^2}{R}$ och centrifugalkraften $-\frac{mv^2}{g_0 R}$. Figuren ger vidare (vid närmare betraktande)

$$\sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial n} \quad (b)$$

Vi införa detta i ekvationen (a') samt förenkla så långt som möjligt. Härvid er-
hålles

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \gamma \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\rho}{g_0} \cdot \frac{v^2}{R} \quad (3.19)$$

Ekvationerna (3.18) och (3.19) äro sålunda rörelseekvationerna i naturliga
koordinater för en ideell vätskas rörelse i ett plan (plan rörelse). De kunna
sägas vara en form av Eulers allmänna rörelseekvationer (se längre fram!) och äro
av fundamental betydelse för hydrodynamiken. Den av oss gjorda härledningen har
genomförts under vissa förenklande antaganden. Med relativt små förändringar skul-
le det ha varit möjligt att göra härledningen fullt generell, d.v.s. med hänsyns-
tagande till en tredimensionell kurva (ström-
linje), med ρ variabel och under hän-
synstagande till en godtyckligt verkande masskraft. Vi skulle då ha erhållit ek-
vationerna (3.18) och (3.19) under en mera allmän form. Då tyngdkraften i de allra
flesta fall är den primärt verksamma masskraften och vattnet t.ex. praktiskt taget
osammantryckbart äro dock formerna (3.18) och (3.19) för våra behov tillräckligt
generella.

322. Bernoullis ekvation.

Betrakta en inkompressibel, friktionsfri vätskas stationära rörelse längs en
ström-
linje eller i ett strömrör, vars radio är så liten att $v = v_m$ gäller för
samtliga vätskepartiklar! I ekvationen (3.18), är då

$$\frac{\rho}{g_0} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} dt = 0$$

och densamma övergår till formen (Obs! $\gamma = \frac{g}{g_0} \cdot \rho$)

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{konst}} \quad (3.20)$$

Detta är Bernoullis ekvation (1738). Det är viktigt att hålla i minnet, att man vid de flesta tillämpningar av denna ekvation måste räkna med medelvärden för en större sektion. Vid t.ex. tillämpningen av Bernoullis ekvation på en vätskas strömning i rör räknar man i allmänhet med rörets centrumlinje som en strömlinje och inför i ekvationen medelvärden gällande för hela rörarcen. Genom att multiplicera termen $\frac{v^2}{2g}$ med en faktor α , som varierar mellan 1 och 2, kan en korrektion införas för den typ av hastighetsfördelning, som existerar i röret.

3221. De enskilda termernas betydelse i Bernoullis ekvation.

Undersöka vi de enskilda termernas betydelse i Bernoullis ekvation under formen (3.20) finna vi:

$$[z] = L$$

$$\left[\frac{p}{\gamma} \right] = \frac{M \cdot L^{-1} T^{-2}}{M L^{-2} T^{-2}} = L$$

samt

$$\left[\frac{v^2}{2g} \right] = \frac{L^2 T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L$$

Samtliga termer ha således dimensionen L (längd) och kunna uppfattas som höjder över en godtyckligt vald jämförelsenivå eller ett 0-plan.

Z kallas geometrisk höjd och anger partikelns eller sektionens höjdläge över det valda horisontella 0-planet. $\frac{p}{\gamma}$ kallas tryckhöjd och anger höjden av den vätskepelare med specifika tyngden γ , som ger trycket p vid basen. $\frac{v^2}{2g}$ är den från fasta kroppars mekanik bekanta hastighetshöjden. Den anger, från vilken höjd en partikel utan begynnelsehastighet måste falla fritt för att uppnå hastigheten v . Med hjälp av dessa termer kan tydligen Bernoullis ekvation formuleras så: När en ideell vätska befinner sig i stationär strömning, är för alla punkter utefter en strömlinje summan av hastighetshöjden, tryckhöjden och den geometriska höjden konstant.

Ekvationen (3.20) kan grafiskt åskådliggöras så, som figur 3.12 visar. Ovanför de geometriska höjderna ha tryck- och hastighetshöjderna inlagts. Totalhöjdernas ändpunkter ligga på ett horisontalplan, som kallas ifrågakvarande strömlinjes (strömtubs) ideella nivå.

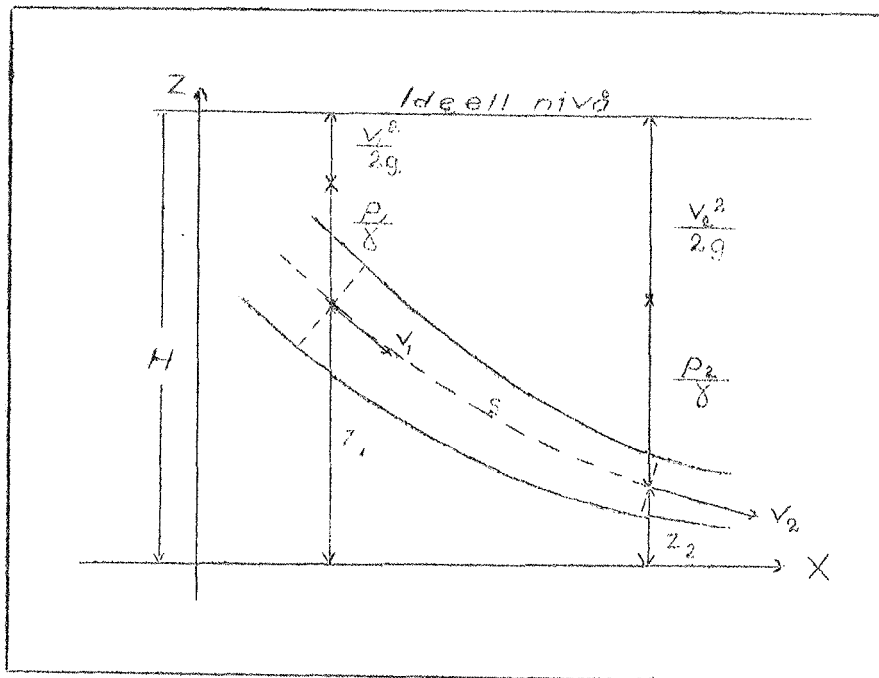


Fig. 3.12

Konstanten c blir tydligen också en höjd och har å figuren betecknats med H .

Multipliceras ekvationen (3.20) med $\gamma \Delta V$ ($V = \text{volym}$) och införes ρ , erhålles

$$\frac{\rho \Delta V \cdot v^2}{2 g_0} + p \Delta V + \gamma \cdot z \Delta V = C_1 \quad (3.21)$$

Undersöka vi nu dimensionerna på de ingående termerna finna vi

$$\left[\frac{\rho \Delta V \cdot v^2}{2 g_0} \right] = ML^{-3} \cdot L^3 \cdot L^2 T^{-2} = ML^2 T^{-2} = [\text{energi}]$$

$$[p \Delta V] = ML^{-1} T^{-2} \cdot L^3 = ML^2 T^{-2} = [\text{energi}]$$

$$[\gamma z \Delta V] = ML T^{-2} \cdot L^{-3} \cdot L \cdot L^3 = ML^2 T^{-2} = [\text{energi}]$$

I överensstämmelse med förut givna förklaringar och i anslutning till mekaniken kallas:

$$\frac{\rho \Delta V \cdot v^2}{2 g_0} \quad \text{vätskeelementets kinetiska energi eller hastighetsenergi.}$$

$$p \Delta V \quad \text{tryckenergi och}$$

$$\gamma z \Delta V \quad \text{potentiella energien eller lägesenergi.}$$

Vi kunna således formulera Bernoullis teorem sålunda: Vid en ideel vätskas strömning är summan av hastighetsenergin, tryckenergin och lägesenergin konstant längs en strömlinje. Av detta se vi att Bernoullis ekvation endast är en speciell formulering av lagen om energiens oförstörbarhet (termodynamikens 1. huvudsats). Det kan kanske vara av intresse att påpeka, att många beröringspunkter existera mellan hydromekniken och termodynamiken. Särskilt blir detta

fallet i den mån hydromekniken även intresserar sig för gasernas jämvikt och rörelse.

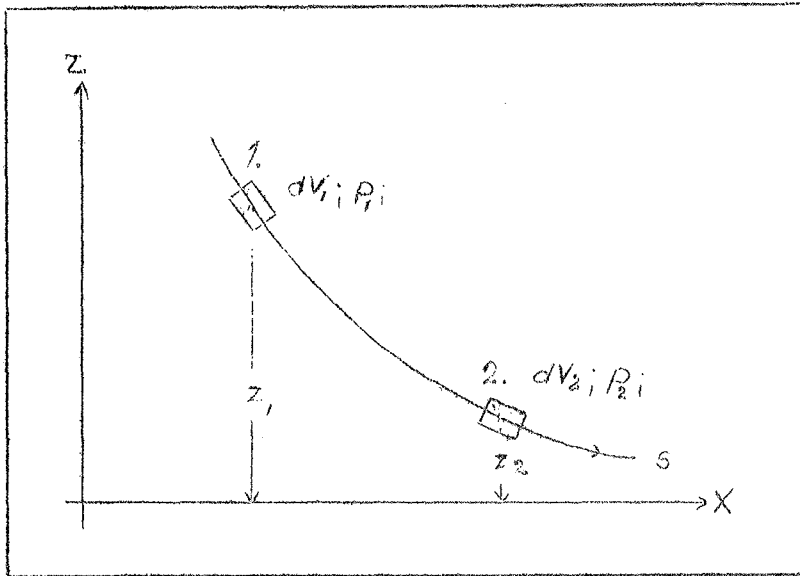


Fig. 3.13

Ex. 3.05. Härled Bernoullis ekvation utifrån en energibetraktelse!

Lösning: I det strömmande mediet betrakta vi en strömlinje och på denna två punkter 1 och 2. Längs strömlinjen rör sig vätskeelementet ΔV . Se i övrigt figur 3.13! Vi kunna uppställa följande schema.

<u>Energiform</u>	<u>Läge I</u>	<u>Läge II</u>
Hastighetsenergi	$\frac{\rho_1 \cdot \Delta V_1 \cdot v_1^2}{2g_0}$	$\frac{\rho_2 \cdot \Delta V_2 \cdot v_2^2}{2g_0}$
Tryckenergi	$p_1 \cdot \Delta V_1$	$p_2 \cdot \Delta V_2$
Lägesenergi	$\gamma_1 \cdot \Delta V_1 \cdot z_1$	$\gamma_2 \cdot \Delta V_2 \cdot z_2$

Om nu strömningen sker utan förluster, d.v.s. är friktionsfri, måste enligt lagen för energiens oförstörbarhet gälla

$$\frac{\rho_1 \cdot \Delta V_1 \cdot v_1^2}{2g_0} + p_1 \cdot \Delta V_1 + \gamma_1 \cdot \Delta V_1 \cdot z_1 = \frac{\rho_2 \cdot \Delta V_2 \cdot v_2^2}{2g_0} + p_2 \cdot \Delta V_2 + \gamma_2 \cdot \Delta V_2 \cdot z_2$$

eller

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{2g_0} + p_1 + \gamma_1 z_1 = \frac{\rho_2 v_2^2}{2g_0} + p_2 + \gamma_2 z_2 \quad (3.22)$$

Vid denna härledning har ej ρ förutsatts vara konstant. Denna ekvation kan därför användas vid expanderande gasers strömning.

Ex. 3.06. I en horisontal rörledning är vid ett ställe vattnets hastighet 1.5 m/s och trycket 3 kp/cm². Huru stort är trycket på ett annat ställe, vars area är 5 ggr mindre, om ingen energiförlust antages äga rum.

Lösning: Vi tillämpa ekvation (3.20) och antaga det sökta trycket vara p kp/cm² samt motsvarande hastighet v

$$\frac{1.5^2}{2g} + \frac{3 \cdot 100 \cdot 100}{1000} + Z_1 = \frac{v^2}{2g} + 10p + Z_1$$

Kontinuitetsekvationen ger dessutom

$$1.5 \cdot A = \frac{A}{5} \cdot v$$

eller

$$v = 7.5 \text{ m/s}$$

och således

$$p = 3 - \frac{7.5^2 - 1.5^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 10} = 2.725$$

Svar: Det sökta trycket är 2.73 kp/cm².

Ex. 3.07. Vid en vätskas strömning genom ett rör vet man, att hastigheten i varje punkt av en godtycklig sektion är en funktion av punktens radiella avstånd från rörcentrum. Beräkna vätskeströmmens hastighetsenergi i sektionen!

Lösning: Vi kunna med givna uppgifter symboliskt skriva (se figur 3.14!)

$$v = f(x) \quad (a)$$

där x radiella avståndet från röraxeln. För kinetiska energien gäller enligt Bernoullis ekvation

$$dW = \frac{\rho dV \cdot v^2}{2g_0} \quad (b)$$

Om vi betrakta den per tidsenhet genom ytelementet dA framströmmande massan, gäller tydligen

$$dV = \rho v \cdot dA \quad (c)$$

och följaktligen, om dV enligt ekvation (c) substitueras i (b),

$$dW = \frac{\rho dA \cdot v^3}{2g_0} \quad (d)$$

För hela sektionen erhålles därför

$$W = \frac{\rho}{2g_0} \int v^3 dA = \frac{\rho}{2g_0} \int [f(x)]^3 dA \quad (3.23)$$

Om f(x) kan antagas vara symmetrisk med avseende på röraxeln, är

$$dA = 2\pi r \cdot dx$$

och integralen (3.23) får formen

$$W = \frac{\pi r^2 \rho}{g_0} \int_0^r [f(x)]^3 x dx \quad (3.24)$$

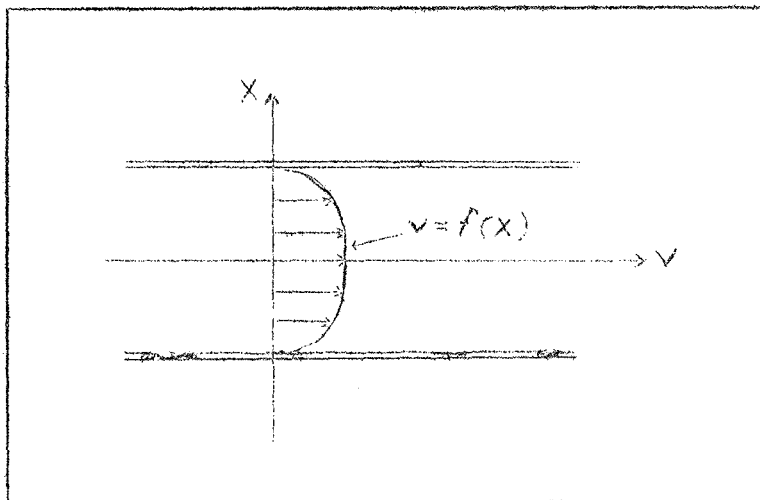


Fig. 3.14

Ex. 3.08. Tillämpa de i föregående exempel vunna resultaten på följande problem: En vätska strömmar mellan tvenne plana parallella plattor, vilkas avstånd från varandra är h . Hastigheten varierar från den ena plattan räknat enligt ekvationen (se även figur 3.15!)

$$v = \frac{4v_{\max}}{h^2} (hy - y^2)$$

a) Beräkna medelhastigheten v_m och b) beräkna α , d.v.s. om v_m insättes i termen för kinetiska energien, vad skall då denna term multipliceras med, för att man skall erhålla verkliga kinetiska energien?

Lösning: a) I anslutning till det föregående och till figur 3.15, erhålla

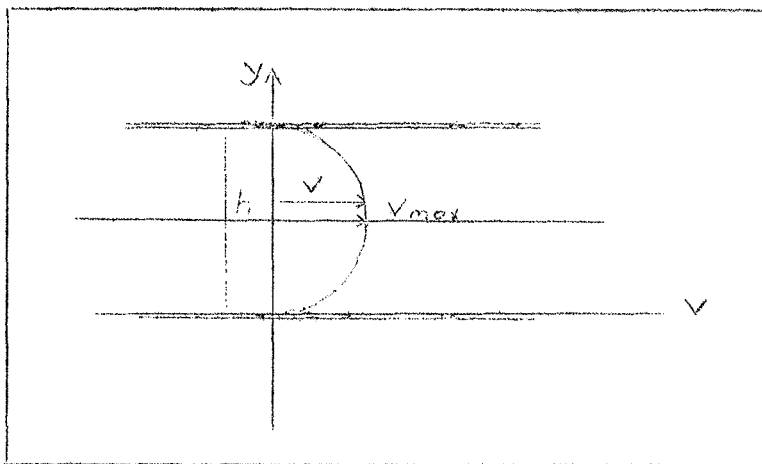


Fig. 3.15

vi

$$v_m \cdot h = \int v dy = \frac{4v_{\max}}{h^2} \int_0^h (hy - y^2) dy$$

$$\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \frac{2}{3} hv_{\max}$$

och således

$$v_m = \frac{2}{3} v_{\max}$$

b) Vi beteckna med W_m kinetiska energien beräknad med hjälp av v_m och med W_e kinetiska energien beräknad med hjälp av v . Således enligt exempel 3.07

$$W_m = \alpha \cdot \frac{\rho \Delta V \cdot v_m^2}{2g_0} = \alpha \cdot \frac{\rho \cdot h \cdot v_m^3}{2g_0} = \frac{\alpha \rho h}{2g_0} \cdot \frac{8}{27} v_{\max}^3$$

och vidare

$$W_e = \frac{\rho}{2g_0} \int [f(x)]^3 dx = \frac{\rho}{2g_0} \int \left[\frac{4v_{\max}}{h^2} (hy - y^2) \right]^3 dy$$

$$W_e = \frac{32\rho v_{\max}^3}{g_0 \cdot h^6} \int_0^h \left[\frac{h^3 y^3}{4} - \frac{3h^2 y^5}{5} + \frac{3hy^6}{6} - \frac{y^7}{7} \right] dy = \frac{32\rho \cdot v_{\max}^3}{140g_0} h$$

Enligt problemets formulering skall $W_m = W_e$, vilket ger villkorsekvationen

$$\alpha \cdot \frac{\rho h}{2g_0} \cdot \frac{8}{27} v_{\max}^3 = \frac{\rho h}{2g_0} \cdot \frac{32}{70} \cdot v_{\max}^3$$

varav

$$\alpha = \frac{54}{35} = 1.54$$

Svar: a) $v_m = \frac{2}{3} v_{\max}$ och b) $\alpha = \frac{54}{35} = 1.54$

Ex. 3.09. En hävert har vidstående dimensioner och verkar under de på figur 3.15 angivna betingelserna. Vilken vätskemängd pr tidsenhet kan maximalt tänkas bli överförd? Beräkna dessutom trycket vid hävertens översta punkt A.

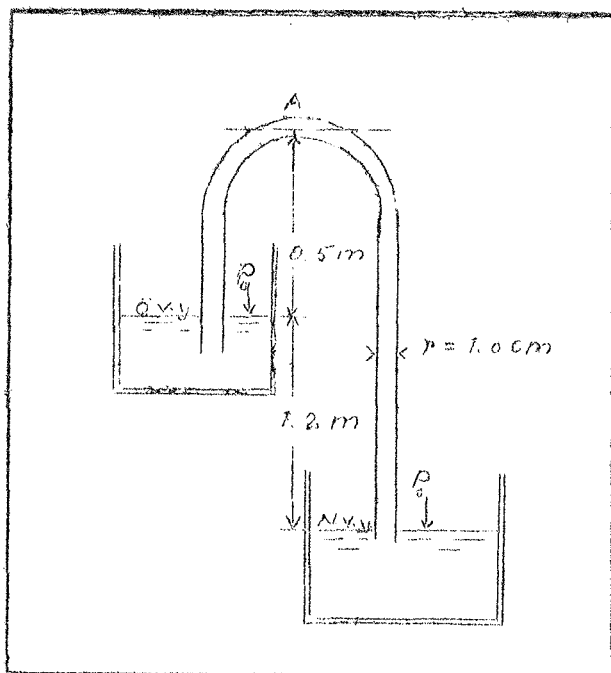


Fig. 3.16

Lösning: Maximala vätskemängden överföres, om vätskan är friktionsfri, då i sådant fall inga friktionsförluster uppkomma. Vi tillämpa Bernoullis ekvation på vätskeytan i det övre kärlet omedelbart utanför häverten och på den undre vätskeytan inuti häverten. Hastigheten hos vätskeytorna kan sättas = 0. Jfr dimensionerna! Således

$$0 + p_0 + 1.2 = \frac{v^2}{2g} + p_0 + 0$$

$$v = \sqrt{2.4g} = 4.87 \text{ m/s}$$

och flödet q blir

$$q = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 0.1^2 \cdot 4.87 \text{ l/s} = 1.53 \text{ l/s}$$

För beräkning av trycket i punkten A tillämpas återigen Bernoullis ekvation, där jämförelsepunkten är nedre vätskeytan inuti häverten. Således

$$\frac{v^2}{2g} + p_0 + 0 = \frac{v^2}{2g} + p + 1.7$$

$$p = p_0 - 1.7$$

d.v.s. i punkten A råder 1.7 m undertryck.

Tages som jämförelsepunkt (-plan) övre vätskeytan, erhålles

$$0 + p_0 + 0 = \frac{v^2}{2g} + p + 0.5$$

eller

$$p = p_0 - \left(\frac{v^2}{2g} + 0.5\right) = p_0 - 1.7$$

3222. Bernoullis ekvation längs normalen mot strömlinjen. I närmast föregående avsnitt ha vi relativt utförligt diskuterat Bernoullis ekvation för rörelsen längs strömlinjerna eller banorna vid stationär rörelse. Vi ha visat, att den gäller även i sådana fall, då en samling strömlinjer betraktas, ett strömrör eller ett rör, om medelvärden insätts i ekvationen. Detta gäller med bättre approximation ju mera parallellt strömlinjerna förlöpa. Besitta ström-

linjerna däremot en mera betydande krökning, fordras ett närmare studium av ekvation (3.19).

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \gamma \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{g_0 R}$$

Vi undersöka ett par enkla fall, som samtidigt ge oss en möjlighet att definiera ett par viktiga begrepp. Strömningen antages vara statinär och banorna cirkelbågar.

Ekvationen (3.19) skrives då lämpligen ($R = \text{konst.} = r$)

$$\frac{dp}{dr} + \gamma \frac{dz}{dr} = \frac{\rho V^2}{g_0 r} \quad (\text{a})$$

a. Vi antaga nu att vinkelhastigheten för samtliga vätskeelement är konstant $= \omega$. Således

$$V = \omega r \quad (\text{b})$$

vilket vi införa i ekvation (a)

$$\frac{dp}{dr} + \gamma \frac{dz}{dr} = \frac{\rho \omega^2 r}{g_0} \quad (\text{c})$$

Multiplitera med dr och integrera från r_1 till r_2 (inifrån och utåt, varvid tecknet på z ändras!)

$$p_2 - p_1 + \gamma(z_1 - z_2) = \frac{\rho \omega^2}{2g_0} (r_2^2 - r_1^2) \quad (\text{d})$$

och således

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho \omega^2}{2g_0} (r_2^2 - r_1^2) - \gamma(z_1 - z_2) \quad (3.25)$$

Denna ekvation kan tydligen lätt transformeras över till formen (3.26), som endast med avseende på tecknet för p skiljer sig från Bernoullis ekvation för translatorisk rörelse

$$\frac{\rho V_1^2}{2g_0} - p_1 + \gamma z_1 = \frac{\rho V_2^2}{2g_0} - p_2 + \gamma z_2 \quad (3.26)$$

Om rörelsen antages ske i samma horisontala plan eller i övrigt olikheten i höjd kan försummas i förhållande till övriga termer, övergår ekvation (3.25) till formen

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho \omega^2}{2g_0} (r_2^2 - r_1^2) \quad (3.27)$$

Denna ekvation kan tydligen användas för att beräkna trycket i en roterande vätska, som befinner sig i relativ vila med avseende på det kärl, vari vätskan förvaras. Förutsättningen om den konstanta vinkelhastigheten innebär nämligen, att vätskan närmast roterar, som en homogen fast kropp efter uppnått stationärt tillstånd.

Ex. 3.10. Huru högt kan trycket stiga i en ultracentrifug med $n = 40\,000$ r.p.m., då kärlet, som är fyllt med vatten, har en diameter av 150 mm.

Lösning: I detta fall gäller

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2g_0} r^2 = \frac{1.00 \left(\frac{40.000 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \cdot 7.5^2}{2 \cdot 981} \text{ p/cm}^2$$

$$= \frac{80\,000 \cdot 987 \cdot 56.25}{9.981} = 503\,000 \text{ p/cm}^2 = 503 \text{ kp/cm}^2$$

Ex. 3.11. En helt vattenfylld cylindrisk behållare, vars höjd är liten i förhållande till diametern ($d = 200$ mm) roterar med 2000 r/m kring sin vertikala axel. Beräkna påkänningen i cylinderväggen, som är utförd i 1 mm plåt. Med påkänning menas belastningen dividerad med den yta, som upptar belastningen.

Lösning: Ekvationen (3.27) ger

$$p = \frac{0.001 \cdot \left(\frac{2000 \cdot 2}{60} \right)^2 \cdot 10^2}{2 \cdot 981} = \frac{4000 \cdot 9.87}{2 \cdot 981 \cdot 9} = 2.24 \text{ kp/cm}^2$$

$$\zeta = \frac{2.24 \cdot 20 \cdot 1}{0.1 \cdot 1 \cdot 2} = 224 \text{ kp/cm}^2$$

b. Vi antaga att hastigheten är indirekt proportionell mot radien. Således

$$\frac{v_1}{r_2} = \frac{v_2}{r_1}$$

eller, om vi låta v och r beteckna tvänne godtyckliga sammanhörande värden

$$v = \frac{v_1 \cdot r_1}{r}$$

Införa vi detta uttryck på v i ekvation (3.19), erhålla vi

$$\frac{dr}{dr} + \gamma \frac{dz}{dr} = \frac{\rho v_1^2 r_1^2}{g_0 \cdot r^2}$$

Multiplisera med dr och integrera mellan r_1 och r_2 :

$$p_2 - p_1 + \gamma z_2 - \gamma z_1 = \frac{\rho v_1^2 r_1^2}{2g_0} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{\rho v_1^2}{2g_0} - \frac{\rho v_1^2 r_1^2}{2g_0 r_2^2}$$

men nu är $v_2^2 = \frac{r_1^2 v_1^2}{r_2^2}$, varför ekvationen följaktligen kan skrivas

$$\frac{\rho v_1^2}{2g_0} + p_1 + \gamma z_1 = \frac{\rho v_2^2}{2g_0} + p_2 + \gamma z_2$$

eller

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{konst.} \quad (3.28)$$

Denna ekvation är identiskt lika med ekvation (3.20) gällande för rörelsen längs strömlinjerna. Det är tydligt, att vid denna form av rörelse summan av rörelse-, tryck- och lägesenergi är lika och konstant för alla punkter i vätskan. Vi skola visa att denna rörelse är vad man kallar virvelfri (rotationsfri).

Låt oss betrakta figur 3.17 a. Vätskeelementet A deltar i en vätskerörelse karakteriserad av att $v = \omega r$ för samtliga element. Eftersom hastigheten växer proportionellt med radien r , kommer elementet A att röra sig så som figuren visar. Men detta innebär, att diagonalen d i läge 2 har vridit sig relativt läge 1. Saken kan också uttryckas så, att elementet A har samtidigt med sin förflyttning längs banan vridit sig kring sin egen tyngdpunktsaxel. Detta betyder att tangentiella krafter ha verkat, d.v.s. vi kunna vänta att denna strömning förekommer överallt, där viskositeten är hög eller stora relativa hastighetsdifferenser uppträda, t.ex. i närheten av fasta väggar. Strömningen kallas virvelströmning (rotationell).

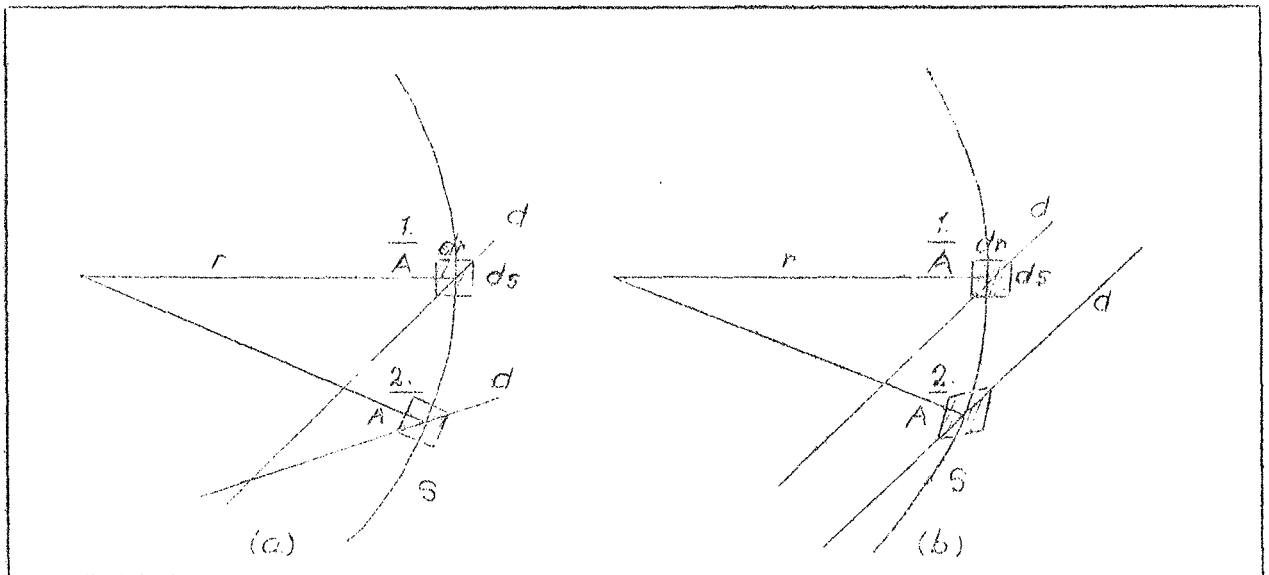


Fig. 3.17.

Betrakta vi däremot vätskeelementets rörelse i b figur 3.17, så gäller där

$$v = \frac{v_1 \cdot r_1}{r}$$

Det kan visas att, fastän elementet såsom figuren antyder under rörelsen deformerar, diagonalen d hela tiden behåller sin riktning oförändrad. Här förekommer m.a. ord ingen rotation kring elementets axel. Rörelsen kallas därför rotationsfri. Densamma kan i sträng mening endast förekomma hos ideella vätskor

men vid små hastighetsgradienter och liten viskositet kan rörelsen approximativt anses förverkligad även vid många naturliga strömningsförlopp s.k. potentialströmning.

Ex. 3.12. Villkoret för rotationsfrihet vid en plan stationär vätskerörelse kan skrivas

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

Bevisa att en vätskeströmning, för vilken gäller

$$v = \frac{c}{r} \quad (c = \text{konst.})$$

är rotationsfri!

Lösning: Beteckningarna på figur 3.18 behöva ingen närmare förklaring. De ge omedelbart sambanden

$$v = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$v_x = -v \sin \alpha = -\frac{c \cdot y}{x^2 + y^2}$$

$$v_y = -v \cos \alpha = +\frac{c \cdot x}{x^2 + y^2}$$

Genom partiell derivering erhålles härur

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = +\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot c$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = +\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot c$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} =$$

$$\frac{y^2 - x^2 - y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot c = 0$$

V.S.B.

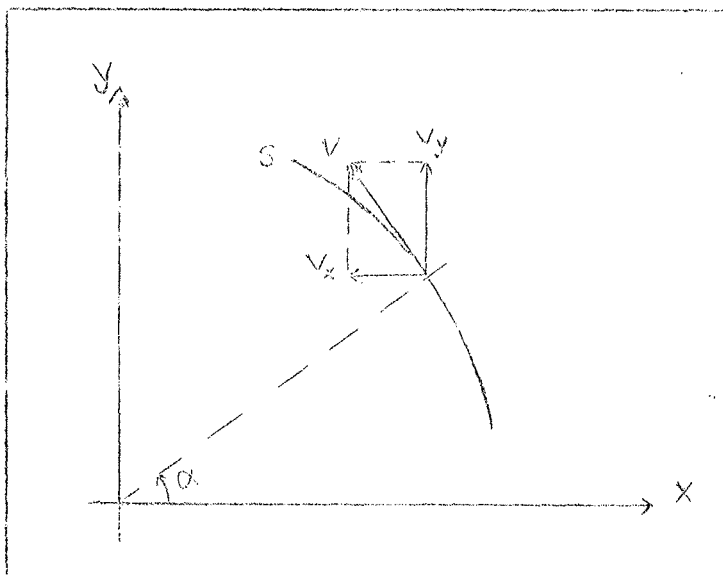
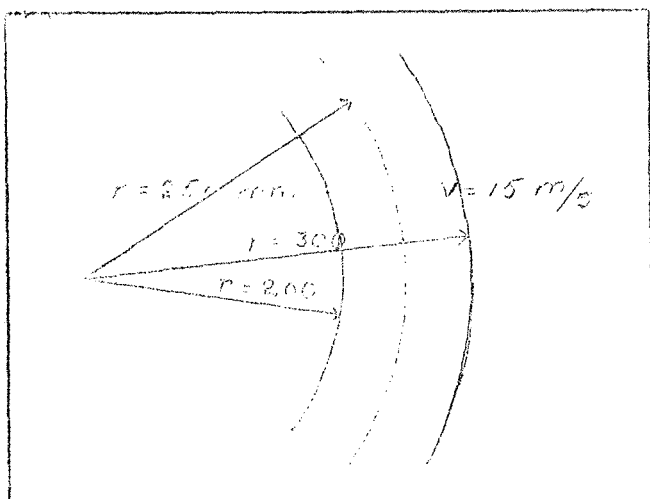


Fig. 3.18

Ex. 3.13. Luft strömmar i en krökt rörledning av vidstående dimensioner (se fig. 3.19!) Om luftens täthet är $\frac{1}{8} \text{ kg/m}^3$ och hastigheten i centrum 15 m/s,

huru stor är då tryckskillnaden mellan ytter- och innervägg på röret i rörkröken? Hastighetsfördelningen antas följa formeln



$$v = \omega \cdot r$$

Lösning: Vi tillämpa ekvation (3.27)

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho \omega^2}{2g_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

Alla mått i m och kp. Således

$$15 = 0.25 \cdot \omega$$

$$\omega = 60$$

Fig. 3.19

$$\Delta p = \frac{\frac{1}{8} \cdot 3600}{2 \cdot 9.81} (0.3^2 - 0.2^2) = \frac{3600 \cdot 0.05}{16 \cdot 9.81} = \frac{180}{16 \cdot 981} = 1.14 \text{ kp/m}^2$$

3223. Toricellis lag. Vi betrakta en ideell vätska i en behållare med arean A_0 . På djupet h under den fria vätskeytan finnes en i förhållande till A_0 liten cirkulär öppning med arean A . Vätskeytan i behållaren hålles genom kontinuerlig tillrinning på konstant nivå. Se f. övrigt figur 3.20!

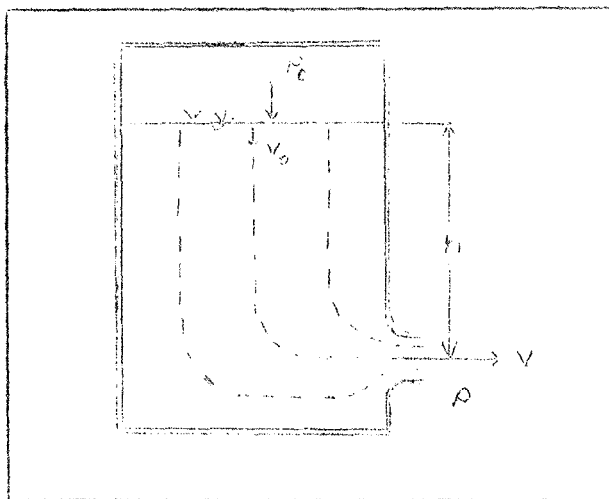


Fig. 3.20

Enligt Bernoullis ekvation gäller då för en strömlinje

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \quad (a)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)} \quad (b)$$

Kontinuitetsvillkoret ger dessutom

$$v \cdot A = v_0 \cdot A_0 \text{ eller } v_0 = \frac{A}{A_0} \cdot v$$

Införes detta i ekvationen (b) erhålles

$$v = \sqrt{\left(\frac{A}{A_0}\right)^2 v^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)} \quad (c)$$

eller

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{A}{A_0}\right)^2}} \quad (3.29)$$

Om A är mycket liten i förhållande till A_0 , kan $(\frac{A}{A_0})^2$ försummas vid sidan av 1. Ekvationen (3.29) antar då formen

$$v = \sqrt{2g(h + \frac{p_0 - p}{\rho})} \quad (d)$$

I allmänhet är $p_0 = p =$ atmosfärtrycket vid vätskans utströmning, vilket ger

$$v = \sqrt{2g h} \quad (3.30)$$

Detta är Toricellis lag (1643). Av denna framgår att utströmningshastigheten är lika med sluthastigheten hos en kropp, som får falla fritt från den fria vätskeytan till utloppsöppningen. En direkt tillämpning av energiprincipen ger mera omedelbart samma resultat.

Ex. 3.14. Med vilken hastighet utströmmar vattnet under atmosfärtryck ut i vacuum?

Lösning: Toricellis lag ger

$$v = \sqrt{2g \frac{p}{\rho}} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \frac{10.000}{1000}} = \sqrt{20g} = 14,0 \text{ m/s}$$

Ex. 3.15. I en vertikal vägg utmynnar ett horisontellt vattenledningsrör 1 m över markytan. Vattenstrålen träffar den horisontella markytan 2 m framför väggen. Med vilken hastighet lämnar vattnet röret?

Lösning: Beteckningar och antaganden framgå av figur 3.21.

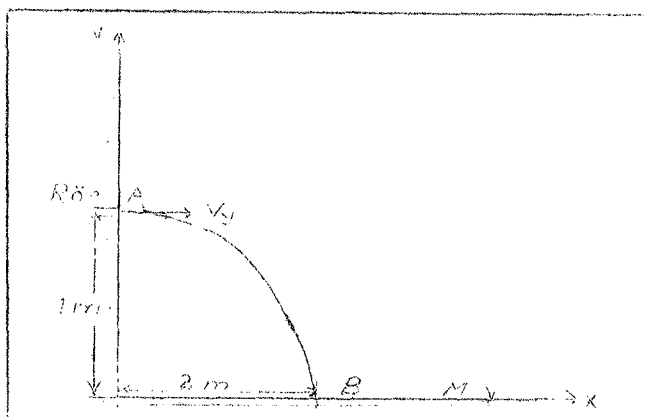


Fig. 3.21

Vi tänka oss följa en partikel från A till B. Tiden härför antages vara t sek. Följande ekvationer erhållas lätt

$$v_y \cdot t = 2 \quad (a)$$

$$\frac{9.81}{2} \cdot t^2 = 1 \quad (b)$$

Ekvationen (a) kvadreras, vilket ger $t^2 = \frac{4}{v_y^2}$. Detta införes i

ekvationen (b), varur v_y sedan löses

$$v_y = \sqrt{2 \cdot 9.81} = 4,43 \text{ m/s}$$

Svar: Vattenstrålen lämnar röret med hastigheten 4,43 m/s.

Ex. 3.16. Bevisa att, om lika stora volymer Q av tvänne gaser (eller vätskor) får strömma ut ur ett kärl under exakt samma villkor, så gäller

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

där γ_1 och γ_2 äro gasernas specifika tyngder samt t_1 och t_2 motsvarande utströmningstider.

Lösning: Toricellis lag och kontinuitetsekvationen ge

$$Q = \sqrt{2g \cdot \frac{p}{\gamma_1} \cdot t_1} = \sqrt{2g \cdot \frac{p}{\gamma_2} \cdot t_2}$$

eller

$$\frac{p}{\gamma_1} \cdot t_1^2 = \frac{p}{\gamma_2} \cdot t_2^2$$

och således

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad \text{V.S.B.}$$

3224. Om trycket i en strömmande vätska. Det tryck, som råder i en vätska i vila kalla vi hydrostatiskt tryck. Om ingen strömning äger rum i röret a

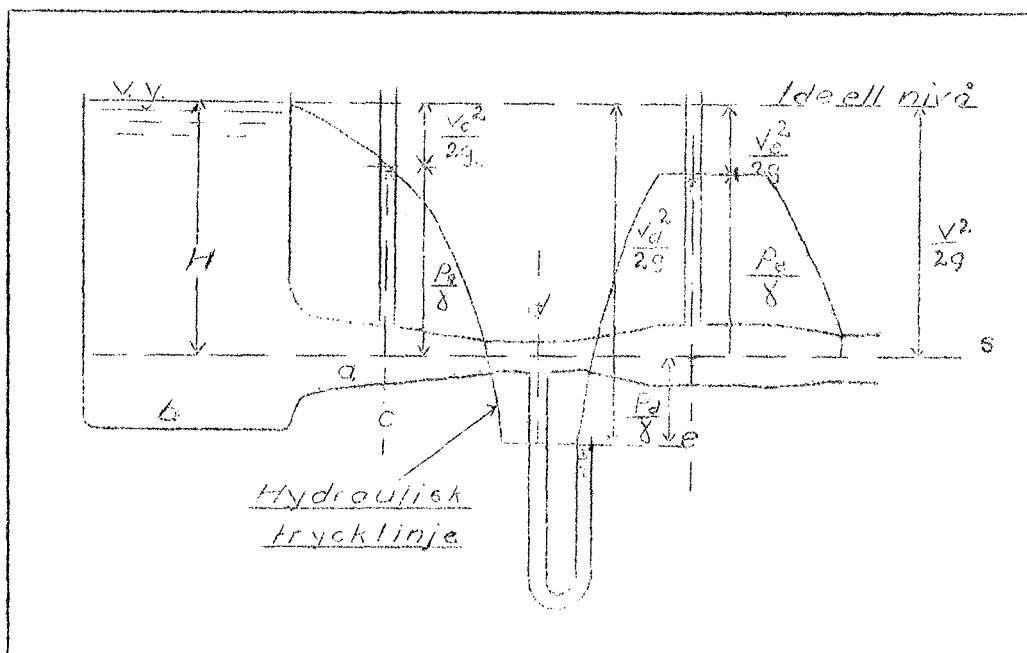


Fig. 3.22

figur 3.22, ligga vätskenivåerna i kärlet b och tryckrören c, d och e på en horisontell rät linje enligt lagen om kommunicerande kärl. Denna linje sammanfaller med den i avdelning 322 definierade ideella nivån.

Vid strömning visar det sig nu, att vätskenivåerna i samtliga tryckrör sjunker beroende på att en del av den tillgängliga tryckenergin $H \gamma \Delta V$ omvandlas till hastighetsenergi. Skrivna vi Bernoullis ekvation under formen

$$\frac{\rho v^2}{2g_0} + p + \gamma z = c$$

visar det sig, att samtliga termers dimension är av formen $ML^{-1}T^{-2}$, d.v.s. av samma dimension som tryck.

Termen p , som visar trycket i den strömmande vätskan, kallas hydrodynamiskt tryck. Det är det tryck som det strömmande mediet utövar på begränsningsytorna (rörväggen). Vätskenivåerna i kärlet b och tryckrören (piezometer-rören) c , d och e ligga nu ej längre på en horisontell rät linje utan på en kurva, vars form visar sig bero av huru tvärsnittsarean hos röret a varierar längs strömlinjen s (se figur 3.22!) Kurvan kallas hydraulisk trycklinje eller enbart trycklinje. Vid icke ideella förhållanden är denna naturligtvis också beroende av den strömmande vätskans viskositet och rörväggens beskaffenhet (se längre fram!).

Termen $\frac{\rho v^2}{2g_0}$ kallas hastighetstryck. Den kallas även stagnationstryck eller dämpningstryck, då den är lika med det tryck, som uppkommer, om vätskeströmmen stoppas upp mot en fast vägg.

Summan av p och $\frac{\rho v^2}{2g_0}$ kallas totala trycket. Termen γz är en mot den geometriska höjden z ekvivalent tryckhöjd. Om rörets centrumlinje är horisontell är $\gamma z = \text{konst}$ och sättes i allmänhet $= 0$.

Den här införda terminologien är ej allmänt antagen utan densamma växlar i olika läroböcker. Ofta ser man t.ex. termen $\frac{v^2}{2g_0}$ kallas dynamiskt tryck. Vi skola dock i fortsättningen använda oss av de här införda benämningarna. För närmare studium av metoderna för experimentell uppmätning av de olika tryckformerna i en strömmande vätska hänvisas till i slutet av detta kompendium upptagen litteratur.

Ex. 3.17. Härled ett uttryck, som anger huru trycklinjen varierar genom den koniska rörsektionen å figur 3.23, när flödet är q .

Lösning: Med de på figuren införda beteckningarna erhålles lätt ekvationerna

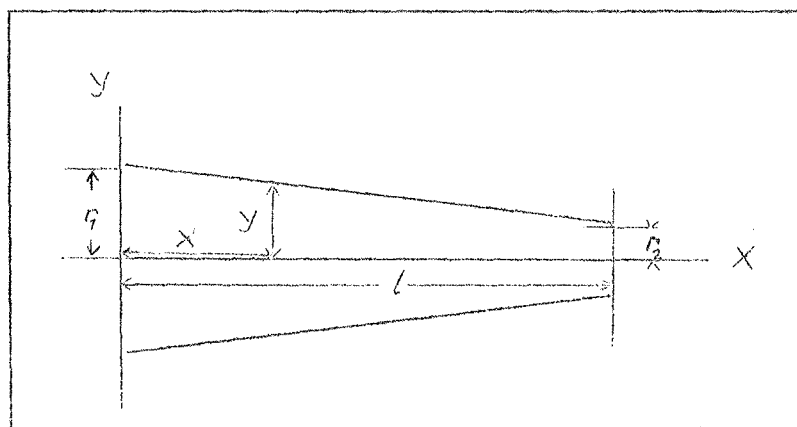


Fig. 3.23

$$\frac{r_1 - r_2}{l} = \frac{y - r_2}{l - x} \quad (\text{enl. likf.}) \quad (a)$$

$$v_x = \frac{q}{A_x} \quad (\text{enl. kontinuitets-} \\ \text{ekv.}) \quad (b)$$

Ur ekvation (a) erhålles den variabla radien y till

$$y = r_1 - \frac{x}{l} (r_1 - r_2) \quad (c)$$

som infört i ekvation (b)

ger

$$v = \frac{q}{\pi \left[r_1 - \frac{x}{l} (r_1 - r_2) \right]^2} \quad (d)$$

Sätt $\frac{r_1 - r_2}{1} = c$, som överför ekvation (d) till formen

$$V = \frac{q}{\gamma_c^2 (r_1 - cx)^2} \quad (e)$$

Hastighetshöjden blir således

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{q^2}{2g\gamma_c^2 (r_1 - cx)^4} \quad (f)$$

Trycklinjens ekvation blir

$$z_t = H - \frac{q^2}{2g\gamma_c^2 (r_1 - cx)^4}$$

Framställ funktionen grafiskt och visa att den är monotont avtagande samt konkav nedåt!

33. Inre friktion eller viskositet.

Vid all rörelse uppstår friktion, d.v.s. av de aktivt verksamma krafterna uppväckta passiva krafter, friktionskrafter. Dessa krafter uppträda överallt, där relativa hastighetsdifferenser existera och verka längs de glidytor, som finnas. Friktionskrafterna motverka rörelsen och förorsaka energiförluster, huvudsakligen genom att överföra mekanisk energi till värme.

Om en vätska rör sig i ett rum uppkommer även av friktionen förorsakade energiförluster. Dessa kunna sägas vara av två slag 1. av friktionen mellan vätskan och kärlväggen förorsakade energiförluster och 2. av friktionen mellan olika vätskepartiklar eller vätskeskikt, som röra sig relativt varandra, förorsakade energiförluster. Denna senare form av friktion kallas viskositet eller inre friktion. I allmänhet antar man, att det vätskeskikt, som befinner sig närmast den fasta begränsningsytan eller väggen, är fullständigt adderat till väggen och har hastigheten 0 (boundary layer). Vi skulle således vid en vätskas rörelse alltid ha att göra med detta senare slag av friktion, viskositet.

Vid våra hittills gjorda härledningar och diskussioner ha vi endast i förbigående omnämnt vätskornas viskositet utan att närmare beakta de krafter, som härvid uppstå. Detta ha vi kunnat göra, dels därför att de i statiken härledda lagarna hänföra sig till vätskor i relativ vila, då viskositeten för alla vätskor är 0, och dels därför att vi i första hand strävat att införa vissa för all vätskerörelse giltiga kinematiska begrepp och att våra dynamiska betraktelser knutits till den ideella vätskan. I närmast följande avsnitt skola vi nu något närmare studera viskositeten och begreppen dynamisk likformighet samt dimensionsanalys. Så rustade kunna vi sedan utvidga våra härledda lagar framför

allt Bernoullis teorem att även gälla naturliga vätskors strömning.

331. Definition av begreppet viskositet, enheter.

Newton fann, att den inre friktionen mellan två vätskeelement är oberoende av normaltrycket men proportionell mot de glidande ytornas storlek samt mot hastighetsgradienten mellan dem. Betecknas ytornas storlek med A , avståndet mellan dem med Δh och hastighetsdifferensen mellan dem med Δv samt proportionalitetsfaktorn med μ , så gäller tydligen för den tangentiella kraften F :s storlek ekvationen

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta h} \quad (3.31)$$

I denna ekvation kallas μ vätskans dynamiska viskositet.

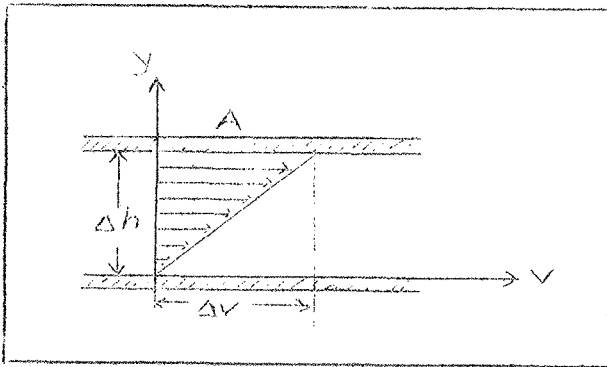


Fig. 3.24

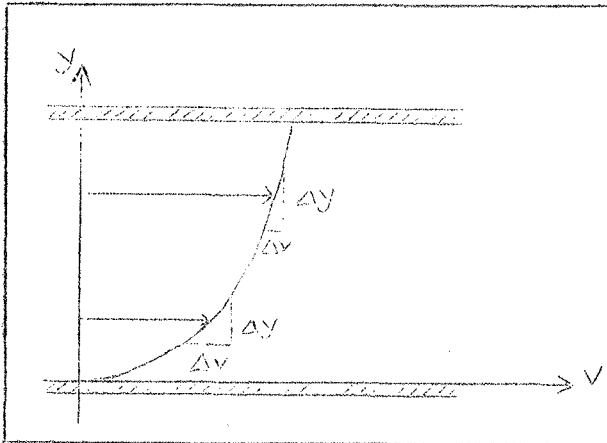


Fig. 3.25

Om hastighetsfördelningen såsom i figur 3.24 ej är linjär utan så som i figur 3.25 följer någon annan kurva, måste ekvation (3.31) skrivas

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dy} \quad (3.32)$$

Divideras ekvation (3.32)

med A , erhålles

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (3.33)$$

Det är tycligt att τ är en skjuvspänning (= tangentialspänning) med dimensionen kraft/ytenhet.

Löses μ ur ekvation (3.33), erhålles

$$\mu = \tau \frac{dy}{dv}$$

Dimensionen för μ blir

$$[\mu] = \left[\tau \frac{dy}{dv} \right] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} \cdot \frac{L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

Den dynamiska viskositetsenheten i c-g-s-enheter blir därför $g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1}$ eller $dyn \cdot s \cdot cm^{-2}$. Enhetens namn är Poise (efter Poisseeuille, fransk vetenskapsman 1799-1869). En vanlig mindre enhet är centipoise, som utgör 0.01 Poise. Vattnets dynamiska viskositet är vid +20°C i runt tal 1 centipoise.

En ofta i hydrauliken uppträdande kvot är dynamisk viskositet/täthet eller kvoten $\frac{\mu}{\rho}$. Denna kvot har därför fått ett särskilt namn och kallas kinematisk viskositet ν (ny). Således

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.34)$$

Dess dimensionsformel blir

$$[\nu] = \left[\frac{\mu}{\rho} \right] = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}$$

I c-g-s-enheter blir tydligen enheten $cm^2 \cdot s^{-1}$. Det kan vara värt att observera att för vatten, vars täthet ju i allmänhet kan sättas = 1, är ν numeriskt lika med μ . ν i $cm^2 \cdot s^{-1}$ kallas Stok (efter George Stokes, engelsk vetenskapsman 1819-1903).

Hos vätskorna sjunker viskositeten med stigande temperatur. För vatten gäller härvid enligt Poiseuille

$$\nu = \frac{0.0178}{1 + 0.0337 \cdot t + 0.00022 \cdot t^2} \text{ cm}^2/\text{s} \quad (3.35)$$

I tabell 2 återges några värden för viskositeten hos vatten.

Tabell 2. Vattnets viskositet i Stok.

Temperatur	ν	Temperatur	ν
°C	cm^2/s	°C	cm^2/s
0	0.0178	20	0.0101
10	0.0131	50	0.0055
15	0.0114	100	0.0027

Som jämförelse kan nämnas att luftens kinematiska viskositet vid 20°C är 0.149 cm^2/s (obs! ca 15 ggr större än vattnets vid samma temperatur). Glycerin har vid temperaturen 3°C $\nu = 33.40$ Stok.

På de många i tekniken förekommande enheterna för viskositet finns ej här någon anledning att närmare ingå. De komma framför allt till användning i smörjningstekniken, och den intresserade hänvisas för närmare studium till litteraturen.

Inverterade värdet av viskositeten benämnes fluiditet.

Ex. 3.18. I anslutning till figur 3.25 antages hastighetsfördelningen vara

$$v = 5y + 10y^2$$

y mätt i cm och v i cm/s . Beräkna hastighetsgradienten vid nedre väggen och 8 cm från samma vägg! Huru stor är skjuvspänningen på väggen, om vätskan är vatten av temperaturen 20°C.

Lösning: Den givna ekvationen för hastighetsfördelningen deriveras med avseende på y. Då erhålles

$$\frac{dv}{dy} = 5 + 20y \quad (a)$$

Såludes bli de sökta hastighetsgradienterna

$$\frac{dv}{dy} = 5 \text{ för } y = 0 \text{ och } \frac{dv}{dy} = 5 + 20 \cdot 8 = 165 \text{ för } y = 8$$

Skjuvspänningen på väggen blir

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = 0.010 (5 + 20y)$$

varav för $y = 0$ $\tau = 0.050 \text{ dyn/cm}^2$.

Ex. 3.19. En lång vertikal cylinder med diametern 10 cm roterar inuti en annan fast cylinder, vars diameter är 10.02 cm. Om mellanrummet mellan cylindrarna fylls med vatten av temperaturen 10°C och rotationshastigheten är 1 radian/s, huru stort vridande moment behövs då på den inre cylinderaxeln för att övervinna det av vattnets inre friktion förorsakade motståndet per dm av cylinderlängden?

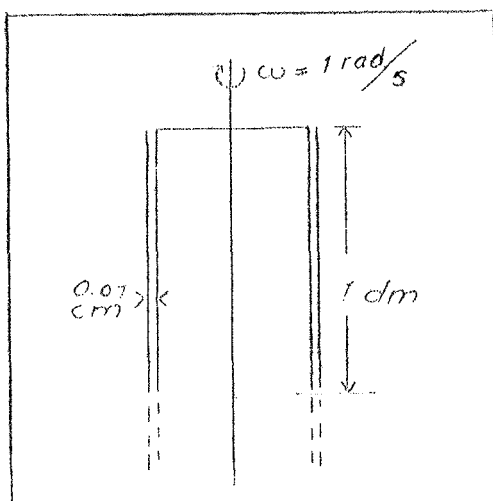


Fig. 3.26

Lösning: Vi tillämpa ekvation (3.31).
Se även figur 3.26! M betecknar det sökta momentet.

$$F = \mu A \frac{\Delta v}{\Delta h} = 0.0131 \cdot \pi r \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{5.0}{0.01} \text{ dyn}$$

$$M = 5 \cdot F \text{ dynem}$$

$$M = 131 \pi r \cdot 25 \text{ dynem} = \frac{131 \cdot 25}{981} \text{ pcm}$$

$$M = 10.5 \text{ pcm}$$

Ex. 3.20. I en fast kropp gäller för skjuvspänningen

$$\tau = G \cdot \gamma$$

där τ = skjuvspänningen, G = skjuvelasticitetsmodulen och γ = vinkelförändringen. För små värden på γ kan denna ekvation skrivas (se figur 3.27!)

$$\tau = G \cdot \frac{dx}{dy}$$

d.v.s. skjuvspänningen är proportionell mot vinkelförändringen. Bevisa med utgångspunkt från detta, att i en vätska är skjuvspänningen proportionell mot vinkelförändringens hastighet!

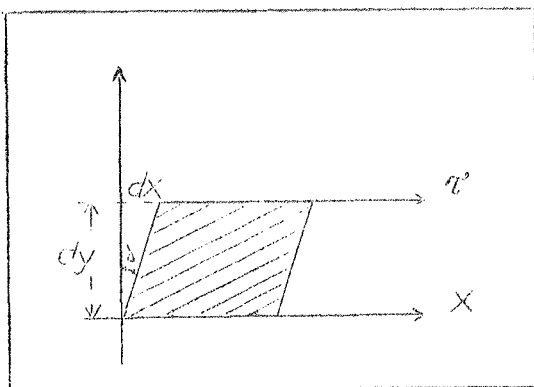


Fig. 3.27

Lösning: Enligt Newton gäller

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (a)$$

Figur 3.27 ger

$$\gamma = \frac{dx}{dy} \quad (b)$$

Om vi deriverar denna ekvation med avseende på tiden t erhåller vi ett uttryck på vinkelförändringens hastighet. Såludes

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dy} (v) = \frac{dv}{dy} \quad (c)$$

vilket insatt i ekvation (a) ger

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \mu \frac{d\delta}{dt} \quad \text{V.S.B.}$$

34. Dimensionsanalys och dynamisk likformighet.

I avdelning 13 ha vi redan stiftat bekantskap med vissa begrepp ur dimensionsanalysen, varför vi här kunna bygga vidare på det där genomgångna. Vid grafiskt och analytiskt angivande av funktionella samband, där många variabler ingå, har det visat sig synnerligen värdefullt att sammanföra dessa i dimensionslösa grupper. Härigenom nedbringas antalet termer eller variabler i det slutgiltiga uttrycket, och de experimentellt eller på annat sätt funna sambanden bli oberoende av de valda fysikaliska enheterna, eller uttryckt på annat sätt deras numeriska värden ändras ej vid övergången från det ena enhetssystemet till det andra. En av dimensionsanalysens huvuduppgifter är därför att finna eller ange det lämpligaste sättet att arrangera de ingående variablerna, vilka antagas vara kända på förhand. Den slutgiltiga formen på det sökta sambandet kan däremot dimensionsanalysen ej ange. Endast experimentella undersökningar kunna avgöra detta. Dimensionsanalysen har också bidragit att utveckla rationella metoder för omvandlingsräkningar vid övergång från ett enhetssystem till ett annat och för prövning av ekvationers fysikaliska giltighet (m. avs. på dimensionen) m.m.

De grundläggande ideerna i dimensionsanalysen gå tillbaka på Newton och återfinnas i hans berömda "Principia". Dimensionsanalysen har sedan utvecklats och förts vidare av många framstående matematiker och fysiker såsom Fourier, Stokes, Rayleigh, Reynolds m.fl. Ett viktigt bidrag har under senare år givits av amerikanaren Buckingham genom hans s.k. π -teorem.

Dimensionsanalysens användbarhet belyses i det följande först med några mera allmänna exempel, varefter Buckinghams π -teorem genomgås.

341. Några enkla exempel på dimensionsanalysens användbarhet.

I fysiken söker man framställa alla ekvationer så, att de ingående termerna och således ekvationens båda membra äro ur fysikalisk synpunkt dimensionslika. En sådan ekvation kallas ur denna synpunkt homogen (jfr matematikens term homogen). Även inom den moderna hydrodynamiken söker man ange alla samband så, att de äro ur dimensionssynpunkt homogena. Detta kan däremot knappast sägas om den äldre hydrauliken, som innehåller en mängd formler, vilka ur dimensionssynpunkt

äro föga rationella.

Ex. 3.21. Bevisa att i ekvationen

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2g_0} r^2$$

högra sidan har dimensionen av tryck och undersök, i vilka enheter do ingående storheterna skola införas i ekvationen för att p skall erhållas i kp/cm²!

Lösning: Vi undersöka högra sidans dimension

$$\left[\frac{\rho \omega^2 r^2}{2g_0} \right] = ML^{-3} \cdot T^{-2} \cdot L^2 = ML^{-1} T^{-2}$$

men

$$[\text{tryck}] = \left[\frac{\text{kraft}}{\text{yta}} \right] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1} T^{-2}$$

Högra sidan har alltså dimensionen tryck. Om vi uttrycka alla storheter med hjälp av cm, kg och sek., böra vi erhålla p i kp/cm². Vi pröva

$$p = \frac{\rho \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \right) \omega^2 \left(\frac{1}{\text{sek}^2} \right) \cdot r^2 (\text{cm}^2)}{2g_0} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2g_0} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm} \cdot \text{sek}^2}$$

$$p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2g_0} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{sek}^2} \cdot \frac{1}{\text{cm}^2} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2g_0} \cdot \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$$

Ex. 3.22. I amerikansk litteratur förekommer ett enhetssystem, som har följande grundenheter: 1. enheten för massa slug, 2. enheten för kraft pound och 3. enheten för acceleration foot/s². Detta ger Newtons kraftekvation formen

$$F = m \cdot a$$

Värdet av g₀ blir i detta system 32.174 foot/s² och vattnets täthet 1.94 slugs/cub.foot.

a. Om g₀ i metersystemet sättes = 980.665 cm/s², huru många cm är då en amerikansk fot?

Lösning:

$$32.174 \text{ foot/s}^2 = 980.665 \text{ cm/s}^2$$

eller

$$1 \text{ fot} = \frac{980.665}{32.174} \text{ cm} = 30.5 \text{ cm}$$

b. Vilket samband råder mellan slug och kg?

Lösning: Förutsättningarna tillåta oss att omedelbart uppskriva ekvationen

$$1.94 \frac{\text{slugs}}{\text{foot}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Således

$$1.94 \frac{\text{slugs}}{\text{foot}^3} = 1.94 \frac{\text{slugs}}{(3.05 \text{ dm})^3} = \frac{1.94}{3.05^3} \frac{\text{slugs}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

varav

$$1 \text{ slug} = \frac{3.05^3}{1.94} \text{ kg} = 14.59 \text{ kg}$$

Ex. 3.23. Är konstanten i den s.k. de Chezys' formel $v = C \sqrt{RI}$ dimensionslös? Bokstäverna beteckna: v = hastighet, c = konst., $R = \frac{\text{yta}}{\text{omkrets}}$ och $I = \frac{\text{höjd}}{\text{längd}}$.

Lösning:

$$[c] = \left[\frac{v}{\sqrt{R \cdot I}} \right] = \frac{L \cdot T^{-1}}{L^{\frac{1}{2}} \cdot L^0} = L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

c är således ej dimensionsfri, vilket innebär, att om c är given i ett visst system, så ändras i allmänhet dess numeriska värde vid övergången till ett annat enhetssystem.

3.42. Buckingham's 7 π -teorem.

Innan vi gå in på en närmare diskussion av Buckingham's 7 π -teorem, kan det vara lämpligt att medelst ett för många välkänt exempel repetera några av dimensionsanalysens grundtankar.

Vi antaga, att man om en svängande (matematisk pendel) vet, att dess svängningstid t beror av pendelkulans massa m , pendellängden \bar{l} och tyngdaccelerationen g . Således

$$t = f(m, \bar{l}, g) \tag{a}$$

Enligt vår fordran på att ekvationer, som ange fysikaliska samband, skola vara homogena i dimensionshänseende, måste högra sidan i ekvationen (a) ha dimensionen tid, enär vänstra sidan har det. Dimensionsformeln för ekvationens (a) högra membrum kunna vi symboliskt skriva

$$[f(m, \bar{l}, g)] = M^x \cdot L^y \cdot \left(\frac{L}{T^2}\right)^z = M^x L^y L^z T^{-2z} \tag{b}$$

där x , y och z beteckna de obekanta potenser, vartill m , \bar{l} och g skola upphöjas, för att dimensionslikhet med tiden skall erhållas eller i ekvationsform

$$T^1 = M^x L^{y+z} T^{-2z} \tag{c}$$

Fordran på att högra och vänstra sidan skola vara identiskt lika ger vid termvis identifikation ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x &= 0 && \text{(för massan)} \\ y+z &= 0 && \text{(för längden)} \\ -2z &= 1 && \text{(för tiden)} \end{aligned}$$

Detta ger $z = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ och $x = 0$, vilket tillåter oss att skriva vår ursprungliga ekvation (a) under formen

$$t = f\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \quad (c)$$

Vi kunna således vänta, att svängningstiden skall vara en funktion av uttrycket $\sqrt{\frac{l}{g}}$. I sin enklaste form har denna funktion utseendet (för en enkel svängning)

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Experimentella undersökningar och teoretiska analyser visa, att generellt gäller

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f(\alpha)$$

där α är d.s.k. utslagsvinkeln, vars dimension är 0 (= $\frac{\text{båge}}{\text{radie}}$).

Det föregående exemplet har visat, att man genom en dimensionsbetraktelse kan erhålla värdefulla resultat, som tillåta en viss förutsägelse, om formen på ett sökt fysikaliskt samband och om huru de experimentellt bestämda värdena böra anordnas. När antalet variabler är stort, är det lätt att inse, att ovan tillämpade enkla metod erbjuder vissa svårigheter med avseende på möjligheten att erhålla tillräckligt många ekvationer för bestämmandet av de sökta exponenterna x, y, z o.s.v. Det är här Buckinghams π -teorem kommer till användning.

Låt oss antaga, att n storheter $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ förekommer i ett visst fysikaliskt förlopp och att det funktionella sambandet symboliskt kan skrivas

$$f(q_1, q_2, q_3 \dots q_n) = 0 \quad (3.36)$$

Vi antaga dessutom, att dessa n storheters dimensionsformler innehålla m fundamentalenheter (såsom för massa, längd, tid etc.). Under dessa förutsättningar utsäger Buckinghams π -teorem, att det funktionella sambandet också kan skrivas

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3 \dots \pi_{n-m}) = 0 \quad (3.37)$$

där varje π_i betyder en oberoende dimensionslös grupp bildad av $m+1$ variabler q_i . En generell härledning av detta viktiga teorem skall icke göras här, utan dess närmare innebörd skall belysas med några exempel. Vid våra tillämpningar inom hydrodynamiken blir $m = 3$, enär våra fundamentalenheter ju äro massa, längd och tid. Vi utvälja tre q -termer, vilka vi sedan tillsammans i tur och ordning kombinera med de återstående $n-3$ q -termerna. På detta sätt erhålla vi $n-3$ grupper med 4 q -termer i varje grupp. De för varje grupp gemensamma tre termerna antas ha obekanta exponenter, medan den 4:de för gruppen speciella termen införes med exponenten 1. För varje grupp bestämmas sedan de obekanta exponenterna ur kravet på dimensionslöshet. För den i :te gruppen skall alltså gälla

$$\pi_i = q_a^{x_i} \cdot q_b^{y_i} \cdot q_c^{z_i} \cdot q_i$$

där π_i är ett dimensionslöst tal, q_a , q_b och q_c de tre för alla grupperna gemensamma q -termerna, x_i , y_i och z_i de sökta exponenterna samt q_i den speciellt införda q -termen med exponenten 1. På detta sätt erhålla vi $n-3$ π -termer, vilka ger oss möjlighet att uppskriva vår sökta π -ekvation (3.37). Ur denna kan sedan varje π tänkas framställd såsom en explicit funktion av de övriga eller symboliskt

$$\pi_i = \phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-4}) \quad (3.38)$$

Vi belysa innebörden i π -teoremet med några exempel.

Ex. 3.24. Vid en vätskas stationära rörelse i ett rör kan man vänta, att tryckfallet per längdenhet beror av rørets diameter D , medelhastigheten v , vätskans täthet ρ och den dynamiska viskositeten μ . Bestäm lämpliga dimensionslösa grupper!

Lösning: Det funktionella sambandet kan enligt det föregående symboliskt skrivas

$$f(p, D, v, \rho, \mu) = 0 \quad (a)$$

Vi uppställa följande översikt av ingående variabler och deras dimensionsformler

Variabel	Beteckning	Dimensionsformel
Tryckfall	p	$ML^{-1}T^{-2}$
Rördiameter	D	L
Hastighet	v	LT^{-1}
Täthet	ρ	ML^{-3}
Dyn. viskositet	μ	$ML^{-1}T^{-1}$

Enligt π -teoremet blir antalet dimensionslösa grupper $n-m = 5-3 = 2$. Vi väljer D , v och ρ som genomgående primärgrupp och kombinerar denna med p och μ . Här finns det naturligtvis olika möjligheter att välja dessa tre, men eftersom vi i första hand äro intresserade av tryckgradienten, är det lämpligt att ha p ingående i endast en π -grupp. I övrigt kan endast erfarenhet och gängse praxis ge vid handen, vilka storheter, som lämpligen sammanföras. Det är naturligtvis också möjligt att pröva olika kombinationer och se, vilka som förefalla lämpligast. Vi kunna således skriva

$$\pi_1 = D^{x_1} v^{y_1} \rho^{z_1} p = L^{x_1} \cdot L^{y_1} T^{-y_1} \cdot M^{z_1} L^{-3z_1} \cdot ML^{-1}T^{-2} \quad (b)$$

$$\pi_2 = D^{x_2} v^{y_2} \rho^{z_2} \mu = L^{x_2} \cdot L^{y_2} T^{-y_2} \cdot M^{z_2} L^{-3z_2} \cdot ML^{-1}T^{-1} \quad (c)$$

Ekvationen (b) ger för bestämning av x_1 , y_1 och z_1 , i enlighet med att π , skall vara dimensionslöst, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 3z_1 = 0 \\ -y_1 - 2 = 0 \\ z_1 + 1 = 0 \end{cases} \quad (d)$$

vilket ger $y_1 = -2$, $z_1 = -1$ och $x_1 = 1$, varför vi kunna skriva

$$\pi_1 = \frac{1}{D} v^{-2} \rho^{-1} p = \frac{D \cdot p}{\rho v^2} \quad (e)$$

Ekvationen (c) ger på samma sätt

$$\begin{cases} x_2 + y_2 - 3z_2 = 1 \\ -y_2 - 1 = 0 \\ z_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (f)$$

vilket ger $y_2 = -1$, $z_2 = -1$ samt $x_2 = -1$ och således

$$\pi_2 = \frac{\mu}{Dv\rho} \quad (g)$$

Insättes detta i vår symboliska ϕ -ekvation, erhålles

$$\phi(\pi_1, \pi_2) = \phi\left(\frac{D \cdot p}{\rho v^2}, \frac{\mu}{Dv\rho}\right) \quad (h)$$

Enligt ekvation (3.38) kan (h) tänkas löst med avseende på π_1 . Detta ger

$$\frac{Dp}{\rho v^2} = \phi_1\left(\frac{\mu}{Dv\rho}\right) \quad (i)$$

vilket även kan skrivas

$$p = \frac{\rho v^2}{D} \phi_1\left(\frac{\mu}{Dv\rho}\right) \quad (j)$$

eller om

$$R = \frac{Dv\rho}{\mu} \quad (k)$$

$$p = \phi_2(R) \frac{\rho v^2}{D} \quad (3.39)$$

Vi skola senare finna, att kvoten $\frac{Dv\rho}{\mu}$ spelar en synnerligen viktig roll vid studiet av vätskeströmningen i rör. Efter sin upptäckare kallas denna kvot Reynolds tal R . Den slutliga formen på (3.39) kan endast erhållas genom noggranna experimentella studier och undersökningar. Redan nu kunna vi dock omforma densamma till det utseende, som ekvationen vid praktiska tillämpningar i allmänhet har. Eftersom

$$p = \frac{p_1}{l}$$

kan ekvationen (3.39) skrivas under formen

$$p_1 = \phi_2(R) \rho v^2 \frac{l}{D}$$

eller med strykande av alla index

$$p = \varphi(R) \frac{\bar{I}}{D} \rho v^2 \quad (3.40)$$

Ex. 3.25. Ex. 3.24 kan ytterligare generaliseras. Vi göra detta för att erhålla ytterligare övning i π -teoremets användning, samtidigt som vi skola finna, att nya specifika kvoter uppträda.

Vi antaga, att vid en vätskas strömning trycket p beror av två lineära dimensioner a och b , av hastigheten v , av vätskans täthet ρ , av specifika tyngden γ , viskositeten μ och ytspänningen α eller symboliskt

$$f(p, a, b, v, \rho, \gamma, \mu, \alpha) = 0 \quad (a)$$

Här kan naturligtvis a/b omedelbart uppskrivas som dimensionslös grupp, vilket skulle innebära att $n = 7$. a och b räknas tillsammans såsom endast en variabel, enär de äro storheter av samma slag. Detta skulle ge $n-m = 7-3 = 4$ termer plus kvoten $\frac{a}{b}$. Ur övningssynpunkt sätta vi dock $n = 8$ och erhålla då $8-3 = 5$ π -grupper. Såsom genomgående grupp eller kombination välja vi a , v och ρ .

Följande översikt av i problemet ingående variabler erhållas

Variabel	Beteckning	Dimensionsformel
Tryck	p	$ML^{-1}T^{-2}$
Längd (t.ex.)	a	L
Bredd (t.ex.)	b	L
Hastighet	v	LT^{-1}
Täthet	ρ	ML^{-3}
Spec. tyngd	γ	$ML^{-2}T^{-2}$
Dyn. viskositet	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Ytspänning	α	MT^{-2}

Våra π -termer bli

$$\pi_1 = a \frac{x_1}{v} \frac{y_1}{\rho} z_1 b = L \frac{x_1}{L} \cdot \frac{y_1}{L} T^{-y_1} \cdot M \frac{z_1}{L} L^{-z_1} \cdot L \quad (b)$$

$$\pi_2 = a \frac{x_2}{v} \frac{y_2}{\rho} z_2 p = L \frac{x_2}{L} \cdot \frac{y_2}{L} T^{-y_2} \cdot M \frac{z_2}{L} L^{-z_2} \cdot ML^{-1} T^{-2} \quad (c)$$

$$\pi_3 = a \frac{x_3}{v} \frac{y_3}{\rho} z_3 \gamma = L \frac{x_3}{L} \cdot \frac{y_3}{L} T^{-y_3} \cdot M \frac{z_3}{L} L^{-z_3} \cdot ML^{-2} T^{-2} \quad (d)$$

$$\pi_4 = a \frac{x_4}{v} \frac{y_4}{\rho} z_4 \mu = L \frac{x_4}{L} \cdot \frac{y_4}{L} T^{-y_4} \cdot M \frac{z_4}{L} L^{-z_4} \cdot ML^{-1} T^{-1} \quad (e)$$

$$\pi_5 = a \frac{x_5}{v} \frac{y_5}{\rho} z_5 \alpha = L \frac{x_5}{L} \cdot \frac{y_5}{L} T^{-y_5} \cdot M \frac{z_5}{L} L^{-z_5} \cdot MT^{-2} \quad (f)$$

Uppskrivs villkoren för dimensionslöshet hos π -termerna erhålles, som i föregående exempel ett ekvationssystem för varje π -term, varur exponenterna sedan lätt kunna erhållas. Denna uträkning genomföres ej här, men resultatet blir (kontrollera!)

$$\pi_1 = \frac{b}{a}; \quad \pi_2 = \frac{p}{v^2 \rho}; \quad \pi_3 = \frac{a \lambda}{v^2 \rho}; \quad \pi_4 = \frac{\mu}{av\rho} \quad \text{och} \quad \pi_5 = \frac{\alpha}{av^2 \rho} \quad (g)$$

eller

$$\phi\left(\frac{b}{a}, \frac{p}{v^2 \rho}, \frac{a \lambda}{v^2 \rho}, \frac{\mu}{av\rho}, \frac{\alpha}{av^2 \rho}\right) = 0 \quad (h)$$

π_4 är tydligen inverterade värdet av det i föregående exempel omtalade Reynolds tal R. Inverterade värdet av π_3 är en kvot, som uppträder vid studiet av vätskerörelser med en fri yta t.ex. vid studiet av vågrörelse. Tages kvadratroten ur $\frac{1}{\pi_3}$ erhålles ett uttryck, som vi senare närmare skola studera och som benämnes Froudes tal F. Kvadratroten ur inverterade värdet av kvoten π_5 har även fått ett speciellt namn. Detsamma kallas Webers tal W. Storleken av detta tal har visat sig äga betydelse vid analysen av sådana vätskerörelser, där uppträdande ytspänningskrafter ej kunna försummas vid sidan av övriga för rörelsen bestämmande krafter.

Tänka vi oss ekvationen (h) löst med avseende på p, erhålles

$$p = \rho v^2 \phi\left(R, F, W, \frac{a}{b}\right) \quad (i)$$

där de angivna substitutionerna införts.

343. Dynamisk likformighet.

På grund av den komplexa naturen hos många strömningsförlopp och överhuvud taget av många problem inom hydromekniken har modellstudier blivit ett viktigt hjälpmedel vid lösandet av många både praktiska och teoretiska problem. Turbiner, flygmaskiner, fartyg, pumpar, hela kraftverk och floder studeras i modeller eller avbildningar av den naturliga redan existerande eller blivande konstruktionen, prototypen, eller det geografiskt givna vattendraget. Genom sådana studier har mycket arbete och materiel kunnat sparas.

För att modellundersökningar skola vara möjliga måste vissa likformighetslagar vara uppfyllda. Dessa lagar möjliggöra dessutom närmare analyser av erhållna data. Vår närmaste uppgift är att något närmare undersöka, huru dessa likformighetslagar kunna formuleras och vad de innebära.

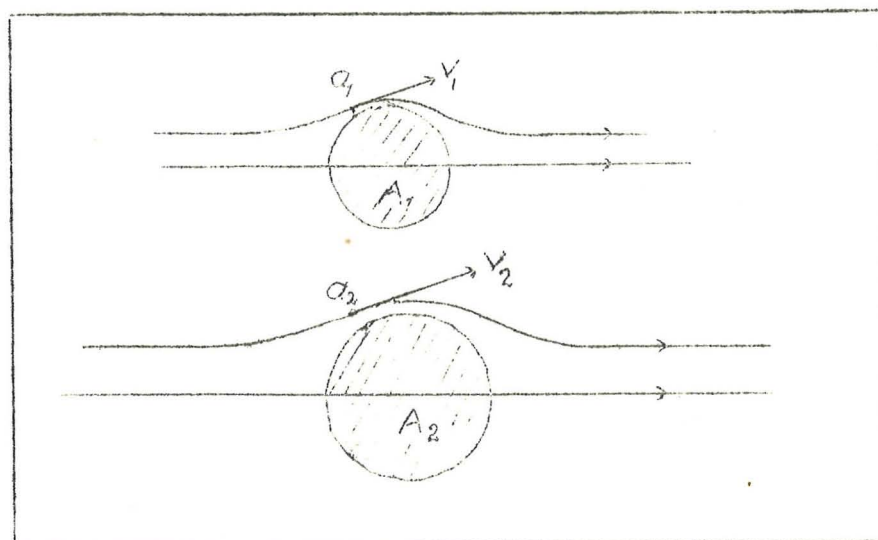
Det är för det första tydligt, att dynamisk likformighet mellan tvenne rörelseförlopp måste innebära att geometrisk likformighet råder. Erfarenheten visar att detta är en nödvändig förutsättning, men att den ej är tillräcklig. Kvoten mellan de bestämmande geometriska längderna hos modellen och hos prototypen kallas modellskalan. Detta står ju i överensstämmelse med att för geo-

metrisk likformighet mellan t.ex. två trianglar med sidorna a_1 , b_1 och c_1 respektive a_2 , b_2 och c_2 fordras att

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$$

där k är en förminsknings- eller förstöringsfaktor.

Låt oss betrakta en plan strömning kring cylindrarna A_1 och A_2 på figur 3.28. Här råder tydligen geometrisk likformighet (obs! alla cirklar äro lik-



formiga). Det är tydligt, att för att strömningen skall kunna sägas vara likformig, måste även motsvarande strömlinjer vara likformiga, d.v.s. de två strömbilderna måste vara geometriskt likformiga. Detta innebär då också, att hastigheten i likbelägna punkter måste vara

Fig. 3.28

likriktad (jfr definitionen på strömlinje!) Men hastighetens riktning är i varje punkt bestämd av resultanten till de verkande krafterna.

I många strömningsproblem kunna de verksamma krafterna i huvudsak antagas vara tre. Om enligt D'Alemberts princip varje rörelseproblem betraktas som ett jämviktsproblem, kan då enligt mekaniken den ena av dessa krafter uppfattas som resultatant till de tvenne övriga. Det är tydligt, att om i varje korresponderande punkt av de två strömbilderna de uppkomna krafttrianglarna äro likformiga, så råder dynamisk likformighet. Villkoret för dynamisk likformighet kan då enligt geometrin och det föregående formuleras så: Dynamisk likformighet innebär förutom geometrisk likformighet, att kvoten mellan tvenne motsvarande verksamma krafter i korresponderande punkter av modell och prototyp är lika (förutsatt att de uppträdande krafternas antal är tre eller kan approximeras till tre).

Olika likformighetslagar kunna formuleras alltefter de dominerande krafterna. De viktigaste krafterna vid en vätskas rörelse äro 1. tröghetskrafter, 2. friktionskrafter, 3. tyngdkrafter och 4. tryckkrafter. De olika krafternas innebörd torde tillräckligt tydligt framgå av deras namn. Från mekaniken torde det dock vara lämpligt att påpeka, att tröghetskrafter äro passiva kraf-

ter, som alltid äro lika stora som de aktivt accelererande krafterna, men som till sin riktning äro rakt motsatta dessa. Om den aktivt angripande kraften betecknas med F , gäller enligt D'Alemberts princip

$$F - m \cdot a = 0$$

där ma kallas tröghetskraft. Tröghetskrafter och friktionskrafter äro passiva krafter, som endast uppkomma i samband med att aktiva, drivande krafter verka. Till dessa senare höra tyngdkraften och tryckkrafter. Vid många rörelseförlopp spela naturligtvis även andra krafter en viktig roll såsom ytpänningskrafter, elasticitetskrafter etc. (jfr t.ex. problem 3.23!)

3431. Reynolds tal. Redan tidigare har Reynolds tal definierats så som kvoten $\frac{\rho v L}{\mu}$, där L är någon för strömningen karakteristisk geometrisk dimension. I exempel 3.22 var denna dimension diametern hos det rör, i vilket strömningen tänktes försiggå och i exempel 3.23 var det en ej närmare definierad liniär dimension a .

Om en vätska strömmar i ett rör eller en kropp rör sig i en vätska (gas), så att den är helt nedsänkt och inga fria vätskeytor deltaga eller behöva beaktas, bestämes rörelsen av de tre krafterna: tryck-, tröghets- och friktionskrafter. I varje punkt av den uppkomna strömbilden kunna vi således betrakta trycket som resultant till de övriga bägge krafterna: tröghetskraft och friktionskraft. Detta innebär enligt det föregående, att två vätskeströmningar äro dynamiskt likformiga, om i korresponderande punkter kvoten $\frac{\text{tröghetskraft}}{\text{friktionskraft}}$ är lika.

Tröghetskraften är proportionell mot $m \cdot a$ eller mot $\rho \cdot v \cdot \text{lym} \cdot \text{acceleration} = \rho \cdot L^3 \frac{v}{T} = \rho L^3 \cdot \frac{v}{\frac{L}{v}} = \rho L^2 v^2$

Friktionskraften är proportionell mot $\mu \cdot A \frac{dv}{dy}$ eller mot $\mu L^2 \frac{v}{L} = \mu L v$. Den sökta dimensionslösa kvoten blir följaktligen

$$\frac{\rho L^2 v^2}{\mu L v} = \frac{\rho L v}{\mu} = \frac{L \cdot v}{\nu}$$

men detta är enligt det föregående detsamma som Reynolds tal, således

$$\boxed{R = \frac{\rho L v}{\mu} = \frac{L v}{\nu}} \quad (3.41)$$

Om tröghets- och friktionskrafter kunna anses vara de bestämmande krafterna vid tvenne vätskerörelser, mellan vilka geometrisk likformighet råder, äro de även dynamiskt likformiga vid lika värden på Reynolds tal R . Vid tillämpningen av ekvation (3.41) insättes i allmänhet medelhastigheten v_m . Reynolds tal spelar en betydelsefull roll vid klassifikation av olika strömningsförlopp i framför

allt rör. Det är tydligt att Reynolds tal i viss mån tillåter en bedömning av vilka krafter, som dominera ett visst strömningsförlopp. Små värden på R innebär, att friktionskrafterna dominera, medan höga värden på R anger att tröghetskrafterna spela en mera framträdande roll. Detta skall längre fram mera ingående belysas.

Ex. 3.26. Om luft strömmar med en hastighet av 30.5 m/s genom ett rör med diametern 10 cm, vilken hastighet måste då vid samma tryck och temperatur luften ha, om diametern ökas till 25 cm och dynamisk likformighet skall råda?

Lösning: Enligt 3.41 fordras att

$$\frac{L_1 \cdot v_1}{v_1} = \frac{L_2 \cdot v_2}{v_2}$$

men här gäller att $v_1 = v_2$, $L_1 = D_1 = 10$ cm och $L_2 = D_2 = 25$ cm, varför

$$v_2 = \frac{D_1 \cdot v_1}{D_2} = \frac{10 \cdot 3050}{25} = 1220 \text{ cm/s}$$

Svar: Luftens hastighet 12.2 m/s.

Ex. 3.27. En i vatten helt nedsänkt kropp skall omflytas av detta med en hastighet av v m/s. En modell av kroppen är 10 ggr mindre. Vilken hastighet skall samma vatten ha vid provning av modellen, om dynamisk likformighet skall råda?

Lösning: Enligt (3.40) gäller

$$\frac{L \cdot v}{v} = \frac{L \cdot v_x}{v}$$

eller

$$v_x = 10 v$$

Svar: Hastigheten hos vattnet skall vid provning av modellen vara 10 ggr större än den kring prototypen rådande.

3432. Froudes tal. Vid vätskans strömning i öppna kanaler och vid fartygens gång uppstå företeelser knutna till en fri vätskeyta (vattenyta). Vågrörelser uppstå, vilka innebära att tyngdkraften är verksam. De olika vätskeelementen komma att intaga lägen både över och under den vilande fria vätskeytan. Det visar sig, att i sådana fall det redan i exempel 3.23 införda Froudes tal F anger villkoret för dynamisk likformighet mellan tvänne vätskeströmningar. Vi undersöka dess närmare betydelse.

I exempel 3.23 erhöles vi Froudes tal under formen

$$F = \frac{\rho v^2}{a \lambda} = \frac{v^2}{a \frac{\lambda}{\rho}} \quad (a)$$

Sambandet mellan ρ och γ måste i ett godtyckligt enhetssystem kunna skrivas

$$\gamma = k \cdot \rho \cdot g \tag{b}$$

där k är en numerisk konstant. Kvoten $\frac{\gamma}{\rho}$ kan alltså i ekvation (a) substitueras med $k \cdot g$. Således

$$F = \frac{v^2}{a \cdot kg} \tag{c}$$

I allmänhet definieras Froudes tal F som kvadratroten ur $\frac{v^2}{a \cdot g}$ ($k = 1$) och vi definiera slutgiltigt

$$F = \frac{v}{\sqrt{a \cdot g}} \tag{3.42}$$

De krafter som enligt erfarenheten i huvudsak bestämma en vätskas rörelse, när en fri vätskeyta deltar äro, tryck-, tröghets- och tyngdkrafter. Liksom man i det fall, att en vätska rör sig helt innesluten i ett rör, bortser från tyngdkraften, så bortser man i detta fall från friktionskrafterna vid uppställandet av det dynamiska likformighetskravet. Vi kunna således uppfatta trycket som resultant till tröghets- och tyngdkraften. Detta innebär då också, att dynamisk likformighet är förverkligad, om i två vätskerörelser kvoten tröghetskrafter: tyngdkrafter är lika i motsvarande punkter av strömbilden.

Tyngdkraften är tydligen proportionell mot $m \cdot g$ eller mot $\rho L^3 g$ och tröghetskraften ha vi redan visat vara proportionell mot $\rho L^2 v^2$. Den sökta dimensionslösa kvoten blir

$$\frac{\rho L^2 v^2}{\rho L^3 g} = \frac{v^2}{L \cdot g}$$

men detta är ju kvadraten på det ovan definierade Froudes tal. Det är alltså härmed visat, att Froudes tal, vilket redan inledningsvis påpekats, anger villkoret för dynamisk likformighet under angivna betingelser. Likformighetskravet kunna vi således formulera: Om tröghets- och tyngdkrafter kunna anses vara de bestämmande vid tvenne vätskerörelser, mellan vilka geometrisk likformighet råder, äro de även dynamiskt likformiga vid lika värden på Froudes tal. Om modellen är mindre än prototypen, visar Froudes tal att hastigheten skall vara mindre kring modellen än kring prototypen (jfr förhållandena vid Reynolds tal!)

I samband med den allmänna diskussionen av dynamisk likformighet påpekades, att även andra krafter än de här mera ingående behandlade kunna vara av betydelse. Det är således möjligt att härleda andra likformighetskrav under beaktande av dessa krafter. I exempel 3.24 ha vi t.ex. namngivit kvoten $\frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}}$ såsom Webers tal, där hänsyn toges till uppträdandet av ytspännings- krafter. Reynolds och Froudes tal äro dock de kanske viktigaste, och vår behandling av dem får räcka såsom exemplifiering av de viktiga tankegångar, som ligga bakom

begreppen dimensionsanalys och dynamisk likformighet.

Ex. 3.28. En konstruktion 1 m lång skall byggas i vatten. Vattenhastigheten blir v m/s. Den kraft, varmed det strömmande vattnet genom vågbildning i ytan påverkar konstruktionen, undersöks medelst en a ggr mindre modell. Huru stor skall vattenhastigheten kring modellen vara, om dynamisk likformighet skall råda?

Lösning: I detta fall tillämpas Froudes likformighetslag. Antag att vattenhastigheten skall vara v_m . Då erhålles

$$\frac{v}{\sqrt{l \cdot g}} = \frac{v_m}{\sqrt{\frac{l}{a} \cdot g}}$$

eller

$$v_m = \frac{v}{\sqrt{a}}$$

Sifferexempel: $l = 30$ m, $v = 5$ m/s. Modellens längd l m eller $a = 30$.

Detta ger

$$v_m = \frac{5}{\sqrt{30}} = 0.91 \text{ m/s}$$

35. Utströmning.

I avdelning 31 ha vi infört vissa allmänna kinematiska begrepp och försökt skaffa oss en elementär överblick av den rent geometriska sidan av vätskornas rörelse. Den kinematiska beskrivningen av rörelseförloppen utvidgades så i avdelning 32 att omfatta ett dynamiskt betraktelsesätt, där begreppen kraft, tröghet, massa etc. gav oss möjligheter att uppställa samband mellan de rörelsen orsakande krafterna och rörelsens förlopp. Detta betraktelsesätt tillämpades på den ideella vätskan, varigenom den matematiska behandlingen förenklades och vi medelst ett rent deduktivt förfarande kunde erhålla värdefulla samband såsom Bernoullis ekvation, Toricellis lag o.s.v. I avdelning 33 definierades begreppet inre friktion hos en vätska, och i 34 redogjordes för innebörden i termen dynamisk likformighet och ett par viktiga likformighetslagar härleddes. I följande avdelningar skola vi nu på den lagda grunden och med hjälp av experimentellt funna data skaffa oss formler, som tillåta oss att göra beräkningar vid olika uppkommande problem.

351. Utströmningskoefficient.

Redan i avdelning 3223 ha vi med utgångspunkt från Bernoullis ekvation visat, att utströmningshastigheten vid en vätskas fria utströmning ur ett kärl är

$$v = \sqrt{2gh}$$

där h är vertikala avståndet mellan vätskeytan i kärlet och utströmningsöppningens centrum. Med fri utströmning menas då att utströmningen sker i ett medium, vars täthet är försumbar. I detta medium är i allmänhet luft. Karakteristiskt är även, att i allmänhet en stråle bildas. Motsatsen till fri utströmning är täckt utströmning, varmed förstås, att vätskan strömmar ut i ett medium, vars täthet ej kan försummas i förhållande till den utströmmande vätskans täthet. I allmänhet gäller vid täckt utströmning, att den utströmmande vätskan är densamma som den vätska, i vilken utströmningen äger rum. T.ex. vatten i vatten.

Enligt Toricellis lag skulle alltså vid liten utströmningsöppning ΔA den per tidsenhet utströmmande vätskemängden, d.v.s. q vara

$$q = v \cdot \Delta A = \Delta A \sqrt{2gh} \quad (3.43)$$

Emellertid visar erfarenheten, att q icke uppgår till detta värde utan i allmänhet är betydligt mindre eller

$$q = \mu A \sqrt{2gh} \quad (3.44)$$

där μ är en koefficient mindre än 1 och benämnd utströmningskoefficient. Experimentella undersökningar visa, att denna koefficient μ kan uppfattas såsom en produkt av tvenne andra koefficienter en hastighetskoefficient α och en kontraktionskoefficient β . Således

$$\mu = \alpha \beta \quad (3.45)$$

Hastighetskoefficienten ger uttryck åt den hastighetsreduktion, som uppkommer på grund av vätskans inre friktion och som verkar som en minskning av h . Kontraktionskoefficienten däremot ger uttryck åt en reduktion av den aktuella utströmningsarean. Experimentella och teoretiska undersökningar visa, att en kontraktion av vätskestrålen sker omedelbart utanför utloppsöppningen. Arealen av strålen, där kontraktionen är störst kallas ofta "vena contracta" och vi beteckna den med A_v . Här måste också maximal hastighet v_v råda. Det sagda ger oss alltså möjlighet att skriva

$$v_v = \alpha \sqrt{2gh} \text{ och } A_v = \beta \cdot A \quad (a)$$

eller

$$q = A_v \cdot v_v = \alpha A_v \sqrt{2gh} = \alpha \beta A \sqrt{2gh} \quad (3.46)$$

eller i den form, som givits tidigare

$$q = \mu A \sqrt{2gh}$$

I figur 3.29 belyses uppkomsten av "vena contracta". Undersökningar visa att storleken av α och β är beroende av framför allt utloppsöppningens form men även i viss mån av storleken på h .

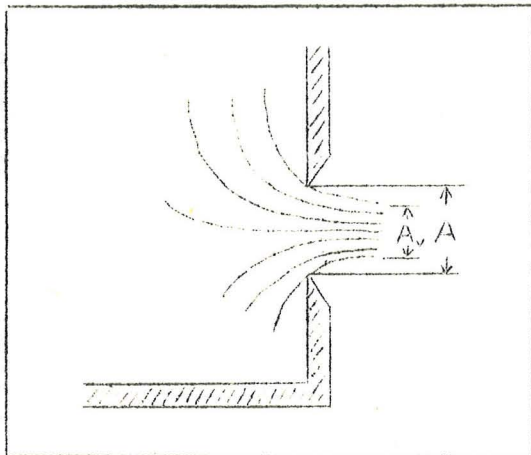


Fig. 3.29

I allmänhet varierar α inom gränserna 0.98 till 1.00, medan β är betydligt mindre med värden mellan 0.61-0.65. Hastighetsreduktionen är minst, då utströmningen sker "skarpkantat" (se fig. 3.29!). Genom speciell utformning av utloppsöppningen t.ex. genom att den förses med ett kort koniskt rör kan β stiga till 0.90. För vissa väl definierade utloppsöppningar finns i lit-

teraturen på basis av experimentella undersökningar tabeller upprättade över utströmningskoefficientens (μ) storlek.

Ex. 3.29. Vid ett munstycksförsök med uppmätning av den bildade vattenstrålens koordinater erhöles (se fig. 3.30!) en längdkoordinat $x = 0.674$ m och en höjdkoordinat $y = 0.102$ m. Fallhöjden var 1.2 m och den uppmätta vattenmängden 0.16 l/s. Munstyckets diameter var 8.2 mm. Beräkna α , β och μ !

Lösning: På figur 3.30 ha givna data införts och vattenstrålens utloppshastighet betecknats med v_v (verklig hastighet). Enligt Toricellis lag blir v för en ideell vätska

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot 1.2} = \sqrt{2.4g}$$

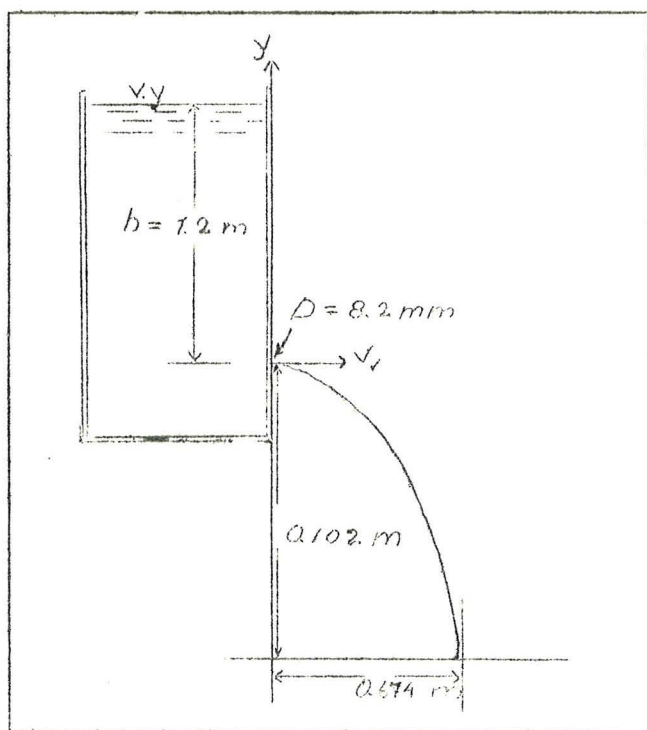


Fig. 3.30

Vi uppställa rörelseekvationerna med hjälp av den verkliga hastigheten v_v

$$\begin{cases} x = v_v \cdot t; \\ y = \frac{g}{2} \cdot t^2. \end{cases}$$

I detta fall således

$$\begin{cases} 0.674 = v_v \cdot t \\ 0.102 = \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{cases}$$

eller om t elimineras

$$v_v = 0.674 \sqrt{\frac{g}{0.204}}$$

och således enligt det föregående

$$\alpha = \frac{v_v}{v} = \frac{0.674 \sqrt{\frac{g}{0.204}}}{\sqrt{2.4g}} = 0.96$$

Enligt ekvation (3.46) är $q = A_v \cdot v_v$, vilket i detta fall ger

$$\frac{0.16}{1000} = A_v \cdot 0.96 \sqrt{2.4 g}$$

$$A_v = \frac{0.16}{960 \sqrt{2.4 g}}$$

Härav beräknas

$$\beta = \frac{A_v}{A} = \frac{0.16}{960 \sqrt{2.4 g}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi \cdot 4.1^2}{1000^2}} = 0.65$$

Slutligen blir

$$\mu = \alpha \cdot \beta = 0.96 \cdot 0.65 = 0.62$$

Svar: $\alpha = 0.96$, $\beta = 0.65$ och $\mu = 0.62$.

Ex. 3.30. Bevisa att hastighetskoefficienten kan bestämmas, om utströmningsskärlet upphänges på en balans enligt figur 3.31 och den genom strömningen uppkomna reaktionskraften mätes genom att en vikt placeras så som figuren utvisar.

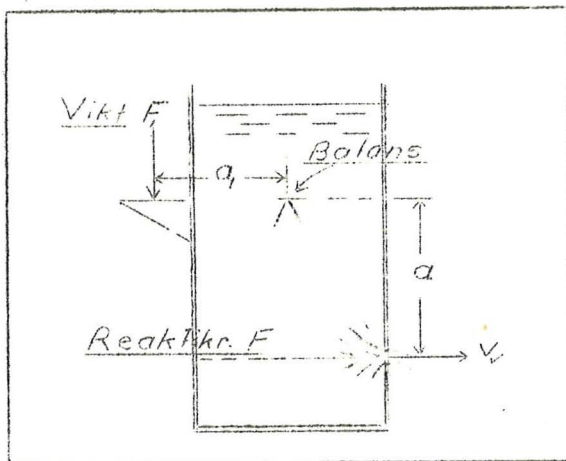


Fig. 3.31

som ger

$$v_v = \frac{F_1 a_1}{a \rho q}$$

För hastighetskoefficienten erhålles således ekvationen

$$\alpha = \frac{v_v}{v} = \frac{F_1 a_1}{a \rho q \sqrt{2gh}}, \quad \text{V.S.B.}$$

Lösning: Enligt mekaniken gäller

att

$$F \cdot t = m \cdot v$$

eller i detta fall, när

$$m = \rho \cdot A \cdot v_v \cdot t$$

$$F \cdot t = \rho A v_v \cdot t \cdot v_v$$

som ger

$$F = \rho \cdot q \cdot v_v$$

Med figurens beteckningar erhålles

lätt momentekvationen

$$F_1 a_1 = F a = a \rho q v_v$$

352. Utströmningsmängd vid konstant tryckhöjd

Den i det föregående givna diskussionen över utströmningshastighet har gällt sådana fall, där utloppsöppningens area varit så liten, att vi kunnat anse hastigheten konstant över hela arean. Utströmningsmängden q per tidsenhet har då lätt kunnat erhållas såsom produkten av hastigheten och arean.

Vi skola nu undersöka, huru utströmningsmängden per tidsenhet kan beräknas, när hänsyn måste tagas till att hastigheten varierar från punkt till punkt av utloppsöppningens area. Betrakta figur 3.32! Med i figuren införda beteckningar

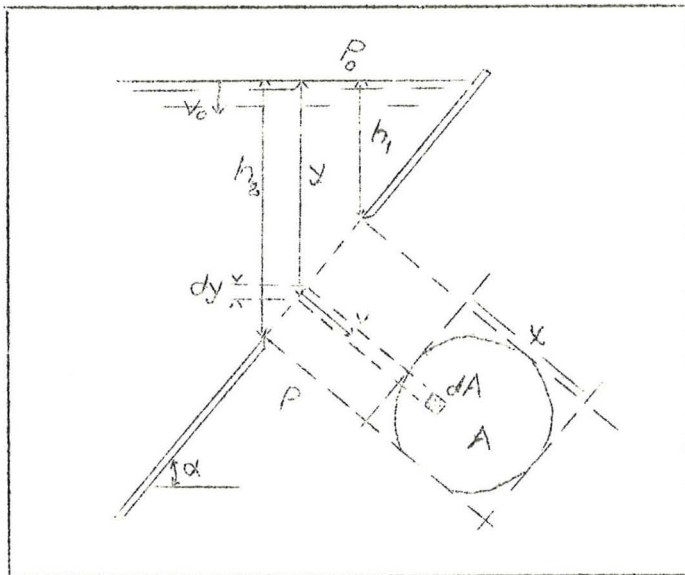


Fig. 3.32

och enligt ekvation (b) avdelning 3223 gäller för v , om hänsyn toges till uppträdande förluster

$$v = \alpha \sqrt{v_0^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + y\right)}$$

och för flödet (vätskeföringen) genom dA

$$dq = \mu v dA = \mu \sqrt{v_0^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + y\right)} dA$$

eller om dA substitueras med $x \frac{dy}{\sin \alpha}$ och integrationen utföres

$$q = \frac{\mu}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} x \sqrt{v_0^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + y\right)} dy \quad (3.47)$$

För att denna integral skall vara möjlig att lösa måste x kunna uttryckas som funktion av y eller symboliskt

$$x = f(y)$$

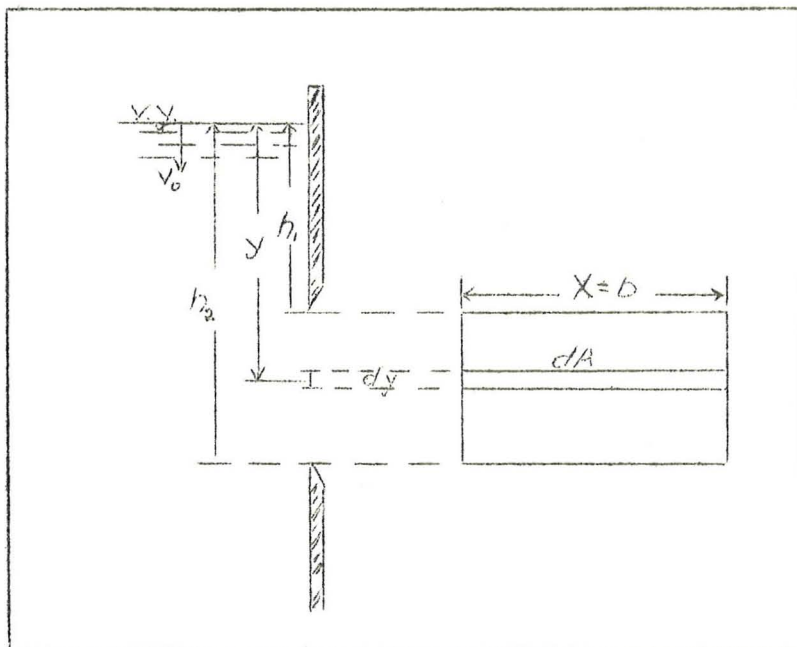
I många fall kan p_0 sättas = p och $\alpha = 90^\circ$. Vi införa dessa substitutioner och erhålla

$$q = \mu \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{v_0^2 + 2gy} \cdot f(y) dy \quad (3.48)$$

3521. Fri utströmning genom vertikal, rektangulär öppning.

Vi tillämpa ekvation (3.48), där $f(y) = b$. Således

$$q = \mu b \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{v_0^2 + 2gy} dy = \mu b \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{y + \frac{v_0^2}{2g}} dy$$



$$q = \mu b \sqrt{2g} \left/ \frac{h_2}{h_1} \right. \frac{2}{3} \left(y + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Fig. 3.33

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(h_2 + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(h_1 + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.49)$$

Ofta kan v_0 försummas i förhållande till h_1 och h_2 . Ekvationen (3.49) övergår då till formen

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}) \quad (3.50)$$

3522. Täckt utströmning genom vertikal öppning. Om utströmningen sker enligt figur 3.34 och utloppsöppningens area är A blir tydligen hastigheten i varje punkt konstant

$$v = \alpha \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

och q således

$$q = \mu A \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (3.51)$$

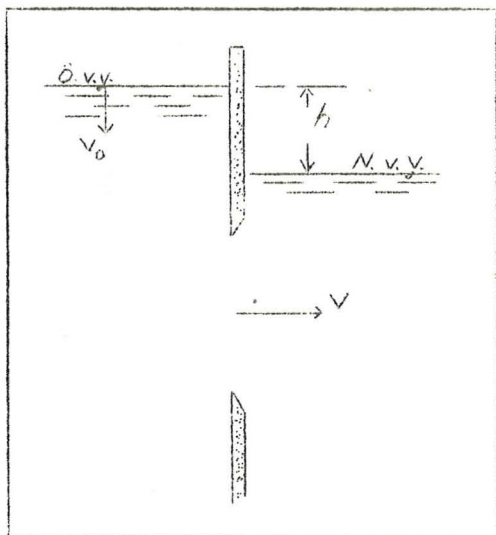


Fig. 3.34

Bortse vi från tillloppshastigheten v_0 förenklas ekvation (3.51) och antar formen

$$q = \Lambda \sqrt{2gh'}$$

Ytterligare formler för kombinationer av delvis täckt sidoöppning med och utan tillströmningshastighet kan naturligtvis härledas. Den intresserade hänvisas för dessa fall till litteraturen och under räkneövningarna genomgåna exempel. Se även exempel 3.35!

Ex. 3.31. I en fördämning finnes en dammlucka enligt figur 3.35. Luckans bredd är 1 m och dess höjd (mätt längs väggen) 0.5 m. Avståndet från luckans underkant till väggens överkant (längs väggen) är 1.2 m. Beräkna den utströmmande vattenmängden, då $\mu = 0.6$ och luckans lutning mot horisontalplanet är $\alpha = 45^\circ$.

Avståndet från luckans underkant till väggens överkant (längs väggen) är 1.2 m. Beräkna den utströmmande vattenmängden, då $\mu = 0.6$ och luckans lutning mot horisontalplanet är $\alpha = 45^\circ$.

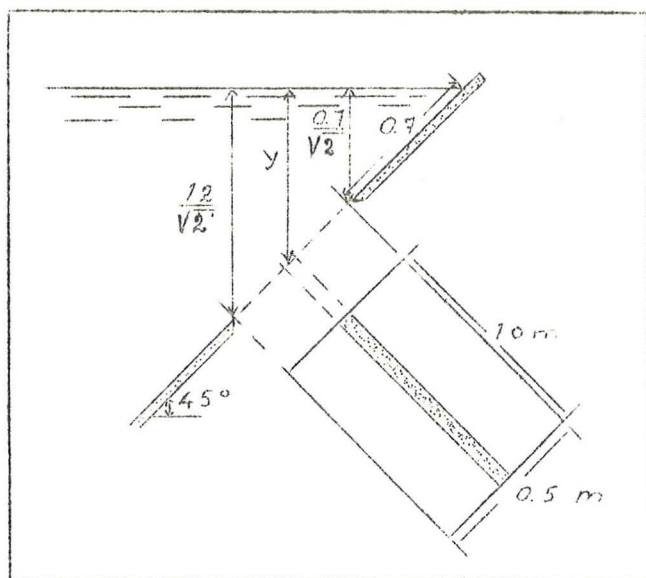


Fig. 3.35

Lösning: Beteckningar och antaganden framgå av figuren. Vi tillämpa formel (3.47)

$$q = \frac{\mu}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} x \sqrt{v_0^2 + 2g \left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + y \right)} dy$$

eller i detta fall

$$q = 0.6 \sqrt{2} \int_{\frac{0.7}{\sqrt{2}}}^{\frac{1.2}{\sqrt{2}}} 1 \cdot \sqrt{2gy} dy$$

$$q = \frac{2}{3} 0.6 \sqrt{2} \sqrt{2g} \left[\left(\frac{1.2}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{0.7}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \right] = 1.09 \text{ m}^3/\text{s}$$

Svar: Den utströmmande vattenmängden är $1.09 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ex. 3.32. Härled den per sekund utströmmande vattenmängden genom en trapezformad öppning, där $B = 2b = 2h$ och B befinner sig i vattenytan. Utströmningskoefficienten är μ .

Lösning: Beteckningar och antaganden framgå av figur 3.36.

Vi tillämpa formel 3.48.

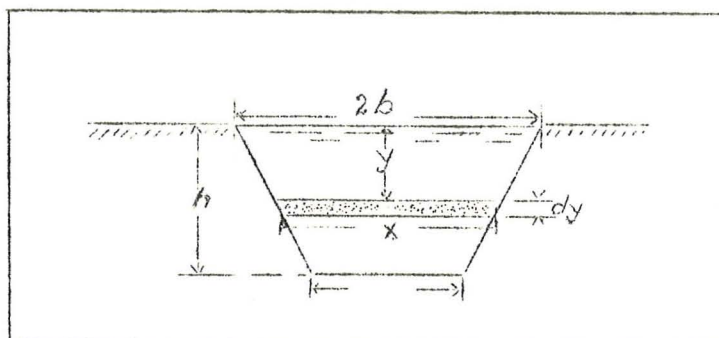


Fig. 3.36

$$q = \mu \int_0^h \sqrt{2gy} f(y) dy$$

Likformiga figurer ge

$$x = f(y) = 2b - \frac{b}{h} y$$

och således

$$q = \mu \int_0^h (2b - \frac{b}{h} y) \sqrt{2gy} dy = \mu b \sqrt{2g} \int_0^h (2\sqrt{y} - \frac{1}{h} \sqrt{y^3}) dy$$

$$q = \mu b \sqrt{2g} \left[\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5h} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{14}{15} \mu b \sqrt{2g} \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

men eftersom $b = h$

$$q = \frac{14}{15} \mu h^2 \sqrt{2gh}$$

Svar: Vattenföringen är $\frac{14}{15} \mu h^2 \sqrt{2gh}$.

3523. Skarpkantat fritt överfall. Om i formeln (3.49) $h_0 = 0$ erhålla vi uttrycket:

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.52)$$

I detta fall sker utströmningen tydligen så som figur 3.37 visar. Utloppsöppningen saknar övre begränsning, och man talar i sådana fall om fritt överfall. I det fall den atmosfäriska luften har fritt tillträde under strålen kallar man strålen luftad. Det fria överfallet kallas även av vissa författare "fullkomligt överfall", medan motsatsen det täckta (delvis täckta) överfallet kallas "ofullkomligt överfall". Den här valda terminologien fritt respektive täckt överfall motsvarar den vid helt begränsade öppningar tidigare införda. Om i ekvation (3.52) $v_0 = 0$ förenklas formeln för det rektangulära fria överfallet till

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}} \quad (3.53)$$

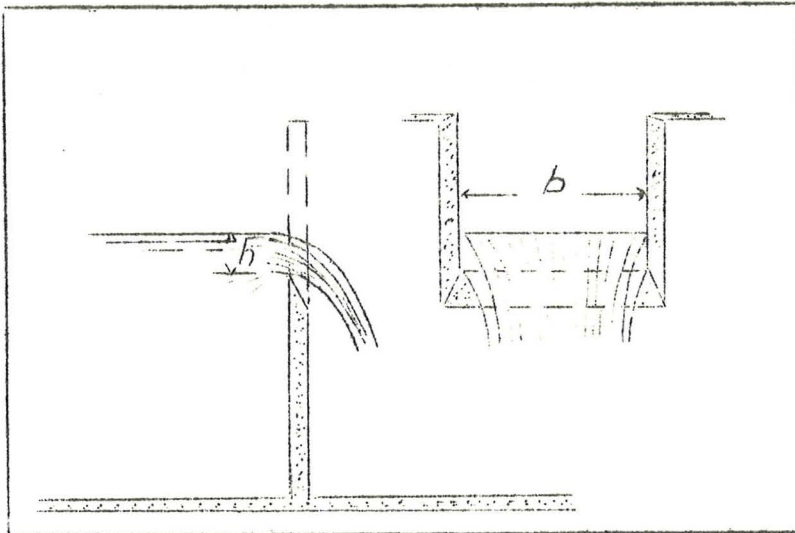


Fig. 3.37

Två huvudformer av fria överfall förekomma: det här närmare behandlade rektangelformade (U-formade) och det triangelformade överfallet. Olika slag av överfall användas för mätning av framrinnande vattenmängder. Genom kalibrering av överfallen kunna dessa mätningar göras mycket noggranna även vid starkt växlande flödesmängder.

Vid mindre krav på noggrannhet kan μ ofta sättas lika med 0.62 a 0.68.

Ex. 3.33: Härled en formel för beräkning av den vattenmängd, som per sekund utströmmar genom ett triangulärt överfall! v_0 sättes = 0 och vattenytans höjd över överfallets spets är h. Övriga storheter framgå av figur 3.38.

Lösning: Behövliga beteckningar finnas införda på figuren. Följande ekvationer erhållas:

$$\begin{cases} dq = \mu x dy \sqrt{2gy} & (a) \\ \frac{x}{2(h-y)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} & (b) \end{cases}$$

Ur (b) erhålles

$$x = 2(h-y) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

vilket insatt i (a) ger

$$q = 2\mu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} \int_0^h (hy^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}) dy$$

$$q = 2\mu \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} hy^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^h$$

$$q = \frac{8\mu}{15} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2g} h^{\frac{5}{2}}$$

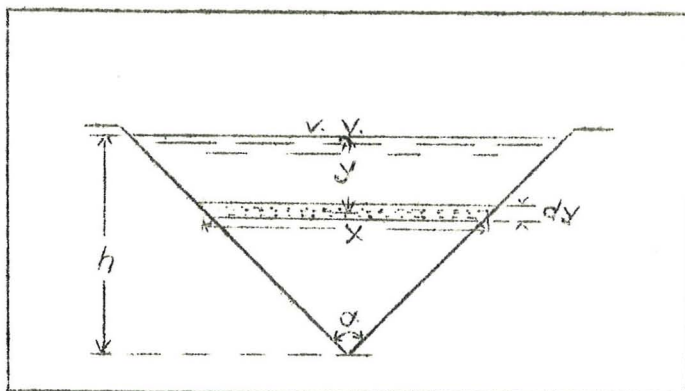


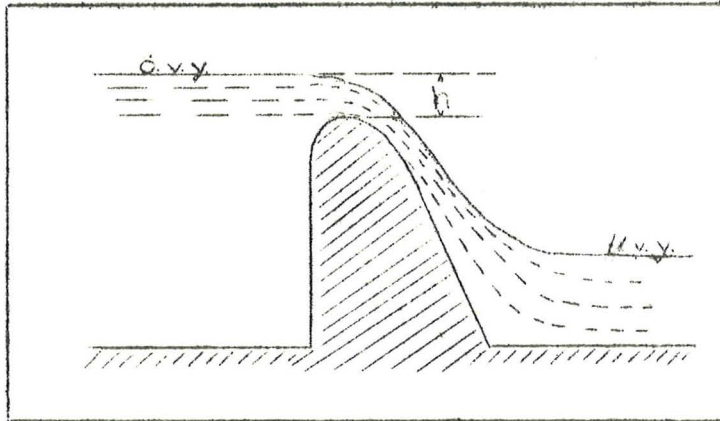
Fig. 3.38

Anmärkningar: För $\alpha = 90^\circ$ erhålles

$$q = \frac{8\mu}{15} \sqrt{2g} h^{\frac{5}{2}}$$

Denna form på överfallet användes ofta vid mätning av mindre vattenmängder. I litteraturen finnas noggranna formler för huru μ varierar med h och övriga storheter på överfallet. Vid noggranna mätningar upprättas en kalibreringskurva.

3524. Överfallsdammar, skibordsdammar. Under det att överfall (skibord) med skarp kant i första hand användas för mätning av vattenmängder, tjäna överfallsdammar, skibordsdammar av större styrka och med avrundat krön till att dämna upp vattenmassor. Såsom figur 3.37 visar, berör strålen överfallets kant endast längs en linje. Överfallsdammar däremot utföras i regel så, att strålen med sin undersida följer fördämningen. Se figur 3.39!



Den framströmmande vattenmängden blir även här i överensstämmelse med 3.52, om $v_0 = 0$

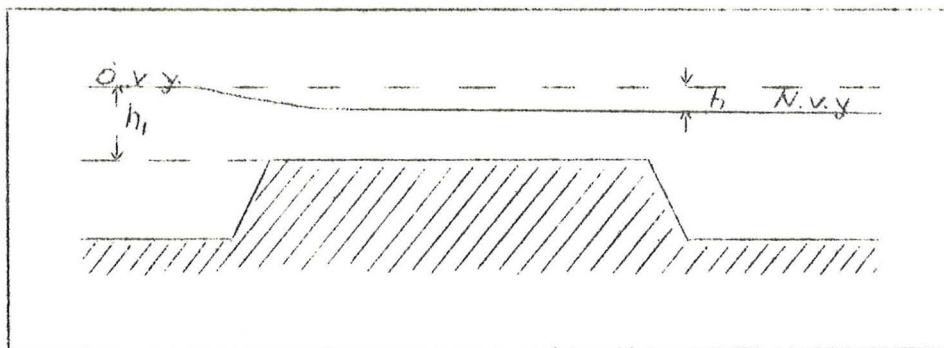
Fig. 3.39

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}$$

(3.54)

Värdet på μ är dock här starkt beroende av krönets utformning och sidovägens lutning. För i praktiken använda konstruktioner varierar sålunda μ mellan 0.74 och 0.95.

3525. Brett överfall. Om dammväggens bredd i figur 3.39 tänkes öka, så att ett längre vågrätt plan erhålles, talar man om brett överfall. Vid passagen



över planet undergår vattenytan en viss sänkning h motsvarande hastighetsökningen (se figur 3.40!). Vid beräkningen av framströmmande vattenmängden bör

Fig. 3.40

de man väl teoretiskt utgå från uttrycket för ett delvis täckt överfall. Erfarenheten visar emellertid att man, när h är litet i förhållande till h_1 , kan bortse från den fria delen av överfallet. Man kan således med god approximation använda sig av formeln för helt täckt utströmning (3.51) med $A = b(h_1 - h)$, varvid erhålles

$$q = \mu \cdot b (h_1 - h) \sqrt{2gh}$$

(3.55)

för beräkning av den framströmmande vattenmängden. μ varierar mellan 0.6-0.8.

Vi antaga nu att vattenytan ovanför överfallet hålles vid konstant nivå, men att vattenytan nedanför överfallet sänkes, varvid h ökar. q kommer till följd härav att uppnå ett maximivärde, emedan \sqrt{h} ökar men h_1-h minskar i formel (3.55). Maximipunktens läge erhålles genom nollställning av derivatan av q med avseende på h . Således

$$q = \mu b \sqrt{2g} (h_1 - h) \sqrt{h}$$

$$\frac{dq}{dh} = \mu b \sqrt{2g} \left[(h_1 - h) \frac{1}{2\sqrt{h}} - \sqrt{h} \right] = 0$$

eller

$$h = \frac{h_1}{3}$$

Insättes detta värde på h i ekvation (3.55) erhålles maximala avbördningen till

$$q_{\max} = \mu b \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} h_1 \sqrt{\frac{h_1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \mu b \sqrt{2g} h_1^{\frac{3}{2}} \quad (3.56)$$

Detta resultat innebär således, att så fort den nedre vattenytan ligger minst $\frac{1}{3} h_1$ längdenheter under den övre vattenytan, så är överfallets maximala vattenavbördande förmåga uppnådd. Orsakerna till detta delvis överraskande resultat ligger i den strömmande vätskans energiförhållanden. I samband med studiet av vätskors rörelse i öppna ledningar skola vi återkomma till denna sak.

Ex. 3.34. I en å når vattnet normalt 20 cm över kanten på ett i ån anbragt skibord. Denna höjd ökar vid vårflod till det tredubbla värdet. Huru många procent större än den normala är vattenmängden vid vårfloden? μ kan antagas vara lika i båda fallen.

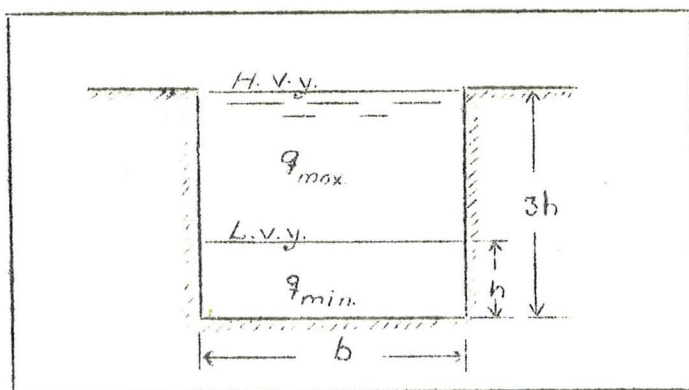


Fig. 3.41

tuella ökningen med x , så gäller

$$\frac{100+x}{100} q_{\min} = q_{\max}$$

eller

Lösning: Beteckningar och antaganden framgå av figur 3.41. Formel (3.54) tillämpas

$$q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}$$

$$q_{\min} = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}$$

$$q_{\max} = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (3h)^{\frac{3}{2}}$$

Om vi beteckna den procen-

$$\frac{100+x}{100} = 3^{\frac{3}{2}}$$

vilket ger

$$x = 419.6 \%$$

Svar: Ökningen är 420 %.

Ex. 3.35: Huru stor vattenmängd passerar per sekund och längdmeter över det delvis täckta överfallet i figur 3.42, om undre vattenytan står 0.2 m och övre vattenytan 0.5 m över dammkrönet och $\mu_1 = \mu_2 = 0.8$.

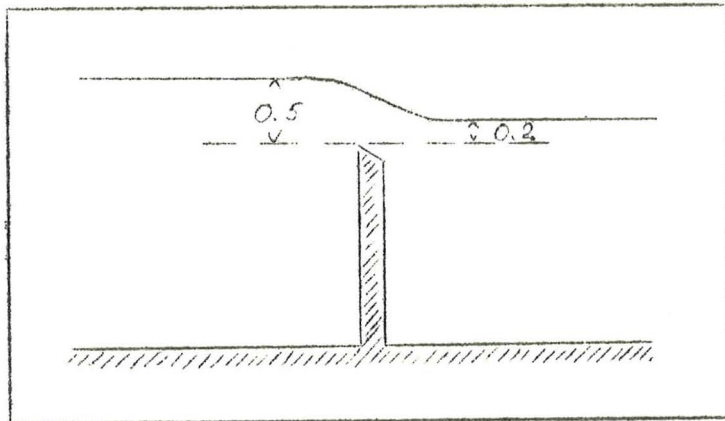


Fig. 3.42

Lösning: Överfallet kan betraktas såsom bestående av en fri del med höjden $0.5 - 0.2 = 0.3$ m och avbördningen q_f samt av en täckt del med höjden 0.3 och avbördningen q_t . Enligt (3.53) gäller för q_f

$$q_f = \frac{2}{3} \cdot 0.8 \cdot 1 \cdot \sqrt{2g} \cdot 0.3^{\frac{2}{3}} = 0.388$$

och för q_t enligt (3.51)

$$q_t = 0.8 \cdot 0.2 \cdot 1 \sqrt{2g \cdot 0.3} = 0.388$$

och således

$$q = q_f + q_t = 0.388 + 0.388 = 0.776 \text{ m}^3/\text{s}$$

Svar: Vattenmängden är $0.776 \text{ m}^3/\text{s}$.

353. Utströmningsmängd vid variabel tryckhöjd.

De i det föregående givna formlerna för utströmningen per sekund gälla alla vid konstant tryckhöjd. Om under utströmningens gång tryckhöjden eller vattenståndet h ändrar sig, måste formlerna skrivas

$$dQ = q dt \quad (a)$$

där q då är det momentana flödet, vars storlek beror av den momentana utströmningsarean A_y och höjden y till den fria vattenytan eller symboliskt

$$q = f(A_y, y) \quad (b)$$

eller

$$dQ = f(A_y, y) dt \quad (c)$$

Utströmningen sker i allmänhet från ett begränsat rum a (kärl, sjö, etc.) och följaktligen måste då gälla, om den fria vätskoytans area betecknas med A'_y och dy en differentiell minskning av y , att

$$dQ = -A'_y dy = -\varphi(y) dy \quad (d)$$

där A'_y är någon slags funktion av y eller $A'_y = \varphi(y)$.

Tänka vi oss dessutom, att en med tiden variabel tillrinning sker och teckna denna

$$dQ' = \phi(t)dt \quad (e)$$

så gäller för mängdförändringen dQ i a

$$dQ = -\varphi(y)dy + \phi(t)dt = f(A_y, y)dt \quad (f)$$

eller

$$\varphi(y)dy = \phi(t)dt - f(A_y, y)dt \quad (3.57)$$

Denna differentialekvation kan icke lösas under den allmänna form, som den här har, utan vi inskränka oss till ett par enkla fall.

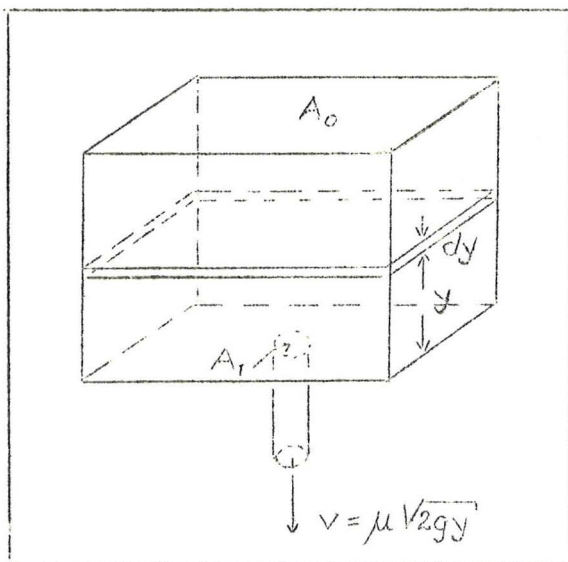
a. Ingen tillrinning, $\phi(t) = 0$. Ekvationen (3.57) övergår till formen

$$\varphi(y)dy = -f(A_y, y)dt$$

eller, om vi lösa ekvationen med avseende på t

$$t = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\varphi(y)}{f(A_y, y)} dy \quad (3.58)$$

Antag t.ex. att vi betrakta en utströmning från ett kärl, vars sektionsarea är konstant A_0 och att utströmningen sker genom en i förhållande till kärllarean liten öppning A_1 . Se figur 3.43! Tydligt gäller då



$$\varphi(y) = A_0$$

ssmt

$$f(A_y, y) = f(A_1, y) = \mu A_1 \sqrt{2gy}$$

och således

$$t = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{A_0 dy}{\mu A_1 \sqrt{2gy}} = - \frac{A_0}{\mu A_1 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$t = \frac{2A_0}{\mu A_1 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \quad (3.59)$$

Fig. 3.43

b. Tillrinningen konstant, $\phi(t) = q^1$. Vår allmänna differentialekvation får nu formen

$$\varphi(y)dy = [q^1 - f(A_y, y)]dt$$

vilken löst med avseende på t ger

$$t = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\varphi(y)dy}{q^1 - f(A_y, y)} \quad (3.60)$$

Betrakta t.ex. figur 3.43 och låt samma förutsättningar gälla som i föregående exempel blott med den skillnaden, att en konstant tillrinning q förekommer. Tydligt gäller då

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{A_0 dy}{q^1 - \mu A_1 \sqrt{2gy}} = \frac{A_0}{q^1} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dy}{1 - \frac{\mu A_1 \sqrt{2g}}{q^1} \sqrt{y}}$$

Den integral löses genom införandet av substitutionen

$$t = \frac{\mu A_1 \sqrt{2g}}{q^1} \sqrt{y} = c \sqrt{y}$$

varvid erhålles

$$t = \frac{2A_0}{\mu A_1 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) + \frac{A_0 q^1}{g \mu A_1^2} \ln \frac{\mu A_1 \sqrt{2gh_1} - q^1}{\mu A_1 \sqrt{2gh_2} - q^1}$$

För att detta uttryck skall vara giltigt måste naturligtvis $q^1 < \mu A_1 \sqrt{2gh_2}$. För $q^1 = 0$ erhålles formel (3.59). Finnas andra kritiska värden? Vad inträffar t.ex. om $q^1 = \mu A_1 \sqrt{2gh_2}$ och vad innebär detta fysikaliskt?

Ex. 3.36. En vattenbassäng med konstant rektangulär area (5 x 4 m) skall anordnas med bottenavlopp så dimensionerat, att nivån sjunker från 2 m över botten till 1 m över densamma på 30 min. Beräkna avloppsarean i cm^2 , då $\mu = 0.8!$

Lösning: Vi tillämpa formel (3.59)

$$30 \cdot 60 = \frac{2A_0}{\mu A_1 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4}{0.8 \cdot A_1 \sqrt{2g}} (\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$A_1 = \frac{50 \cdot 0.414}{1800 \cdot 4.43} = \frac{2.070}{180 \cdot 4.43} = 0.00260 \text{ m}^2$$

Svar: Utloppsarean skall vara 26.0 cm^2 .

Ex. 3.37. Härled ett uttryck för utströmningstiden över ett rektangulärt bräddavlopp, då ingen tillströmning äger rum! Se figur 3.44!

Lösning: Vi tillämpa formel (3.58) med

$$\psi(y) = A_0$$

samt enligt (3.53)

$$q = f(A_y, y) = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \cdot y^{\frac{3}{2}}$$

och således

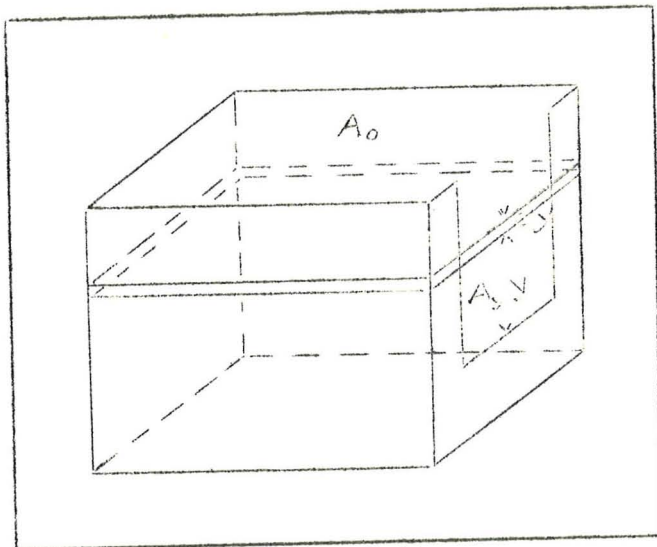


Fig. 3.44

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{A_0 dy}{\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \cdot y^{\frac{3}{2}}}$$

$$t = \frac{3A_0}{\mu b \sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_2}} - \frac{1}{\sqrt{h_1}} \right)$$

36. Strömning.

I avdelning 351 ha vi härlett och diskuterat vissa formler, som alla kunna sägas ha det gemensamt, att de hänföra sig till sådana förlopp, där en vätska från vila eller relativt liten hastighet övergår till större hastighet. Denna hastighetsförändring är dessutom knuten till relativt korta sträckor av strömlinjerna m.a. ord den konvektiva accelerationen $\left(\frac{v}{ds} \frac{dv}{ds}\right)$ är stor. I de närmast följande avdelningarna skola vi nu studera de närmare förloppen vid en viskös vätskas rörelse på en längre sträcka, när rörelsen är stationär och uppträdande konvektiva accelerationer relativt små. Vi ha i anslutning till i vissa läroböcker förekommande terminologi rubricerat denna företeelse såsom strömning och den tidigare nämnda som utströmning.

361. Några termer och definitioner.

En ledning (vätske-) kan sägas vara en avgränsad del av rummet, i vilket en vätska strömmar eller kan strömma. Man talar om öppna och slutna ledningar. Vid strömning i slutna ledning har vätskan ingen fri yta utan gränisar längs hela strömningstvårsnittet mot en fast vägg. Strömning i ett helt fyllt rör försiggår sålunda i en slutna ledning. Vid strömning i en öppen ledning är en viss del av strömningstvårsnittet begränsat av en fri yta, d.v.s. en vätskeyta i kontakt med atmosfären. Exempel på strömning i en öppen ledning är sålunda strömningen i en endast delvis fylld rörledning eller i en ränna. Strömningen i en öppen ledning är i allmänhet mera komplicerad till sin karaktär, emedan den fria ytans höjdläge över ledningens botten kan variera och som följd härav även det vattenfyllda

tvärsnittet, våta arean. Om den våta arean vid en strömning är konstant till storlek och form, kallas strömningen likformig; varierar däremot densamma kallas strömningen olikformig. Av det sagda följer, att strömning i öppna ledningar ofta blir olikformig.

362. Bernoullis ekvation med förlustterm; begreppet fall.

Vi ha tidigare visat, att vid den ideella vätskans strömning så gäller längs varje strömlinje eller i ett slutet strömrör

$$\frac{v^2}{2g_0} + p + \gamma \cdot z = \text{konst.}$$

d.v.s. den till volymenheten hänfödda energisumman är konstant. Vid experimentella undersökningar finner man nu lätt, att energisumman i strömriktningen avtar eller att summan av de olika tryckformerna icke uppnår den ideella nivån eller ideella energilinjens. Vid alla verkliga vätskors strömning visar det sig, att energilinjens ständigt faller eller att energinivån avtar i strömriktningen. Vid tillämpningen av Bernoullis ekvation kommer därför högra membrum alltid att vara mindre än det vänstra. Detta är också helt naturligt, om man påminner sig, att ingen hänsyn tagits till den inre friktionen, viskositeten, vid härledningen av ekvationen. För att man fortfarande skall kunna använda Bernoullis ekvation måste man således till högra membrum föga en term, som tar hänsyn till förlusterna. Vanligen skriver man därför Bernoullis ekvation med förlustterm

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f} \quad (3.61)$$

För tekniken är det av grundläggande betydelse att känna eller att kunna beräkna storleken av h_f vid olika förekommande strömningar. Man kan säga att hydraulikens huvudproblem har varit och är att finna säkra värden på denna förlustterm h_f vid olika praktiskt viktiga strömningsförlopp.

I anslutning till figur 3.45 belysavi ytterligare innebörden av förlusttermen h_f . Vi tillämpa Bernoullis ekvation med förlustterm på den likformiga strömningen i röret AB. För de två sektionerna A och B gäller då

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f$$

men på grund av att strömningen är likformig är $v_1 = v_2$ och således

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \quad (3.62)$$

Dividera vi denna ekvation med avståndet mellan sektionerna eller rörlängden s

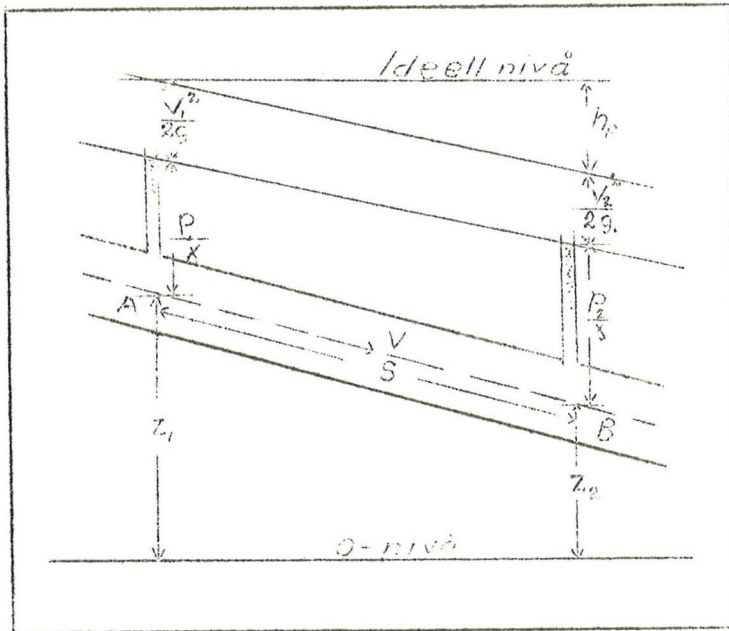


Fig. 3.45

fall, eller vid likformig strömning i en öppen ränna, enbart geometriskt fall.

erhålla vi

$$I = \frac{h_f}{s} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma \cdot s} + \frac{z_1 - z_2}{s} \quad (3.63)$$

Kvoten $\frac{h_f}{s}$ betecknad med I kallas strömningens fall eller enbart fallet (även hydraulisk gradient). Som synes är I sammansatt av tryckfallet $\frac{p_1 - p_2}{\gamma \cdot s}$ och det geometriska fallet eller ledningens lutning $\frac{z_1 - z_2}{s}$. Ofta förekommer naturligtvis endast det ena t.ex. vid strömning i ett horisontellt rör, enbart tryck-

37. Olika strömningsformer i rör; laminär och turbulent strömning.

I anslutning till den å figur 3.46 uppritade försöksanordningen vilja vi nu försöka bilda oss en uppfattning om vad som inträffar, när hastigheten i röret A varierar.

Apparaten utgöres av ett större kärl B med vatten, ett mindre kärl C med

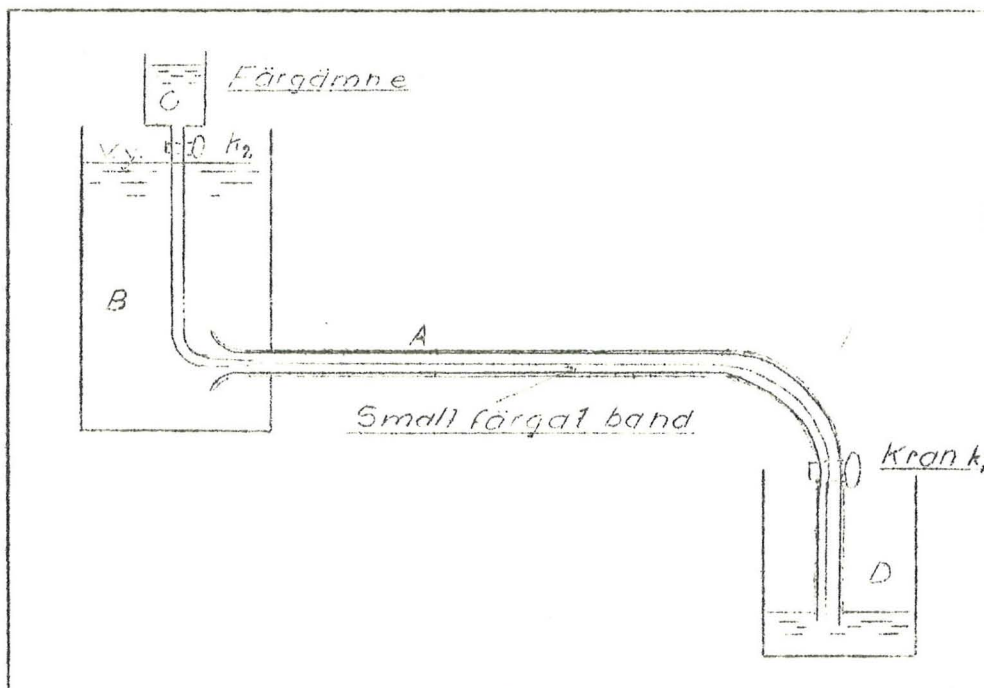


Fig. 3.46

färgat vatten (permanganat), ett glasrör A och ett uppsamlingskärl D. Behållaren C är försedd med ett omböjt, kranförsedd (k_2) glasrör, medelst vilket färgat vatten kan införas i röret A. Utrinningen genom A regleras medelst kranen k_1 .

Vi öppna försiktigt kranen k_1 , och införa i det strömmande vattnet färglösning från C medelst inställning av kranen k_2 . Vid lågastigheter kunna vi iakttaga, att den införda färglösningen strömmar i ett fint band längs rörcentrum. Ingen omblandning av de strömmande vattenpartiklarna förekommer. Färgbandet verkar målat på glasväggen och vi kunna överhuvud taget ej iakttaga, att vattnet i röret strömmar. Skakningar av apparaturen visar sig i tillfälliga vågbildningar på färgbandet och vid kraftiga störningar kan färgen blandas helt med vattnet i röret. Strömningen återgår dock mycket snart till den tydligen med räta parallella strömlinjer förlöpande rörelse, som färgbandet utvisar. Vi säga att vattnets strömning är laminär (av lat. lamina = skiva). I direkt anslutning till termens latinska betydelse kallas strömningen även skiktströmning.

Öppna vi kranen k_1 ytterligare, ökar hastigheten i röret, och rörelsen blir känsligare för tillfälliga störningar. Färgbandet utvisar allt större benägenhet till vågbildningar, och vid en viss hastighet brytes färgbandet plötsligt sönder; färgen virvlas ut över hela rörsektionen. De enskilda vattenpartiklarna röras ej längre i med röraxeln parallella banor, utan större eller mindre radiellt riktade hastighetskomponenter uppträda, vilka förorsaka en fullständig omblandning av partiklarna. Vi säga att vattnets strömning är turbulent (av lat. turbuléntus = upprörd, virvlande).

Om rörets sektionsarea A uppmätts och den under tiden t i kärlet D utrunna mängden Q uppmätes, kan medelhastigheten v (index m utelämnas) bestämmas ur formeln

$$v = \frac{Q}{A \cdot t}$$

Genom noggranna liknande undersökningar har man funnit, att det existerar en hastighet $v_{c,u}$ undre kritiska hastigheten, under vilken strömningen alltid är laminär. Om hastigheten ligger vid eller under denna kritiska hastighet utjämnas utifrån förorsakade störningar i strömningen snabbt m.a. ord den laminära strömningen är den enda stabila. På samma sätt har man funnit, att det också existerar en övre kritisk hastighet $v_{c,ö}$, över vilken rörelsen alltid är turbulent. Denna hastighet är ej lika skarpt definierad, då möjligheterna att med stigande hastighet bibehålla laminär rörelse i hög grad äro beroende av försöksanordningarna. Mellan dessa två gränshastigheter kan alltså både laminär och turbulent rörelse förverkligas. Figur 3.47 belyser ytterligare de här omnämnda förhållandena. Av figuren synes, att det som övergångszon betecknade området II mellan $v_{c,u}$ och $v_{c,ö}$ bl.a. karakteriseras av att den laminära rörelsen ej är

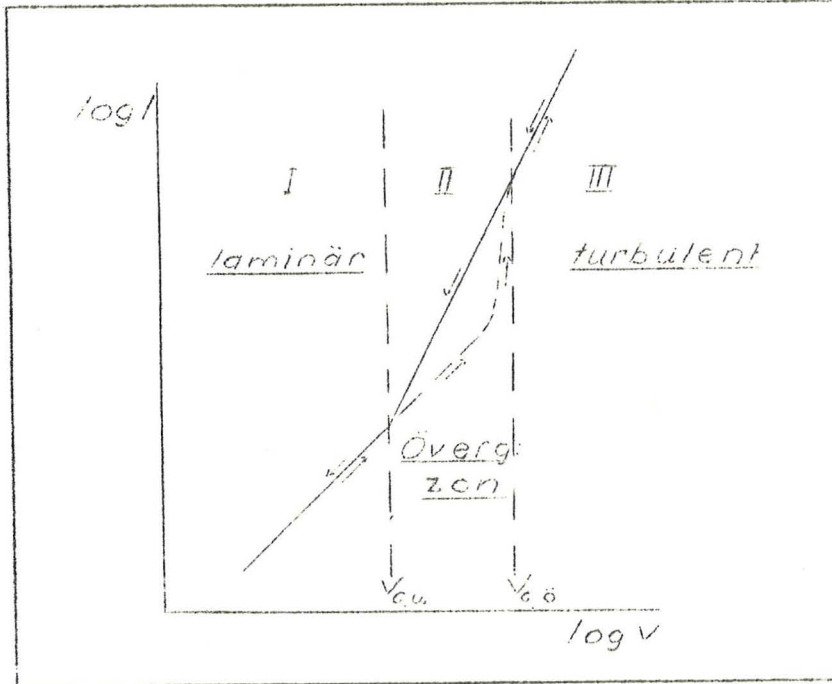


Fig. 3.47

stabil och att övergången från turbulent till laminär rörelse är skarpare definierad än omvändningen.

Den förste, som gjorde noggrannare både experimentella och teoretiska undersökningar av ovan skildrade förhållanden var Osborne Reynolds (1883). Han fann, att storleken på den tidigare namngivna kvoten

$$R = \frac{D \cdot v \cdot \rho}{\mu} = \frac{D \cdot v}{\nu} \quad (3.64)$$

karaktiserade den i ett

visst rör existerande ström-

ningen. Det är sålunda icke bara den rådande hastigheten v utan även rördiametern D samt den strömmande vätskans kinematiska viskositet ν , som bestämmer den existerande rörelsens natur. Innebörden av detta tal, Reynolds tal, har tidigare behandlats i avdelning 343, varför vi hänvisa dit. Enligt där framkomna resultat anger R villkoret för dynamisk likformighet mellan tvenne strömningar i rör. Det värde på R , som anger övergången från laminär till turbulent rörelse, kallas Reynolds kritiska tal och betecknas här med R_{krit} . För cirkulära metallrörsledning har det visat sig, att R_{krit} ligger kring 2000 och för tegel- och betongrörsledning är R_{krit} ca 1200. Det måste observeras, att enligt det dynamiska likformighetskravet en jämförelse av strömningens natur i rör med olika väggbeskaffenhet innebär, att de olika rörslagen måste karakteriseras med var sitt R_{krit} . Ju slätare den inre rörytan är ju högre R_{krit} -värde erhålles. Den mot R_{krit} svarande hastigheten tecknas v_{krit} , så att följande samband gäller

$$\frac{D \cdot v_{krit}}{\nu} = R_{krit} \quad (3.65)$$

Liksom man kan tala om en övre och en undre kritisk hastighet kan man också tala om ett övre och ett undre kritiskt Reynolds tal. Det övre kritiska Reynoldska talet är dock mindre betydelsefullt, varför man i allmänhet menar det undre kritiska talet, när man utan närmare bestämning anger R_{krit} . De här anförda värdena på Reynolds tal äro också undre kritiska värden.

De vid den turbulenta rörelsen uppträdande energiförlusterna äro av en annan storleksordning än de vid den laminärarörelsen uppträdande. De höga värdena på R (10^4 - 10^6) vid turbulent strömning ge vid handen, att tröghetskrafterna

vid denna strömning äga en betydande storlek. Detta sammanhänger med de i virvlarna uppträdande accelerationerna, vilket innebär ständiga förändringar i den lokala hastighetens storlek och riktning.

Den i figur 3.48 uppritade försöksanordningen tillåter oss att närmare studera de vid strömningen i rör uppträdande förlusterna. Genom att variera

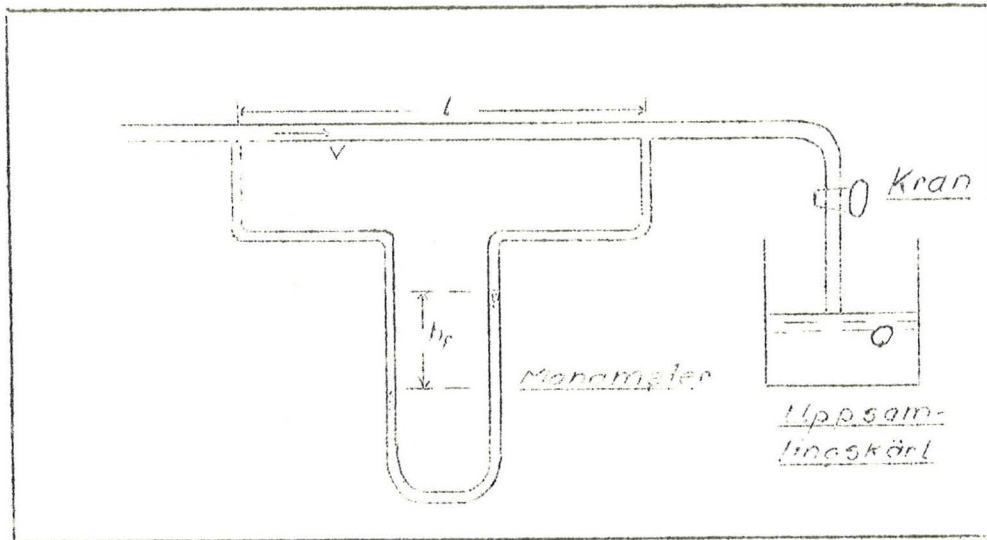


Fig. 3.48

den per tidsenhet uttagna vattenmängden Q kunna vi variera hastigheten v i röret. Genom att dessutom i enlighet med figur 3.46 införa färgämne kunna vi studera rörelsens natur av laminär eller turbulent. Om vi nu antaga, att fallet $I = \frac{h_f}{l}$ kan tecknas

$$I = k \cdot v^n$$

och logaritmera denna ekvation, så erhålla vi

$$\log I = \log k + n \log v$$

Det skall då visa sig, att det experimentella materialet ger tvenne räta linjer enligt figur 3.47. Den inom det laminära hastighetsområdet gällande linjen har vinkelkoefficienten $n = 1$ och således är

$$I = k \cdot v$$

eller i ord uttryckt: vid laminär rörelse är fallet proportionellt mot första potensen av hastigheten. För den turbulenta rörelsen visar det sig däremot, att motsvarande linjes lutning är större, d.v.s. $n > 1$ och i allmänhet mellan 1.8 och 2 beroende på det studerade rörets väggbeskaffenhet. Vid turbulent rörelse är fallet proportionellt mot potensen 1.8 - 2.0 av hastigheten.

För strömning under praktiska förhållanden (i ledningar, vattendrag och dylikt) överskrider R i allmänhet R_{krit} . Hastigheten är med andra ord så hög, att rörelsen är turbulent.

Ifråga om vattenrörelsen i jord ställer sig förhållandena annorlunda. Vattnets strömning sker här i allmänhet i ett fint porsystem med låga strömningshastigheter. Detta gör, att den laminära rörelsen är förhärskande. Som allmän regel gäller därför, att vattenrörelsen i ledningar och vattendrag är turbulent, medan grundvattnets (markvattnets) rörelse är laminär.

Ex. 3.38. Beräkna v_c för en vattenledning med inre diametern 10 cm, om vattnets temperatur är 10°C !

Lösning: Tabell 2 avdelning 331 ger $\nu = 0.0131$ stok och enligt det föregående är $R_{\text{krit}} = 2000$. Således gäller

$$\frac{v_c \cdot 10}{0.0131} = 2000$$

$$v_c = 2.62 \text{ cm/s}$$

Ex. 3.39. Beräkna den vattenmängd, som på 4 min. kan tagas ur en 0.5 tums kopparledning med inre diameter 0.378 tum utan att turbulens inträder! Vattnets temperatur 68°F .

Lösning: Vi räkna i c-g-s-enheter. 1 tum = 2.54 cm och 0.378 tum = $0.378 \cdot 2.54$ cm. $68^{\circ}\text{F} = \frac{5}{9}(68-32) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20^{\circ}\text{C}$. Tabell 2 ger $\nu = 0.0101$ stok. Således

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \pi (0.378 \cdot 1.27)^2 \cdot v_c \cdot 4 \cdot 60 \\ 2000 = \frac{v_c \cdot 0.378 \cdot 2.54}{0.0101} \end{array} \right.$$

$$v_c = \frac{20.2}{0.378 \cdot 2.54}$$

$$q = 10.1 \cdot \pi \cdot 0.378 \cdot 1.27 \cdot 240 = 3650 \text{ cm}^3$$

$$Q = 3.65 \text{ l}$$

Ex. 3.40. Beräkna R för en 2.5 cm (inre diameter) vattenledning, om vattnets hastighet är 1 m/s och temp. 10°C !

Lösning:

$$R = \frac{2.5 \cdot 100}{0.0131} = \frac{2.5}{1.3} 10^4 \approx 20000$$

Anmärkning: Ex. 3.38 och 3.40 visa, att i en vattenledning av normala dimensioner hastigheten vida överstiger den kritiska hastigheten och att Reynolds tal är högt.

38. Motståndstal och rörfriktionskoefficient.

Vi vilja nu härleda ett allmänt samband mellan förlusthöjden h_f och medelhastigheten v vid en viskös vätskas stationära strömning genom ett rör med diametern D . Det totala fallet må vara I . Om vätskans specifika tyngd är γ blir den drivande kraften F för rörlängden \bar{l}

$$F = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \gamma \cdot I \cdot \bar{l} = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \gamma \cdot h_f \quad (\text{a})$$

Jämför även figur 3.45 och avdelning 362! Då inga accelerationer uppträda måste denna drivande kraft hållas i jämvikt av längs rörväggen verkande tangentiella krafter, friktionskrafter. Dessa kunna vi antaga vara proportionella mot hastighetshöjden $\frac{v^2}{2g}$ beräknad med utgångspunkt från den rådande medelhastigheten, mot vätskans specifika tyngd γ och rörväggens area. Således

$$F' = \psi \pi \cdot D \bar{l} \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (b)$$

där ψ är en dimensionslös konstant kallad motståndstalet.

Sätts ekv:na (a) och (b) lika erhålles

$$\pi \frac{D^2}{4} \cdot h_f \cdot \gamma = \psi \cdot \pi \cdot D \bar{l} \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (c)$$

$$h_f = 4 \psi \cdot \frac{\bar{l}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (d)$$

Sätta vi $4 \psi = \lambda$, så kunna vi slutligen skriva

$$\boxed{h_f = \lambda \cdot \frac{\bar{l}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}} \quad (3.66)$$

där λ benämnes rörfriktionskoefficienten. Ekvationen (3.66) benämnes i allmänhet Weisbachs eller Darcys ekvation för förlusthöjden i rör. h_f uttryckes i hastighetshöjd bl.a. därför, att användningen av Bernoullis ekvation härigenom underlättas.

I exempel 3.24 ha vi genom en dimensionsbetraktelse funnit, att om en vätska med tätheten ρ och dynamiska viskositeten μ strömmar genom ett rör, vars diameter är D , med hastigheten v , så bör tryckförlusten ha formen (ekv. 3.40)

$$p = \phi(R) \rho v^2 \frac{\bar{l}}{D} \quad (a)$$

eller

$$h_f = \frac{p}{\gamma} = \phi(R) \frac{\rho v^2}{\gamma} \frac{\bar{l}}{D} = \phi_f(R) \frac{\bar{l}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (b)$$

där

$$\phi(R) = \frac{\gamma}{2g \cdot \rho} \phi_{f_r}(R) = \text{konst} \phi_f'(R) \quad (c)$$

ty i varje valt enhetssystem måste $\frac{\gamma}{2g \rho}$ vara en dimensionslös konstant. Jämföra vi ekvation (3.66) med ekvation (b) ovan, finna vi att

$$\lambda = \phi_f'(R) \quad (d)$$

eller om index strykes

$$\boxed{\lambda = \phi(R)} \quad (3.67)$$

Vår undersökning har alltså gott oss det viktiga resultatet, att rörfriktionskoefficienten är en funktion av Reynolds tal. Till denna allmänna slutsats

måste då fogas den inskränkningen, att detta endast gäller för helt glatta rör eller rör med liten skrovlighet. Vid härledningen av ekvation (3.40) ha vi icke beaktat rørets väggbeskaffenhet och denna utövar vid större skrovlighet stort inflytande på λ .

381. Rørfriktionskoefficientens storlek vid laminär strömning.

I allmänhet kan funktionen

$$\lambda = \phi(R)$$

ej uttryckas analytiskt, utan man får nöja sig med grafisk framställning av experimentellt erhållna resultat. Härvid kan en i princip liknande anordning användas, som den på figur 3.48 återgivna. Rørets diameter uppmättes och en serie av olika genomrinningshastigheter undersökes, varvid den mot varje hastighet v svarande förlusthöjden h_f avläses på manometern. Med hjälp av dessa värden kan sedan λ beräknas ur ekvation (3.66) och R ur ekvation (3.64). Vid den laminära rörelsen är det dock möjligt att härleda ett analytiskt uttryck för λ . Vi vilja nu visa detta.

I røret A figur 3.49 antaga vi att en vätska befinner sig i laminär rörelse (rørelsen är också stationär) under inflytande av fallet I. Inuti vätskan betrakta vi en cylindriskt begränsad, centralt belägen del abcd med radien x och längden \bar{l} . Den på ytan ac verkande tryckkraften kan då tecknas

$$\pi x^2 \bar{l} \gamma \tag{a}$$

Eftersom ingen acceleration förekommer måste denna aktiva kraft hållas i jämvikt av en passiv kraft. Denna kraft är den längs cylinderytan verkande inre friktionen, som enligt ekvationen (3.32) är

$$F = \mu A \frac{dv}{dy} \tag{b}$$

I detta fall är tydligen $A = 2\pi x \cdot \bar{l}$ och $\frac{dv}{dy} = -\frac{dv}{dx}$, eftersom vi måste antaga att hastigheten avtar i riktning mot rørväggen. Således gäller att friktionskraften är

$$F = -\mu \cdot 2\pi x \cdot \bar{l} \cdot \frac{dv}{dx} \tag{c}$$

Jämviktsvillkoret blir alltså

$$\pi x^2 \bar{l} \gamma = -2\pi x \bar{l} \frac{dv}{dx} \tag{d}$$

eller

$$dv = -\frac{\gamma \bar{l} x dx}{2\mu} \tag{e}$$

Integrera!

$$v = -\frac{\gamma \bar{l}}{4\mu} x^2 + c \tag{f}$$

Vid rörets vägg är $v = 0$, varför $x = r$ ger

$$c = \frac{\gamma I}{4\mu} r^2$$

och således

$$v = \frac{\gamma I}{4\mu} (r^2 - x^2) \quad (3.68)$$

Vid laminär rörelse är hastigheten paraboliskt fördelad kring röraxeln. Om vi tänka oss vätskan uppdelad i en oändlig mängd cylindriska skal med tjockleken dx , kunna vi föreställa oss, att dessa glida förbi varandra, som när en tub med flera i varandra inskjutna rör drages ut. Gör en härledning av hastighetsfördelningen (3.68) med utgångspunkt från denna bild!

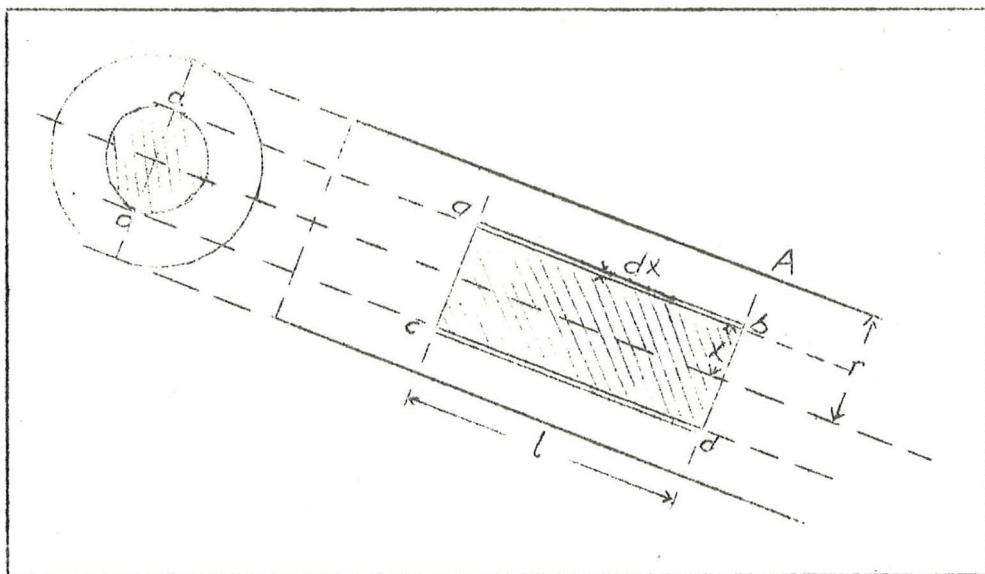


Fig. 3.49

Den framströmmande vätskemängden per tidsenhet, q , kunna vi nu lätt beräkna, då hastighetsfördelningen är given. Betrakta en ring på avståndet x från röraxeln och anta att ringens bredd är dx (se figur 3.49!). Den framströmmande vätskemängden dq_x genom ringen kunna vi då skriva

$$dq_x = 2\pi x dx \cdot v = \frac{\pi \gamma I}{2\mu} (r^2 x - x^3) dx \quad (a)$$

Integrera!

$$q_x = \frac{\pi \gamma I}{2\mu} \left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) + c \quad (b)$$

För $x = 0$ måste q_x vara $= 0$ och således $c = 0$. För $x = r$ erhålla vi då totala genomströmmande mängden q

$$q = \frac{\pi \gamma I r^4}{8\mu} \quad (3.69)$$

Uttrycket kallas Hagen-Poiseuilles ekvation. Experimentella undersökningar ha visat den teoretiskt härledda lagens giltighet. För laminär vätskerörelse

genom ett rör är alltså den per tidsenhet framströmmande vätskemängden proportionell mot fjärde potensen av rörradien, mot fallet och vätskans specifika tyngd men omvänt proportionell mot vätskans viskositet. Om endast tryckfall förekommer gäller enligt avdelning 362

$$\gamma I = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\Delta p}{l}$$

varför (3.69) även kan skrivas

$$q = \frac{\pi \Delta p r^4}{8 \mu l} \tag{3.70}$$

I avdelning 37 visade vi medelst en diskussion av experimentella resultat, att för den laminära rörelsen gäller

$$I = k \cdot v$$

Ekvationen (3.69) som erhållits på rent deduktiv väg bekräftar detta resultat. Vi finna nämligen, att om v är medelhastigheten, så gäller

$$q = \pi r^2 \cdot v = \frac{\pi \gamma I r^4}{8 \mu} \tag{a}$$

eller

$$v = \frac{\gamma I r^2}{8 \mu} \tag{b}$$

vilket är liktydigt med uttrycket

$$I = \frac{8 \mu}{\gamma r^2} \cdot v = \text{konst} \cdot v \tag{3.71}$$

som är ett för laminär strömning karakteristiskt uttryck.

Med hjälp av ekvation (3.71) ovan kunna vi nu lätt överföra (3.69) till formen

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{a}$$

Vi utföra nedanstående omskrivningar

$$I = \frac{8 \mu}{\gamma r^2} \cdot v = \frac{8 \mu v}{\gamma \cdot r^2} v = \frac{8 v}{g r^2} v = \frac{64 v}{4 r^2} \cdot \frac{v}{2g} = \frac{64}{v \cdot D} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{b}$$

$$h_f = I \cdot l = \frac{64}{R} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{c}$$

eller

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{d}$$

där λ beräknas ur uttrycket

$$\lambda = \frac{64}{R} \tag{3.72}$$

Ekvationen (3.72) är således det för laminär rörelse giltiga analytiska uttrycket på $\phi(R)$.

Hagen-Poiseuilles lag erbjuder en grundläggande möjlighet att bestämma den

dynamiska viskositeten. Om i (3.70) q , Δp , r och \bar{l} uppmätas kan μ beräknas. Den härför erforderliga experimentella utrustningen är tämligen enkel, om ej fordringarna på säkerheten i de funna värdena äro alltför stora.

Förståelsen av Hagen-Poiseuilles lag är av speciell betydelse för diskussionen av "det fria vattnets" rörelse i marken. I detta kompendiums andra del komma vi att anknyta till vad som här sagts om denna lag.

Ex. 3.41. Huru stor vattenmängd (20°) kan per timma passera genom ett 2 m långt glasrör, som har inre diametern 1 mm, utan att rörelsen blir turbulent, och huru stort är då tryckfallet?

Lösning: Vi beräkna kritiska hastigheten och sätta $R_{\text{krit}} = 2000$. Då gäller

$$2000 = \frac{v_{\text{krit}} \cdot 0.1}{0.0101}$$

$$v_{\text{krit}} = 202 \text{ cm/s} = 2.02 \text{ m/s}$$

Vattenmängden under en timma blir

$$Q = \pi \cdot 0.05^2 \cdot 202 \cdot 3600 = 25\pi \cdot 72.72 = 5712$$

$$Q = 5.71 \text{ l/tim.}$$

Tryckfallet beräknas ur ekvationen

$$h_f = \frac{64}{R} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{2000} \cdot \frac{2}{0.001} \cdot \frac{2.02^2}{2 \cdot 9.81} = 64 \cdot 4.08 \cdot 0.051 = 13.3$$

$$h_f = 13.3 \text{ m. v.p. (= meter vattenpelare).}$$

Ex. 3.42. Om vattenhastigheten i ett 0.01 mm glasrör är 0.1 cm/tim, huru stort är då tryckfallet pr längdenhet (d.v.s. fallet)? Temp. = 20°C .

Lösning: Vi beräkna Reynolds tal

$$R = \frac{0.001 \cdot 0.1}{0.0101 \cdot 3600} \approx \frac{10^{-4}}{36} = 2.8 \cdot 10^{-6}$$

$$I = \frac{64}{\frac{10^{-4}}{36}} \cdot \frac{1}{0.001} \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{0.1}{3600}\right)^2 = 0.91$$

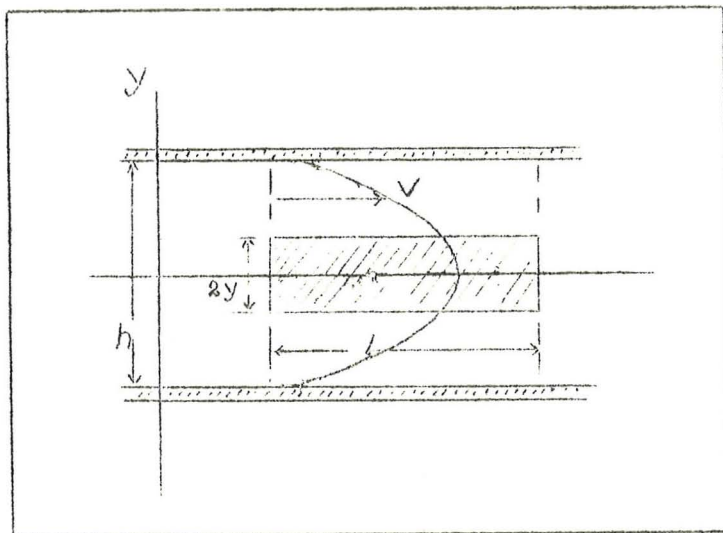
Jfr med hastigheten hos en grundvattenström vid samma tryckgradient eller fall!

Ex. 3.43. Härled ett uttryck för förlusthöjden h_f vid en vätskas laminära rörelse mellan tvenne plattor på avståndet h från varandra! h_f skall uttryckas med hjälp av medelhastigheten.

Lösning: Vi beteckna fallet med I och betrakta en centralt belägen parallelepiped med höjden $2y$, bredden = 1 och längden \bar{l} . Se för övrigt figur 3.50!

Drivande kraften F_1 blir

$$F_1 = I \gamma \bar{l} \cdot 2y \quad (a)$$



Friktionskraften F_2 blir

$$F_2 = -\mu \cdot 2 \bar{l} \cdot l \frac{dv}{dy} \quad (b)$$

Jämvikten fordrar

$$F_1 = F_2$$

eller

$$I \gamma \bar{l} 2y = -\mu \cdot 2 \cdot \bar{l} \frac{dv}{dy} \quad (c)$$

som ger

$$dv = -\frac{I \gamma}{\mu} y dy \quad (d)$$

Integrera!

$$v = -\frac{I \gamma}{2\mu} \cdot y^2 + c \quad (e)$$

Fig. 3.50

eller efter konstantbestämning

$$v = \frac{\gamma I}{2\mu} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right] \quad (f)$$

Medelhastigheten beräknas ur ekvationen

$$h \cdot v_m = \frac{I \gamma}{2\mu} \cdot 2 \int_0^{h/2} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right] dy = \frac{I \gamma}{\mu} \int_0^{h/2} \left[\frac{h^2 y}{4} - \frac{y^3}{3} \right] dy = \frac{I \gamma h^3}{12\mu}$$

som ger

$$v_m = \frac{I \gamma h^2}{12\mu} \quad (g)$$

eller

$$I = \frac{12\mu}{\gamma \cdot h^2} \cdot v_m \quad (h)$$

På sträckan \bar{l} svarar detta mot

$$h_f = \frac{12\mu \bar{l} \cdot v_m}{\gamma h^2} \quad (3.73)$$

Obs! Denna ekvation borde kunna användas för approximativa beräkningar av vattenrörelsen i t.ex. fina lersprickor. Se vidare i hydrologien.

382. Rörfriktionskoefficienten vid turbulent strömning.

Studiet av den laminära rörelsen är tämligen enkel jämförd med studiet av den turbulenta rörelsen. Vid den laminära rörelsen ha vi funnit, att vätskepartiklarna röra sig rätlinigt och att inga mot röraxeln vinkelräta hastigheter

uppträda. Med kännedom härom och med utgångspunkt från definitionen på viskositet kunde vi lätt erhålla ett uttryck på hastighetsfördelningen. När hastighetsfördelningen härletts kunde rörfriktionskoefficienten lätt deduceras. Vid den turbulenta strömningen kunna vi icke så lätt finna ett uttryck på hastighetsfördelningen, enär vi icke kunna ange något uttryck på skjuvspänningarnas variation. Som tidigare angetts måste därför rörfriktionskoefficienten vid turbulent strömning bestämmas experimentellt. Innan vi närmare ange några uttryck för λ vid turbulent strömning, skola vi dock något närmare diskutera hastighetsfördelningen vid densamma.

3821. Hastighetsfördelningen vid turbulent strömning. Vid den turbulenta strömningen är hastigheten i varje punkt konstant endast såsom medelvärde betraktad. I motsats till den laminära strömningen där hastigheten är konstant i varje punkt uppträda vid turbulensen fluktuationer i varje punkt med växlande hastighetsgradienter både i longitudinell och radiell riktning. Dessa fluktuationers medelvärde är dock = 0. Trots detta förorsaka dessa lokala hastighetsväxlingar en betydande ökning av skjuvspänningarna i vätskan och därmed av energiförlusten vid strömningen. Medan i den laminära rörelsen vätskoskikten liksom glida förbi varandra, förorsaka de vid turbulensen uppträdande radiella hastighetsvariationerna ett ständigt massutbyte mellan olika delar av den strömmande vätskan. Detta innebär då också en ständig impulstransport med åtföljande utjämning av hastigheten över rörtvärsnittet. Medan för den fullt utbildade laminära rörelsen kvoten $\frac{v_m}{v_{max}} = 0.5$, så ligger vid fullt utbildad turbulens denna kvot mellan $\frac{v_m}{v_{max}} = 0.80-0.85$. Dessa förhållanden belysas även av figur 3.51. Emedan Reynolds tal utgör ett mått på turbulensen, visar det sig också,

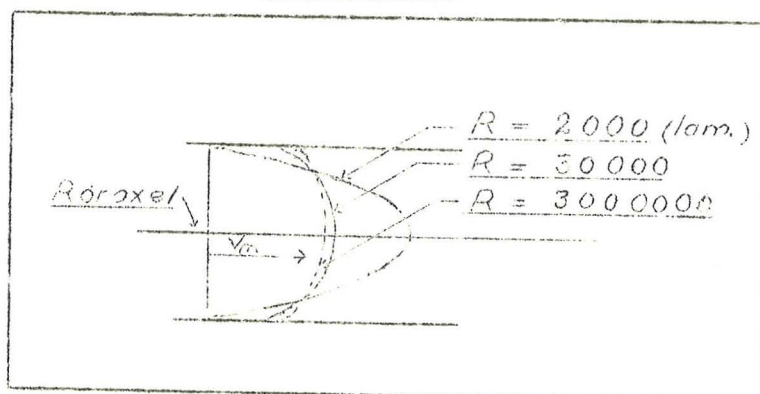


Fig. 3.51

att ovan angivna kvot $\frac{v_m}{v_{max}}$ växer med R . Figuren $\frac{v_m}{v_{max}}$ hänförs till förhållandena vid glatta rör, men förhållandena äro principiellt analoge vid skrovliga rör.

Emedan radiella fluktuationer äro nödvändiga för utbildandet av turbulensen och

sådana icke kunna förekomma intill själva rörväggen, räknar man även vid mycket kraftigt utbildad turbulens med ett laminärt skikt (laminar sublayer) omedelbart invid väggen. Vid rörväggen är hastigheten 0. Detta laminära skikt kan naturligtvis växa, när turbulensen avtar, för att vid laminär rörelse sträcka sig över

hela rörsektionen. Av figur 3.51 framgår att för $R = 3000000$ hastigheten är tämligen konstant genom hela rörsektionen och det laminära skiktet mycket tunt.

Prandtl och v. Kármán ha uppställt den s.k. $\frac{1}{7}$ -lagen för hastighetsfördelningen vid turbulent strömning i glatta rör

$$v = v_{\max} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{7}} \quad R < 10^5$$

där x betecknar avståndet från rörväggen och r rörradien. Generellt gäller

$$v = v_{\max} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{n}}$$

där n bl.a. är beroende av rörets skrovlighet.

3822. Formler för rörfriktionskoefficientens storlek vid turbulent strömning.

2. Glatta rör. I rör med möjligast jämnslipade väggbeskaffenhet t.ex. glaströr ha teoretiska och experimentella studier av bland andra Blasius, Prandtl, Nikuradse och von Kármán lett till uppställandet av analytiska uttryck för λ .

Blasius (1913) anger

$$\lambda = \frac{0,316}{4 \sqrt{R}} \quad (3.74)$$

vilket ger

$$h_f = \frac{0,316}{4 \sqrt{R}} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Prandtl har på teoretisk väg erhållit sambandet

$$\lambda = \frac{1}{[2 \log(R \sqrt{\lambda}) - 0,8]^2} \quad (3.75)$$

som är giltigt för $R < 3,4 \cdot 10^6$.

Vid den praktiska användningen av dessa formler beräknas först R , om v och D äro givna eller i övrigt lätt kunna erhållas, varefter λ beräknas. Med hjälp av λ kan sedan h_f beräknas. Om v icke är givet eller lätt kan bestämmas, skattas λ , varefter v beräknas och det funna värdet användes för beräkning av R och så ett nytt λ , tills önskad noggrannhet uppnåtts.

b. Skrovliga rör. I rör använda för praktiskt bruk kommer λ att variera både med R och med väggbeskaffenheten, som tidigare påpekats. Modelst införandet av begreppet relativ skrovlighet definierad som kvoten mellan upphöjningarnas medeldiameter e (= absoluta skrovligheten) och rörets diameter D eller $\frac{e}{D}$ har Nikuradse genom intressanta experiment visat, att λ har samma värde för

strömningar i rör med överensstämmande relativ skrovlighet, om R är lika. Vi kunna här ej närmare ingå på dessa undersökningar utan hänvisa till i slutet av kompendiet angiven litteratur. Från dessa undersökningar vilja vi dock ytterligare anföra, att vid Reynoldska tal över 10000 λ blir i det närmaste oberoende av R och således en funktion enbart av $\frac{e}{D}$. Nikuradse anger härför uttrycket

$$\lambda = \frac{1}{(2 \log \frac{D}{e} + 1.138)^2} \quad (3.76)$$

där e för några olika material har värden, som framgå av tabell 3.

Tabell 3. Några olika materials absoluta skrovlighet.

<u>Material</u>	<u>Absolut skrovlighet</u>
Gjutjärn, nytt	0.5-1 mm
" , anrostat	1 -1.5 "
" , förrostat	1.5-3.0 "
Cement, putsad	0.3-0.8 "
" , obearbetad	1 -2 "
Bräder, ohyvlade	1 -2.5 "
Sten, obearbetad (sprängsten)	8 -15 "

Ett ofta använt uttryck vid beräkningar av tryckförluster i järnrörsledningar är Langs formel

$$\lambda = 0.020 + \frac{0.0018}{\sqrt{v \cdot d}} \quad (3.77)$$

där v anges i m/s och D i m. I tabell I slutet av kompendiet finnes detta uttryck tabellerat angivande h_f per 100 m ledning. Som synes ingår i detta uttryck ej Reynolds tal, varför uttrycket ej är generellt användbart för olika vätskor. Uttrycket är giltigt för vatten av normaltemperatur. Vid överslagsberäkningar för ledningar med ej alltför stor skrovlighet kan ofta Dupuits värde $\lambda = 0.03$ användas.

De formler, som nu givits för beräkning av λ vid glatta och skrovliga rör, tillåta oss att lösa en mängd praktiska problem och spänna i stort sett över alla viktigare fall. Vi belysa formlernas användning genom att räkna igenom några problem.

Ex. 3.44. Beräkna enligt formlerna (3.74) och (3.75) λ för ett tekniskt glatt rör, om D = 10 cm och vätskan utgöres av vatten, vars temperatur är 20°C. Hastigheten är 2 m/s.

Lösning: Vi beräkna Reynolds tal

$$R = \frac{10 \cdot 200}{0.010} = 2 \cdot 10^5$$

Enligt Blasius blir då

$$\lambda = \frac{0.316}{4\sqrt{2 \cdot 10^5}} = \frac{0.316}{10^4 \sqrt{20}} = \frac{0.0316}{2.114} = 0.0149$$

och enligt Prandtl

$$\lambda = \frac{1}{[2 \log(R\sqrt{\lambda}) - 0.8]^2}$$

Vi skatta λ till 0.015 och pröva

$$\lambda = \frac{1}{[2 \log(2 \cdot 10^5 \sqrt{0.015}) - 0.8]^2} = 0.0158$$

Således för stort. Nästa värde väljes som medelvärde av 0.0149 och 0.0158, d.v.s. 0.0154.

Således

$$\lambda = \frac{1}{[2 \log(2 \cdot 10^5 \sqrt{0.0154}) - 0.8]^2} = 0.0156$$

och vi sätta $\lambda = \frac{0.0154 + 0.0156}{2} = 0.0155$. Pröva!

Ex. 3.45. Om i ex. 3.44 röret i stället för att betraktas som tekniskt glatt, antas vara av slät slipad betong med absoluta skrovligheten 0.5 mm, huru stort blir då λ och vad blir tryckförlusten pr 100 m ledning?

Lösning: Eftersom $R > 10^5$ tillämpa vi formel (3.76). Således

$$\lambda = \frac{1}{(2 \log \frac{100}{0.5} + 1.138)^2} = 0.0304$$

$$h_f = 0.0304 \cdot \frac{100}{0.1} \cdot \frac{4}{2g} = 30.4 \cdot 4 \cdot 0.051 = 6.20 \text{ m.v.p.}$$

Ex. 3.46. Beräkna med hjälp av Langs formel tryckförlusten i en 500 m lång 2" järnrörsledning, som skall föra 100 l vatten per minut!

Lösning: $Q = A \cdot v = \pi \frac{D^2}{4} \cdot v$; $v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0.100}{\pi \cdot 0.05^2 \cdot 60} = 0.85 \text{ m/s}$

$$\lambda = 0.020 + \frac{0.0018}{\sqrt{0.85 \cdot 0.05}} = 0.02885$$

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0.02885 \cdot \frac{500}{0.05} \cdot \frac{0.85^2}{2g} = 10.6 \text{ m.v.p.}$$

Svar: Tryckförlusten är 10.6 m.v.p.

Ex. 3.47. Lös föregående uppgift med hjälp av Blasius formel för λ :

Lösning: Blasius formel lyder $\lambda = \frac{0.316}{4\sqrt{R}}$

Vi beräkna R.

$$R = \frac{85 \cdot 5}{0.010} = 42500$$

vilket ger

$$\lambda = \frac{0.316}{4\sqrt{42500}} = \frac{0.316}{14.34} = 0.0220$$

$$h_f = 0.0220 \cdot \frac{500}{0.05} \cdot \frac{0.85^2}{2g} = 8.10 \text{ m.v.p.}$$

Ex. 3.48. Huru stor diameter skall en tubledning till en vattenkraftstation ha, om tryckförlusten på grund av rörfriktionen ej får uppgå till mer än 5.5 m.v.p. Tubens längd är 1100 m och vattenmängden 1.2 m³/s. $\lambda = 0.03$.

Lösning:

$$\begin{cases} h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} & \text{(a)} \\ q = \pi \frac{D^2}{4} \cdot v & \text{(b)} \end{cases}$$

Ekvation (b) ger

$$v = \frac{4q}{\pi D^2}$$

som insatt i ekv. (a) ger

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{16q^2}{2g \cdot \pi^2 D^4}$$

eller

$$D = \sqrt[5]{\frac{\lambda}{h_f} \cdot \frac{l}{2g} \cdot \frac{16q^2}{\pi^2}} = \sqrt[5]{\frac{0.03 \cdot 1100 \cdot 16 \cdot 1.2^2}{5.5 \cdot 19.62 \cdot \pi^2}}$$

$$D = 0.935$$

Svar: Den erforderliga tubdiametern är 0.935 m.

Ex. 3.49. Huru stor är tryckskillnaden mellan två punkter i en rörledning med 250 mm diameter och en lutning av 1:20 a) då vattnet strömmar med lutningen b) då vattnet strömmar mot lutningen? Vattenhastigheten antages vara 2 m/s och $\lambda = 0.025$.

Lösning: Bernoullis ekv. med förlustterm tillämpas. Avståndet mellan de båda punkterna betecknas med \bar{l} och punkterna indiceras med 1 och 2 (punkt 1 ligger geom. högre).

$$\left\{ \begin{array}{l} h_f = \lambda \cdot \frac{\bar{l}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \\ \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array}$$

a) Strömning med lutningen $v_1 = v_2 = 2$

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f$$

eller

$$p_1 - p_2 = (z_2 - z_1)\gamma + \gamma h_f = -\frac{\bar{l}}{20} \cdot 1000 + 0.025 \frac{\bar{l}}{0.25} \cdot \frac{4}{2g} \cdot 1000$$

$$p_1 - p_2 = -50 \bar{l} + 20.4 \bar{l} = -29.6 \bar{l} \text{ kp/m}^2$$

b) Strömning mot lutningen

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_f = \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

$$p_1 - p_2 = (z_2 - z_1)\gamma - \gamma h_f = -50 \bar{l} - 20.4 \bar{l} = -70.4 \bar{l} \text{ kp/m}^2$$

Svar: I bägge fallen är trycket störst i den nedre punkten. Differensen utgör i a) 0.00296 kp/cm^2 och i b) 0.00704 kp/cm^2 räknat per sträckmeter av ledningen.

Ex. 3.50. För att experimentellt bestämma rörfriktionskoefficienten uppmättes den genom en 200 m lång rörledning framströmmande vattenmängden. Denna befanns vara 5000 \bar{l} på 10 minuter. Rörledningen var inkopplad mellan tvenne cisterner, i vilka vattenytorna kunde hållas på konstant nivå. Vid försöket var nivå-differensen 3 m. Beräkna λ , då rörledningens invändiga diameter var 100 mm!

Lösning: Av texten framgår att h_f var = 3 m.v.p.

Detta ger

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 = \lambda \cdot \frac{200}{0.1} \cdot \frac{v^2}{2g} \\ 5 = \pi \cdot \frac{0.1^2}{4} \cdot v \cdot 10 \cdot 60 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Darcys-Weisbachs ekv.)} \\ \text{(Kontinuitetsekv.)} \end{array}$$

Den andra ekv. ger

$$v = \frac{10}{3\pi}$$

som insatt i den första ekv. ger

$$\lambda = \frac{3 \cdot 0.1 \cdot 2g \cdot 9\pi^2}{200 \cdot 100} = 0.0262$$

Svar: $\lambda = 0.0262$.

3823. Tegel- och betongrörsledningar. Dessa rör användas huvudsakligen för dränerings- och avloppsledningar. I sådana ledningar råder intet eller endast obetydligt övertryck, d.v.s. tryck högre än atmosfärtrycket. Vid beräkningar rörande sådana ledningar uppställs (3.66) ofta under formen

$$v = C \sqrt{R_h \cdot I} \quad (3.78)$$

Uttrycket uppställdes redan år 1775 av fransmannen de Chezys och benämnes efter honom de Chezys formel.

I formeln betyder v den rådande medelhastigheten, C en av framför allt ledningens skrovlighet beroende konstant, R_h hydrauliska radien eller våta arean A dividerad med våtta omkretsen ($=p$ = våta perimetern) samt I = fallet.

Uttrycket erhålles genom en med deduktionen av formeln (3.66) analog härledning. I ekvationen ζ avdelning 38

$$\pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot h_f \cdot \gamma = \psi \cdot D \cdot \bar{l} \cdot \gamma \frac{v^2}{2g} \quad (a)$$

kunna vi generellt ersätta $\pi \frac{D^2}{4}$ med A och πD med p , vilket ger oss

$$h_f = \psi \cdot \frac{p}{A} \cdot \bar{l} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (b)$$

eller, enär enligt definitionen (se också figur 3.52!)

$$\frac{1}{R_h} = \frac{p}{A} \quad (c)$$

och

$$I = \frac{h_f}{\bar{l}} \quad (d)$$

$$I = \psi \cdot \frac{1}{R_h} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (e)$$

och således, om $C = \sqrt{\frac{2g}{\psi}}$

$$v = C \sqrt{R_h \cdot I}$$

Alltsedan denna formel uppställdes ha ett stort antal forskare sysslat

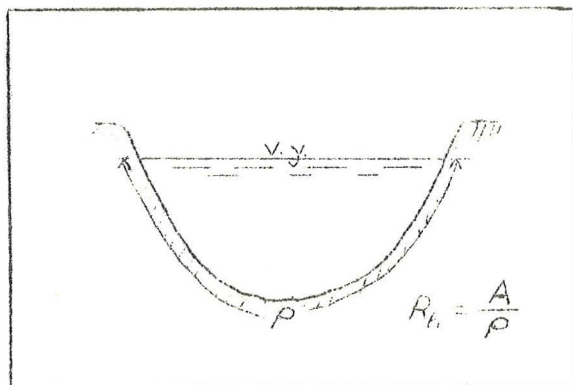


Fig. 3.52

med experimentella bestämningar av C och många olika uttryck finnas, varur C kan beräknas. Det finns ingen anledning att här återge alltför många av dessa olika uttryck, utan vi beröra endast de ur vår synpunkt vanligaste och mest användbara.

Amerikanerna Yarnell och Woodward ha gjort omfattande undersökningar med vattenförande betongledningar och upp-

ställt uttrycket

$$C = 93 \cdot R_h^{\frac{1}{6}} \quad (3.79)$$

varav

$$v = C \sqrt{R_h I} = 93 \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad (3.79^1)$$

Detta uttryck finnes tabellerat i slutet av kompendiet, tabell II. Uttrycket är som synes relativt enkelt uppbyggt. Andra s.k. potensformler ha uppställts av Manning, Forchheimer, Gauckler m.fl. Helt allmänt kan man ange

$$v = C R_h^n I^m$$

där C uttrycker ifrågavarande lednings skrovlighet samt m och n ha olika talvärden: $n = \frac{2}{3}$ till $\frac{7}{10}$ och $m = \frac{1}{2}$.

Ett annat uttryck på C är det av Ganguillet-Kutter uppställda

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{I}}{1 + (23 + \frac{0.00155}{I}) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (3.80)$$

där n är en skrovlighetsfaktor, som har följande värden (tabell 4).

Tabell 4. Några värden på skrovlighetsfaktorn n i Ganguillet-Kutters formel.

<u>Material</u>	<u>n</u>	<u>m</u>
Slätslipad betong, hyvlat trä	0.010	0.15
Svetsade järnrör, järnbetongrör	0.012	0.25
Vanliga betongrör, tegelrör	0.013	0.30

Uttrycket (3.80) är tämligen invecklat uppbyggt och lämpar sig föga för direkta beräkningar. Det användes dock fortfarande mycket, då det bl.a. ligger till grund för Schewiors stora tabellverk. Vid övningarna användes ett utdrag av detta tabellverk. Vid direkta numeriska beräkningar användes lämpligen Kutters förenklade formel.

$$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}} \quad (3.81)$$

där värdet på m finnes angivet för några material i tabell 4.

Vid överslagsberäkningar kan lämpligen enligt Eytelwein och Dupuit C sättas = 41. Således

$$v = 51 \sqrt{R_h \cdot I} \quad (3.82)$$

Ex. 3.51. Beräkna med hjälp av de i avdelning 3823 givna formlerna, huru stor vattenmängd per sekund, som framrinner i en 60 cm betongledning vid fullgång, om $I = 0.4:1000$.

Lösning:

$$A = \pi \frac{D^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.6^2}{4} = 0.283 \text{ m}^2$$

$$p = \pi D = 0.6 \pi \text{ m} = 1.884 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{\pi \cdot 0.6^2}{4 \cdot 0.6 \pi} = \frac{0.6}{4} = 0.150 \text{ m}$$

Formel (3.79) ger

$$v = 93 \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

och således

$$q = 0.283 \cdot 93 \sqrt[3]{0.150^2} \cdot \sqrt{0.0004}$$

$$q = 0.283 \cdot 93 \cdot 0.284 \cdot 0.02 = 0.150 \text{ m}^3/\text{s}$$

Formel (3.80) ger (värdet på n se tabell 4!)

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} = \frac{23 + \frac{1}{0.013} + \frac{0.00155}{0.0004}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{0.0004}\right) \frac{0.013}{\sqrt{0.15}}} = 54.6$$

och således

$$q = 0.283 \cdot 54.6 \sqrt{0.15 \cdot 0.0004} = 0.119 \text{ m}^3/\text{s}$$

Formel (3.81) ger

$$C = \frac{100 \sqrt{0.15}}{0.30 + \sqrt{0.15}} = 56.4$$

varav

$$q = 0.283 \cdot 56.4 \sqrt{0.15 \cdot 0.0004} = 0.123 \text{ m}^3/\text{s}$$

Anmärkning. Av det ovan genomräknade exemplet framgår, att Yarnell och Woodwards formel ger betydligt högre vattenmängd än de två andra formlerna. Detta sammanhänger med den höga numeriska faktorn 93, som i sin tur ger relativt höga C -värden i de Chezys formel.

Ex. 3.52. Lös föregående exempel med hjälp av de i avdelning 3822 givna formlerna!

Lösning: Vi skatta Reynolds tal. q sättes enligt det föregående till $0.130 \text{ m}^3/\text{s}$. Detta ger

$$v = \frac{0.130}{0.283} = 0.46 \text{ m/s}$$

och således

$$R = \frac{46 \cdot 60}{0.01} = 276000 = 2.8 \cdot 10^5$$

Strömningen är sålunda i hög grad turbulent. Vi väljer därför formel (3.76)

$$\lambda = \frac{1}{(2 \log \frac{D}{e} + 1.138)^4} = \frac{1}{(2 \cdot \log \frac{600}{1} + 1.138)^2} = 0.0224$$

Darcys-Weisbachs ekvation ger tillämpad på 1 m av ledningen

$$0.0004 = 0.0224 \cdot \frac{1}{0.6} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$v = 0.46 \text{ och } q = 0.130$$

Jfr med förut erhållna värden! Som synes ge de olika formlerna rätt olika värden. Man får därför alltid räkna med att rätt stora fel vidlåda hydrauliska beräkningar, såvida icke speciella experiment gett upplysning om rörfriktionskoefficientens storlek.

Ex. 3.53. I vilket fall måste en 4" betongledning läggas för att den skall kunna avleda 10 l vatten per sekund.

Lösning: Vi använda Yarnell och Woodwards formel

$$v = 93 \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

$$q = A \cdot v = A \cdot 93 \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

Givna data insätts i denna formel

$$0.010 = \pi \cdot \frac{0.1^2}{4} \cdot 93 \cdot \left(\frac{0.1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

$$I = 0.0257 \text{ eller } I = 26:1000$$

39. Särskilda motstånd i slutna ledningar.

Den hittills givna behandlingen av strömning i slutna ledningar har ägnats åt de friktionsförluster, som uppkomma vid likformig strömning å längre sträckor i raka rör. De förluster, som orsakas av rörkrökar, tvärsnittsförändringar, kranar, ventiler och dylikt, ha icke närmare berörts. I sådana element uppkommer i allmänhet en olikformig strömning och de förluster som uppträda äro i högre grad beroende av tröghetskrafter än av inre friktion. En enkel dimen-

sionsanalys visar att under sådana förhållanden vårt allmänna uttryck (3.40)

$$p = \phi(R) \rho v^2 \frac{l}{D}$$

reduceras till formen

$$p = \text{konst} \left(\frac{\rho v^2}{D} \right)$$

eller för en given vätska och ett visst rör

$$h_f = k \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (3.83)$$

där k är en dimensionslös faktor benämnd motståndskoefficient och v medelshastigheten bortom ifrågakvarande rörelement. Denna motståndskoefficient måste bestämmas experimentellt för olika förekommande konstruktioner. En viss teoretisk och systematisk behandling av dessa motstånd är dock möjlig. Då de egentligen icke innebära något principiellt nytt och behandlingen av dem här skulle kräva för stort utrymme, hänvisas den intresserade till litteraturen. Figur 3.53 återger några vanliga fall med på figuren angivna medelvärden för k . Den i rörkrökar, ventiler etc. uppkommande tryckförlusten uttryckes ofta i ekvivalenta rörlängder. I tabell I återfinnes några sådana värden.

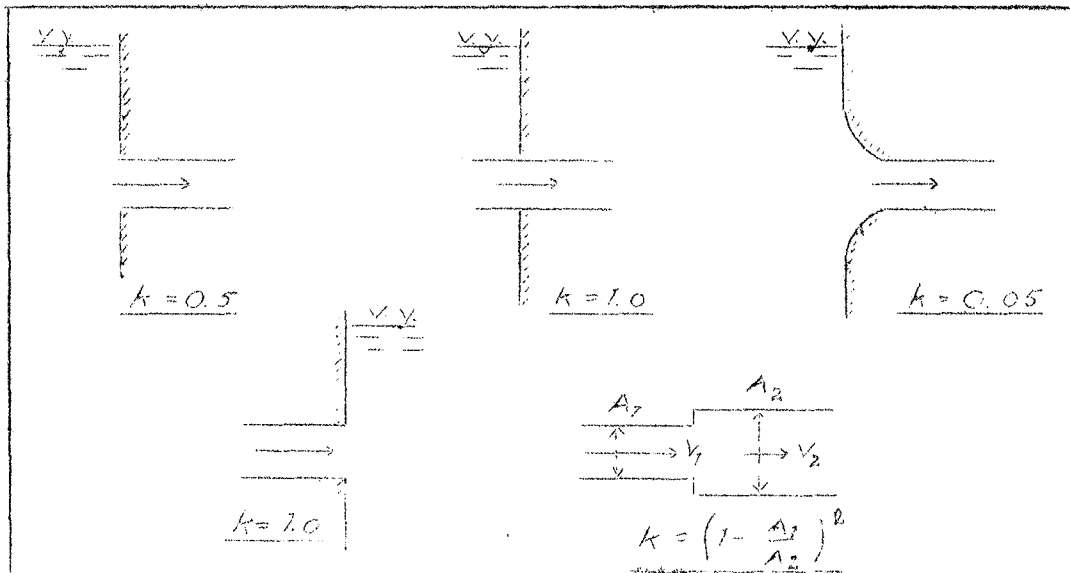


Fig. 3.53

Innan vi med dessa korta anmärkningar lämna problemet om särskilda motstånd i slutna ledningar, skola vi dock ge Bernoullis ekvation en form, som är mycket användbar vid beräkningar av totala tryckhöjden H , när olika förlusttermer uppträda i ledningen. Vi ha tidigare skrivit Bernoullis ekvation med förlustterm under formen

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f \quad (a)$$

eller

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \quad (b)$$

$z_1 - z_2$ anger den geometriska höjdskillnaden mellan punkterna 1 och 2 och $p_1 - p_2$ anger skillnaden i tryckhöjd. Vi sätta summan av dessa differenser = H och erhålla

$$H = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_f \quad (c)$$

som för $v_2 = v_1$ ger (se för övrigt formel /3.61/!)

$$H = h_f \quad (d)$$

Om såsom ofta är fallet $v_1 = 0$ och $v_2 = v$ gäller

$$H = \frac{v^2}{2g} + h_f \quad (e)$$

där h_f då enligt föregående utredningar bör kunna skrivas

$$h_f = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{v^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{v^2}{2g} + \dots + k_1 \frac{v^2}{2g} + k_2 \frac{v^2}{2g} + \dots \quad (f)$$

Härvid gäller, att de första termerna ange förlusthöjden i raka ledningssträckor och de senare termerna, förluster som förorsakas av speciella motstånd. Skrivna vi nu även de första termerna under formen

$$\lambda_i \frac{l_i}{D_i} \frac{v^2}{2g} = k_i \frac{v^2}{2g} \quad (g)$$

erhålla vi slutligen

$$H = \frac{v^2}{2g} (1 + \sum k_i) \quad (3.84)$$

Ex. 3.54. Huru många hk erfordras för att med en tryckpump, vars verkningsgrad är 90 %, genom en ledning av 490 m längd och 150 mm diameter uppföra vatten till 46 m höjd, då hastigheten i ledningen är 1.2 m/s, ledningen har två krökar med $k = 0.2$, motståndskoefficienten vid inloppet är 0.5 och $\lambda = 0.03$?

Lösning: Vi beräkna totala tryckhöjden

$$H = \frac{1.2^2}{2g} (1 + 0.03 \frac{490}{0.15} + 2 \cdot 0.2 + 0.5) + 46$$

$$H = 99.9 \cdot \frac{1.44}{2g} + 46 = 53.34 \text{ m}$$

Den erforderliga effekten x i hk blir

$$x = 53.34 \cdot 1.2 \pi \cdot 0.075^2 \cdot \frac{1000}{75} \cdot 0.90 = 16.7 \text{ hk}$$

Svar: Den erforderliga effekten är 16.7 hk.

391. Inlopps-förluster vid brotrummar.

I allmänhet äro de av särskilda rörelement förorsakade förlusterna små i förhållande till de förluster, som förorsakas av rörfriktionen, om ledningen har någorlunda längd. Annorlunda ställer sig förhållandet, om ledningen är kort, vilket t.ex. är fallet vid brotrummar. Här blir framför allt inströmningsförlusterna relativt stora. Om vi antaga, att vid inströmning i en brotrumma $k = e$ och om dessutom förlusterna vid strömningen genom själva brotrumman tecknas $\lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$, där l är trummans längd och D dess diameter samt λ en rörfriktionskoefficient, så gäller för förlusthöjden h_f , om tillströmningshastigheten v_0 försummas

$$h_f = \frac{v^2}{2g} (1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{D}) \quad (a)$$

Jämför ekvation (3.84)! Löses v ur ekvation (a) erhålles

$$v = \sqrt{\frac{2g h_f}{1 + e + \lambda \cdot \frac{l}{D}}} \quad (3.85)$$

Detta är Weisbachs formel för sambandet mellan förlusthöjd och hastighet vid strömning genom en trumma. Enligt Weisbach kan e sättas = 0.505. Jämför figur 3.53, där $k = 0.5$ för skarpkantad inströmning.

Enligt Darcy är

$$\lambda = 0.02 + \frac{0.0005}{D} \quad (3.86)$$

Formel (3.85) finnes tabellerad i våra för dimensionering använda tabeller.

Ex. 3.55. Ett avloppsdike skall föras genom en 10 m lång brotrumma. Vat-
tenytans höjdskillnad vid in- och utlopp går vid högvatten upp till 0.5 m, då
 q är $0.440 \text{ m}^3/\text{s}$. Beräkna erforderlig rördiameter, och huru stor blir vatten-
hastigheten?

Lösning: Lösningen utföres genom successiva passningar. Om rörfriktionen
såsom en första approximation försummas, erhålles

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.81 \cdot 0.5}{1 + 0.505}} = 2.5; \quad q = \pi \frac{D^2}{4} v \quad \text{ger} \quad D = \sqrt{\frac{4q}{\pi v}} = \sqrt{\frac{1.760}{\pi \cdot 2.5}} = 0.48$$

Med hjälp av dessa värden beräknas λ och rörfriktionen

$$\lambda = 0.020 + \frac{0.0005}{0.48} = 0.021$$

$$\lambda \cdot \frac{1}{D} = 0.021 \cdot \frac{10}{0.48} = 0.437$$

Vi beräkna nya v - och D -värden

$$v = \sqrt{\frac{9.81}{1.942}} = 2.24 \text{ m/s} \quad \text{och} \quad D = \sqrt{\frac{1.760}{\pi^2 \cdot 2.24}} = 0.500 \text{ m.}$$

Synbarligen är ytterligare passning ej nödvändig och således $D = 0.500 \text{ m.}$ och $v = 2.24 \text{ m/s.}$

Ex. 3.56. En brotrumma består av 15" betongrör och dess längd är 20 m. Huru stor är dess avbördningsförmåga vid fullgång, om den ligger i fallet 15:1000?

Lösning: Vi beräkna h_f och λ

$$h_f = \frac{20 \cdot 15}{1000} = 0.3 \text{ m.} \quad \text{och} \quad \lambda = 0.020 + \frac{0.0005}{0.375} = 0.021$$

Genom insättning i formel (3.85) erhålles hastigheten

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot 0.3}{1.505 + 0.021 \cdot \frac{20}{0.375}}} = 1.50 \text{ m/s}$$

varav

$$q = A \cdot v = \pi r^2 \cdot \frac{0.375^2}{4} \cdot 1.50 = 0.166 \text{ m}^3/\text{s}$$

40. Strömning i öppna ledningar.

Vi ha redan i avdelning 361 definierat en öppen ledning och angett, att den framför allt karakteriseras av att den har en fri yta, som endast är utsatt för atmosfärens tryck. Naturliga vattendrag, rännor, diken, kanaler etc. äro exempel på öppna ledningar. Existensen av en fri yta förorsakar, att behandlingen av strömning i öppna ledningar utgör ett betydligt svårare problem än behandlingen av täckta ledningar. Det är svårt att erhålla mera generellt giltiga experimentella data, på grund av de ytterst varierande sektionsformer-
na och skrovlighetstalen. Formen varierar från det regelbundna cirkelsegmentet i en delvis fylld rörledning till den oregelbundna formen hos en flodbädd. Motsvarande variationsområde gäller för skrovligheten.

Behandlingen av strömning i öppna ledningar är därför i ännu högre grad än behandlingen av strömning i rör empirisk. Vid de experimentella undersökningarna har man nästan uteslutande arbetat med vatten och de i ekvationerna

ingående koefficienterna gälla denna vätska. De i det föregående givna allmänna relationerna mellan Reynoldska tal och friktionskoefficienten spela vid studiet av strömning i öppna ledningar en relativt liten roll. I dessa sammanhang ha däremot modellstudier kommit till stor användning särskilt vid större projekterade anläggningar.

401. Likformig och olikformig strömning i öppna ledningar.

På grund av existensen av en fri vattenyta kommer som tidigare påpekats djupet i en öppen ledning att variera, även om strömningen i övrigt är stationär. Detta förorsakar uppkomsten av olikformig strömning med åtföljande acceleration och retardation. Om i en öppen ledning de vattenfyllda tvärsnitten avta i strömriktningen, säges rörelsen vara accelererad, och vattenytan säges uppvisa en sänkning. Vid motsatt förhållande, eller när de vattenfyllda tvärsnitten öka i strömriktningen, säges rörelsen vara retarderad, och vattenytan säges uppvisa en dämning eller stuvning (se fig. 3.54!).

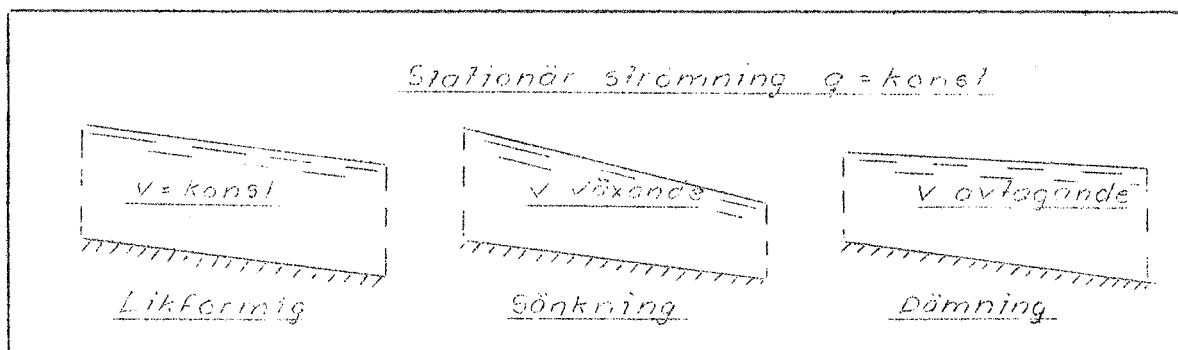


Fig. 3.54

Vid strömning i öppna ledningar spelar begreppet hydrauliska radien R_h en mycket större roll än vid strömning i täckta ledningar, varför vi påminna om den redan i avdelning 3823 införda formeln (se också figur 3.52!)

$$R_h = \frac{A}{p}$$

R_h kallas även hydrauliska medeldjupet.

Liksom i rörledningar kan naturligtvis även i öppna ledningar förekomma både laminär och turbulent strömning. Då den laminära rörelsen i öppna ledningar är relativt sällsynt och dess behandling icke skulle innebära något nytt utöver det i avdelning 381 givna, begränsa vi oss här huvudsakligen till den turbulenta strömningen.

Skriva vi Reynolds tal R för öppna ledningar under formen

$$R = \frac{R_h \cdot v}{\nu}$$

så har experimentella undersökningar givit vid handen, att R_{krit} har storleken 500-600.

Ex. 3.57. Vatten av +10°C temperatur strömmar fram över en betongbana. Vid vilken hastighet inträffar turbulens, om vattendjupet är 1 cm?

Lösning: Vi sätta $R_{krit} = 500$. Om vi dessutom antaga bredden på betongbanan vara b m, erhålles

$$R_h = \frac{100b \cdot 1}{100b + 2 \cdot 1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{50b}} \approx 1$$

Den sökta hastigheten betecknas med v_{krit}

$$\frac{v_{krit} \cdot 1}{0.0131} = 500$$

varav

$$v_{krit} = 6.6 \text{ cm/s} = 4.0 \text{ m/min.}$$

Anmärkning: Ovan gjorda beräkning av R_h visar, att om bredden b på en öppen ledning kan antagas vara stor i förhållande till djupet, så blir R_h med god approximation = vattendjupet.

Ex. 3.58. Regnvatten av +10°C temperatur strömmar utför ett plåttak. Om vattendjupet uppskattas till 5 mm, huru stor kan då hastigheten vara, utan att rörelsen blir turbulent? Huru stort blir Q pr m av takbredden under 1 minut?

Lösning: Den kritiska hastigheten erhålles lätt till $v_{krit} = 13.1 \text{ cm/s}$, varav

$$Q = 10 \cdot 0.05 \cdot 1.31 \cdot 60 = 39.3 \text{ l/min}$$

Ex. 3.59. Beräkna Reynolds tal för ett dike med släntlutningen 1:1, om vattendjupet är 30 cm, bottenbredden 40 cm och vattenhastigheten 0.5 m/s:

Lösning: Vi sätta $\nu = 0.01$ och beräkna R_h

$$R_h = \frac{30(40+30)}{40+2 \cdot 30 \sqrt{2}} = \frac{30 \cdot 70}{124.84} = 16.8 \text{ cm}$$

samt erhålla

$$R = \frac{16.8 \cdot 50}{0.01} \approx 10^5$$

Turbulensen är således kraftigt utbildad.

41. Förlusthöjden vid likformig strömning i öppna ledningar.

411. Bernoullis ekvation för stationär likformig strömning i öppna ledningar.

Betrakta den stationära likformiga strömningen i den öppna ledningen på

figur 3.55. Mellan tvenne punkter 1. och 2. tänka vi oss en 0-nivå inlagd och med utgångspunkt från denna de olika höjderna avsetta. Bernoullis ekvation kan då tänkas tillämpad på ett godtyckligt strömrör parallellt med botten och på djupet x under vattenytan. Det är nämligen tydligt, att eftersom den fria vat-

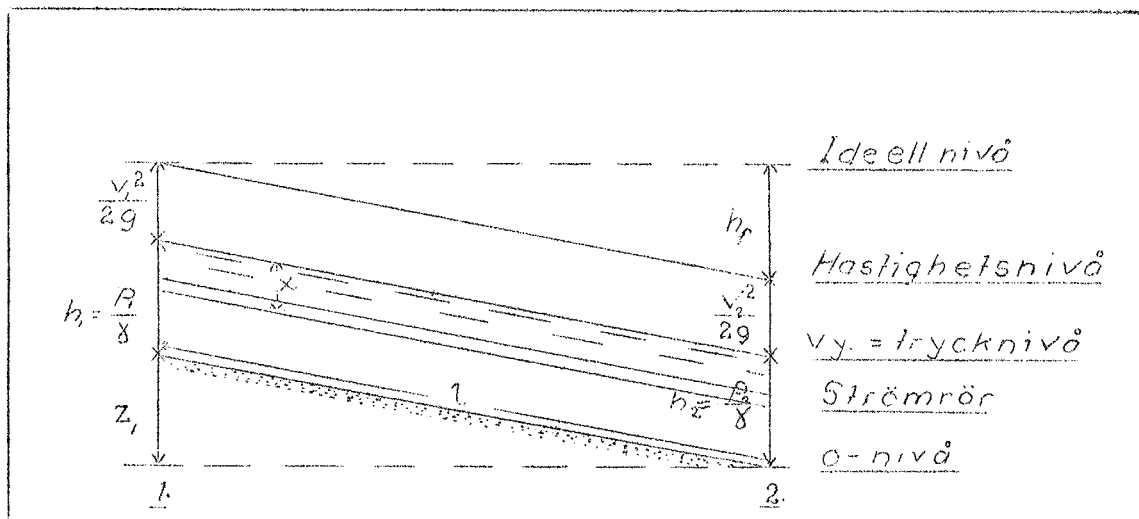


Fig. 3.55

tenytan utgör trycknivån, så gäller för ett godtyckligt strömrör (eller för hela sektionen)

$$\frac{v_1^2}{2g} + x + (z_1 + h - x) = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f$$

men eftersom strömningen är likformig, så är $v_1 = v_2$ och $p_1 = p_2$ (enär $h_1 = h_2$).

$$h_f = z_1$$

eller om vi dividera med l

$$I = \frac{h_f}{l} = \frac{z_1}{l} \quad (3.87)$$

Vid likformig strömning i en öppen ledning är fallet lika med vattenytans lutning men ävenså lika med ledningens lutning. Strömningen underhålls genom att den potentiella energien kontinuerligt och restlöst förbrukas allteftersom vätskepartiklarna röra sig utför ledningen. Ingen ökning i den kinetiska energien förekommer.

412. Formler för förlusthöjden vid likformig strömning i öppna ledningar:

a. Laminär strömning. Innan vi ingå på en närmare behandling av förlusthöjden vid turbulent strömning, kan det vara lämpligt att något ytterligare beröra den laminära rörelsen. Vi göra detta enklast och mest kortfattat genom

att formulera några problem och diskutera deras lösningar. Härigenom kunna vi erhålla några viktiga formler utan att alltför mycket öka texten i detta kompendium.

Ex. 3.60. Härled en formel för medelhastigheten vid laminär strömning över ett brett plan med lutningen I ! Beräkna även vätskeföringen, om planets bredd är b !

Lösning: Vi upprita figuren 3.56 och införa lämpliga beteckningar. AB må vara det breda planet med lutningen I . Vätskedjupet antages vara h . Vi be-

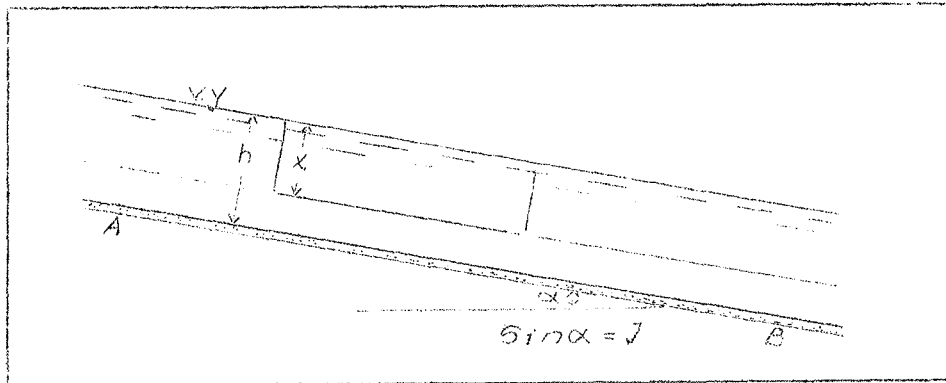


Fig. 3.56

trakta ett element begränsat av den fria vätskeytan och ett med denna parallellt plan på djupet x . Elementets längd är \bar{l} och dess bredd = planets bredd b . I övrigt framgår det betraktade elementets dimensioner och läge av figuren. På grund av planets stora bredd kunna vi försumma inverkan av kanterna och sätta $R_h = h$ (se ex. 3.57!). Vi uppställa jämviktsvillkoret för elementet $x\bar{l}$ och erhålla

$$x\bar{l} \gamma I = -\rho b \bar{l} \frac{dv}{dx} \quad (a)$$

Integrera!

$$v = -\frac{\gamma I}{2\mu} x^2 + C \quad (d)$$

Sätta vi $x = h$, blir $v = 0$, varav

$$C = \frac{\gamma I}{2\mu} h^2$$

och således

$$v = \frac{\gamma I}{2\mu} (h^2 - x^2) \quad (3.88)$$

Vi beräkna vätskeföringen. Denna blir

$$q = \int_0^h v b dx = \frac{\gamma I b}{2\mu} \int_0^h h^2 x - \frac{x^3}{3} = \frac{\gamma I b h^3}{3\mu}$$

$$q = \frac{Ibh^3}{3\mu} \quad (3.89)$$

Vi kunna nu lätt beräkna medelhastigheten v_m . Således

$$v_m \cdot b \cdot h = \frac{\gamma Ibh^3}{3\mu}$$

vilket ger

$$v_m = \frac{\gamma Ih^2}{3\mu} \quad (3.90)$$

Av denna ekvation synes, att vid laminär strömning i öppen ränna eller över ett brett plan är medelhastigheten proportionell mot fallet.

Ex. 3.61. Beräkna medelhastigheten vid vattnets laminära strömning utför ett plan, vars lutning är 1:100, om ν sättes = 0.01 poise och vattendjupet är 0.1 cm!

Lösning: Formel (3.90) ger

$$v_m = \frac{981 \cdot 0.01 \cdot 0.1^2}{3 \cdot 0.01} = 3.27 \text{ cm/s}$$

Ex. 3.61¹. Bevisa, att för vatten av +20°C med $\nu = 0.01$ poise måste nedanstående relationer vara uppfyllda, för att strömning i en bred öppen ränna skall vara laminär

$$v_m \leq \frac{5}{h} \quad (a)$$

samt

$$Ih^3 \leq 0.00015 \quad (b)$$

Lösning: Enligt det föregående gäller (sid. 155!)

$$\frac{v_{\text{krit}} \cdot h}{\nu} = 500$$

som ger

$$v_{\text{krit}} = \frac{5}{h}$$

vilket innebär, att medelhastigheten v_m måste uppfylla villkoret

$$v_m \leq \frac{5}{h} \quad (a')$$

Enligt formel (3.90) är

$$v_m = \frac{\gamma Ih^2}{3\mu}$$

som insatt i formel (a') ger

$$\frac{\gamma Ih^2}{3\mu} \leq \frac{5}{h}$$

eller

$$Ih^3 \leq \frac{0.03 \cdot 5}{981} = 0.00015$$

och således

$$Ih^3 \leq 0.00015 \quad (b')$$

Ex. 3.62. Vilken är den största lutning ett plan får ha, om en vattenströmning över planet med skiktjockleken 0.25 cm skall vara laminär?

Lösning: Formel (b') ovan ger

$$I \cdot 0.25^3 = 0.00015$$

$$I = \frac{0.15}{15.6} \approx 0.01$$

I ord uttryckt innebär detta resultat, att ett plan som lutar 1:100 icke kan föra en vattenström, som har större skiktjocklek än 2.5 mm, utan att turbulens inträffar. Medelhastigheten är då 20 cm/s.

b. Turbulent strömning. Genom en härledning analog med den i avdelning 3823 givna kan sambandet mellan fallet och hastigheten vid likformig strömning i öppna ledningar erhållas under formen

$$v = C \sqrt{R_h \cdot I} \quad (3.91)$$

som är de Chezys formel för öppna ledningar. C är en konstant, vars värde beror av ledningens skrovlighet men också av fallet. Även i detta fall förekommer en mängd olika uttryck på C. De äro dock i allmänhet av samma form som de för täckta ledningar i avdelning 3823 angivna. Givetvis måste dock beroende på ledningens väggbeskaffenhet andra siffervärden på skrovligheten införas i formlerna.

I vår allmänna potensformel $v = C \cdot R_h^n \cdot I^m$ kunna vi enligt Manning sätta $n = \frac{2}{3}$ och $m = \frac{1}{2}$. Således

$$v = C \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad (3.92)$$

Värdet på C, i denna formel har angivits i tabell 5 för några viktigare material.

Tabell 5. Värderna på C, i Mannings formel (3.92).

<u>Material</u>	<u>Värde på C</u>
Slipad betong	90-80
Ny betong (ej slipad)	60
Angripen betong	50
Grävda kanaler och diken	42-30
Naturliga vattendrag	30-24
Naturliga vattendrag med stark växtlighet	24-12

För skrovlighetstalen n och m i Ganguillets-Kutters formel (3.80) och i Kutters förenklade formel (3.81) erhålla vi följande sammanställning

Tabell 6. Värderna på n i Ganguillets-Kutters formel och på m i Kutters förenklade formel för öppna kanaler och diken.

<u>Material</u>	<u>n</u>	<u>m</u>
Jämn vägg av trä eller betong	0.011	0.20
Jämn jordvägg utan vattenväxter	0.025	1.50
Jordvägg med stenar eller halva sektionen fylld av vattenväxter	0.030	1.70
Jordvägg med hela sektionen fylld av vattenväxter eller vägg av sprängt berg	0.035	2.50

Vid överslagsberäkningar kunna vi sätta $C = 30$, om skrovligheten ej är mycket stor och hydrauliska medeldjupet ligger mellan 0.5-1.0.

De värden, som härovan angetts på C , får betraktas såsom relativt grova genomsnittsvärden. Våra tidigare undersökningar ha visat, att friktionskoefficienten är en funktion av medelhastigheten, hydrauliska radien, kinematiska viskositeten ν och väggens skrovlighet. Då enligt avdelning 38 $\psi = \lambda$ och $C = \sqrt{\frac{2g}{\psi}}$ är också $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$, varför principiellt samma funktionella samband måste råda mellan C och ovan angivna faktorer som mellan λ och samma grupp av strömningsvariabler. Detta innebär bl.a. att viskositeten är implicit innesluten i uttrycket på C . Våra formler för öppna ledningar tillåta sålunda icke såsom fallet var med motsvarande formler för strömning i rör något hänsynstagande till varierande viskositet. Även om de flesta tillämpningar gälla vatten är dock t.ex. dess viskositet vid $+10^{\circ}\text{C}$ 31 % större än dess viskositet vid $+20^{\circ}\text{C}$ (se tabell 2!).

De flesta strömningar i öppna ledningar ske dock vid relativt höga Reynoldska tal och sålunda vid väl utvecklad turbulens. Detta innebär då också enligt avdelning 3822 b att viskositeten har relativt litet inflytande på friktionsförlusterna, som huvudsakligen bestämmas av den rådande medelhastigheten och väggens skrovlighetstal. Vid låga hastigheter och jämn väggbeskaffenhet bli formlernas användbarhet mera tvivelaktig, särskilt om ν är varierande.

Vid direkta beräkningar användes lämpligen formel (3.92). Även Kutters förenklade formel (3.81) med de i tabell 6 angivna skrovlighetstalen m kan användas, medan Ganguillets-Kutters formel (3.80) lämpar sig sämre för direkta beräkningar. Denna formel finnes dock tabellerad i Schewiors förut omnämnda tabellverk.

Ex. 3.63. Huru stort är Reynolds tal i en rektangulär betongränna med

bredden 2 m och vattendjupet 0.5 m, om vattenhastigheten är 1 m/s och vatt-
nets temperatur +20°C.

Lösning:

$$R_h = \frac{200 \cdot 50}{200 + 2 \cdot 50} = \frac{50}{1 + \frac{1}{2}} = 33.3$$

$$R = \frac{100 \cdot 33.3}{0.01} = 33.3 \cdot 10^4 = 3.3 \cdot 10^5$$

Ex. 3.64. Huru stor vattenmängd framrinner i ett dike med släntlutningen
(se fig. 3.57!) 1:1, om bottenbredden är 0.3, $I = 0.8:1000$ och vattendjupet
0.5?

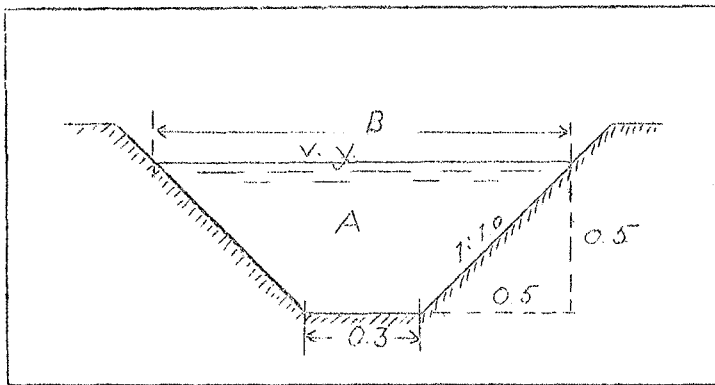


Fig. 3.57

Lösning: Bet se figuren!

$$B = 0.3 + 2 \cdot 1 \cdot 0.5 = 1.3 \text{ m}$$

$$A = \frac{0.5}{2} (0.3 + 1.3) = 0.40 \text{ m}^2$$

$$p = 0.3 + 2 \cdot \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = 1.714 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{0.40}{1.714} = 0.233 \text{ m}$$

Vi väljer formel (3.92) med C
enligt tabell 5 = 35

Således

$$q = A \cdot v = 0.40 \cdot 35 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{0.0008^{\frac{1}{2}}} = 0.150 \text{ m}^3/\text{s}$$

Svar: $q = 0.150 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ex. 3.65. Lös föregående exempel med hjälp av Kutters förenklade formel!

Lösning: Kutters förenklade formel lyder

$$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}}$$

Tabell 6 ger $m = 1.50$, varför

$$C = \frac{100 \sqrt{0.233}}{1.5 + \sqrt{0.233}} = \frac{48.3}{1.983} = 24.3$$

och således

$$q = 0.40 \cdot 24.3 \sqrt{0.233 \cdot 0.0008} = 0.133 \text{ m}^3/\text{s}$$

Svar: $q = 0.133 \text{ m}^3/\text{s}$.

Ex. 3.66. Huru stort blir vattendjupet i ett dike med bottenbredden
0.3 m, släntlutningen 1:1.5 och fallet 1:1000, om diket skall avbörda 0.200
 m^3/s ?

Lösning: Antag att djupet är x m. Formel (3.92) användes och C sättes = 35. På figur 358 införs givna data och en del andra, som lätt erhållas ur dessa. Följande ekvationer erhållas

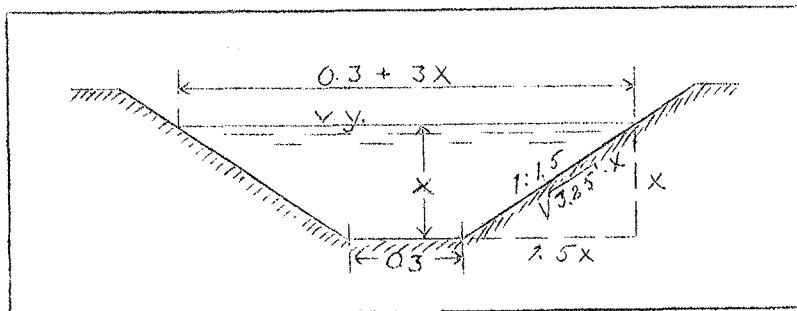


Fig. 3.58

35. På figur 358 införs givna data och en del andra, som lätt erhållas ur dessa. Följande ekvationer erhållas

$$A = x \cdot \frac{0.3 + 3x + 0.3}{2} = x(0.3 + 1.5x)$$

$$p = 0.3 + 2x \sqrt{3.25}$$

$$R_h = \frac{A}{p} = \frac{x(0.3 + 1.5x)}{0.3 + 2x\sqrt{3.25}}$$

och således

$$0.200 = x(0.3 + 1.5x) \cdot 35 \cdot \left[\frac{x(0.3 + 1.5x)}{0.3 + 2x\sqrt{3.25}} \right]^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{0.001}$$

eller

$$D = 0.180 - x(0.3 + 1.5x) \left[\frac{x(0.3 + 1.5x)}{0.3 + 3.606x} \right]^{\frac{2}{3}}$$

Denna ekvation löses genom passning, varvid ett antal sammanhängande x - och D -värden beräknas. Det värde på x , som ger $D = 0$ är tydligen det sökta x -värdet. Vi prova med $x_1 = 0.4$, som ger $D_1 = 0.054$ och med $x_2 = 0.5$, som ger $D_2 = -0.027$. Det sökta x -värdet ligger alltså mellan 0.4 och 0.5. Om vi interpolera rätlinjigt, bör alltså 0.47 bli vår tredje skattning, som ger $D = -0.001$, varför vidare skattning ej är nödvändig.

Svar: Det sökta vattendjupet är 0.47 m.

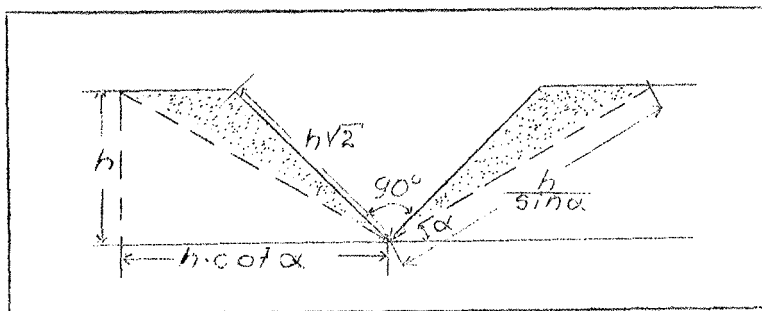
Ex. 3.67. En öppen ränna, vars tvärsnitt är en rätvinklig triangel skall breddas så, att vattenmängden fördubblas. Tvärsnittet skall fortfarande vara triangulärt, och någon fördjupning skall ej äga rum. Beräkna de nya sidornas lutning mot horisontalplanet!

Lösning: Chezy's ekvation $v = C \sqrt{R_h I}$ användes. Beteckningarna framgå av figuren. För den ursprungliga sektionen gäller:

$$A_1 = h^2; \quad p = 2 \sqrt{2} h; \quad R_{h1} = \frac{h \sqrt{2}}{4}$$

För den nya sektionen gäller:

$$A_2 = h^2 \cot \alpha;$$



$$p_2 = \frac{2h}{\sin \alpha} ;$$

$$R_{h_2} = \frac{h}{2} \cos \alpha ;$$

$$Q_2 = Ch^2 \cot \alpha \sqrt{\frac{h}{2} \cos \alpha} \cdot I$$

Villkoret $2Q_1 = Q_2$ ger ekvationen

Fig. 3.59

$$2Ch^2 \sqrt{\frac{h\sqrt{2}}{4}} \cdot I = Ch^2 \cot \alpha \sqrt{\frac{h}{2} \cos \alpha} \cdot I$$

varur efter förenkling erhålles

$$\cos^3 \alpha + 2\sqrt{2} \cos^2 \alpha - 2\sqrt{2} = 0$$

Här måste α vara en vinkel mellan 0° och 45° , varför $1 > \cos \alpha > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071$. Slå vi i en tabell över de trigonometriska funktionernas talvärden finner vi att $\cos 25^\circ 25' = 0.900$ och att $\cos 31^\circ 40' = 0.851$. Vi prova medelst insättning dessa värden och erhålla

$$0.9^3 + 2\sqrt{2} \cdot 0.9^2 - 2\sqrt{2} = 0.192$$

$$0.851^3 + 2\sqrt{2} \cdot 0.851^2 - 2\sqrt{2} = -0.164$$

Lineär interpolation mellan dessa värden ger $\cos \alpha = 0.8736$, varav $\alpha = 29^\circ.12$.

Svar: Den sökta vinkeln är $29^\circ.1$.

Ex. 3.68. En öppen rännas sektionens area är A. Vilken form ger den största avbördningen? Rännans lutning antages vara I. Diskutera några olika alternativ!

Lösning: Vi tillämpa de Chezys formel

$$q = C \cdot A \sqrt{\frac{A}{p} \cdot I}$$

vilken också kan skrivas

$$q = C \cdot \sqrt{\frac{A^3}{p} \cdot I}$$

Av detta uttryck synes att q_{\max} erhålles, om $\frac{A^3}{p}$ göres så stort som möjligt. Eftersom A är givet innebär detta, att p skall vara så litet som möjligt. Om a) formen är helt valfri, kan $\left(\frac{A^3}{p}\right)_{\max}$ medelst variationsanalysen bevisas inträffa vid halvcirkulär sektion.

b) Vi utföra en närmare undersökning för det fall, att sidorna och botten äro plana. På figur 3.60 finnas behöfliga beteckningar införda. Dessa ge omedelbart ekvationerna:

$$\begin{cases} A = x(y+nx) & (a) \\ p = y+2x\sqrt{n^2+1} & (b) \end{cases}$$

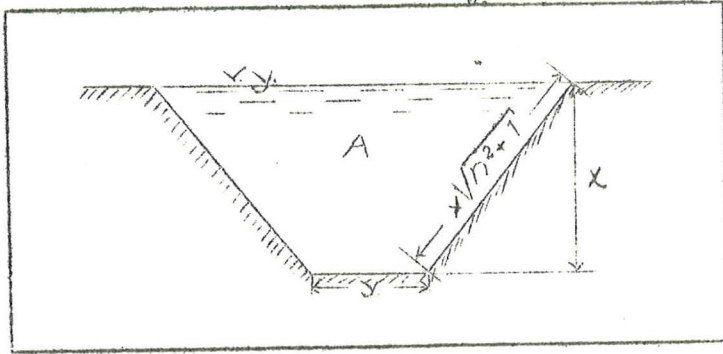


Fig. 3.60

Vi lösa y ur ekvation (a) och erhålla

$$y = \frac{A}{x} - nx \quad (c)$$

samt införa detta i ekvation (b) således

$$p = \frac{A}{x} - nx + 2x\sqrt{n^2+1} \quad (d)$$

Enligt differentialkalkylen gäller, att ett nödvändigt (men ej tillräckligt) villkor för p_{\min} är att

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (e)$$

I detta fall erhålles

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{A}{x^2} - n + 2\sqrt{n^2+1} = 0 \quad (f)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -x + \frac{2xn}{\sqrt{n^2+1}} = 0 \quad (g)$$

Ekvation (g) ger $x_1 = 0$ (förkastas!) samt

$$\sqrt{n^2+1} = 2n \quad (h)$$

eller

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{samt } \alpha = 60^\circ$$

Insättes $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i ekvationen (f) erhålles

$$x = \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{27}}{3} \sqrt{A}$$

samt ur ekvationen (c)

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{A}$$

Den sneda sidan blir

$$x\sqrt{n^2+1} = \frac{4\sqrt{27}\sqrt{A}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{A} = y$$

Av denna undersökning synes att sidor och botten äro lika stora samt vinkeln $\alpha = 60^\circ$.

Sektionen är alltså en halv regelbunden sexhörning.

Några specialfall:

1) Släntlutningen given! Om släntlutningen är given är $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. Ekvationen (f) ger då

$$x = \sqrt{\frac{A}{2\sqrt{n^2+1}-n}}$$

samt enligt ekvationen (c)

$$y = \frac{A}{x} - nx$$

Om $\alpha = 90^\circ$ är $n = 0$ och rännan rektangulär. Då gäller

$$x = \sqrt{\frac{A}{2}} \text{ samt } y = 2\sqrt{\frac{A}{2}}$$

2) Är bottenbredden eller djupet givet, gäller givetvis fortfarande sambandet

$$y = \frac{A}{x} - nx$$

där n även då blir $\frac{1}{\sqrt{3}}$ och således

$$y = A\sqrt{3} - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

42. Om hastighetsfördelningen i öppna ledningar.

Vid vår diskussion av den laminära rörelsen i öppna rännor ha vi teoretiskt kunnat visa, att hastigheten är paraboliskt fördelad längs normalen mot botten. Den parabel, som anger hastighetens variation med djupet, har vertex i den fria vätskeytan, där också då maximal hastighet erhålles. Vid botten är hastigheten 0.

Om strömningen är turbulent, och detta är som tidigare påpekats i allmänhet fallet, kan icke någon teoretiskt grundad hastighetsfördelning anges. I öppna ledningar föreligger icke såsom i slutna ledningar någon högre symmetri, utan sektionerna kunna såsom i naturliga vattendrag vara synnerligen oregelbundna. Och ju mera oregelbundet tvärsnittet är, ju mera komplicerad blir hastighetsfördelningen. Genom omfattande experimentella mätningar i vattendrag och i modellrännor ha dock vissa allmänna regler framkommit över hastighetsfördelningen i öppna ledningar vid turbulent strömning.

Hastighetsfördelningen i en öppen ränna påverkas av väggbeskaffenheten (på samma sätt som i slutna ledningar), men även av den fria vattenytan. Hastigheten är i allmänhet störst i den punkt eller de punkter, som påverkas minst av de fasta väggarna och den fria ytan. Maximala hastigheten ligger alltid under den fria ytan men icke i sektionens centrum. I mycket grunda vatten-

drag med ojämn botten ligger dock denna maximala hastighet mycket nära ytan. Någon rationell förklaring till den relativt kraftiga retardation som ytvatt-
net visar har ännu icke kunnat ges. Effekten av vind och ytspänningskrafter anses icke vara tillräckliga förklaringsgrunder.

Undersökes hastighetsfördelningen i en vertikal linje, finner man att hastigheten är 0 omedelbart intill botten, men att den i allmänhet hastigt stiger till ett så pass relativt stort värde, att man vid praktiska mätningar räknar med en viss bottenhastighet. Maximala hastigheten ligger genomsnittligt på ungefär $1/3$ av djupet under den fria ytan. I vissa fall kan hastighetsfördelningen i en sådan vertikal linje approximeras till en parabel med horisontell axel, som går genom den punkt, där hastigheten är maximal. Tre sådana i viss mån schematiserade hastighetsfördelningar återges i figur 3.61. Den vertikala axeln har betecknats med x och på denna avsättes djupet mätt från vattenytan. Parallellt med och i vattenytan har v -axeln inritats.

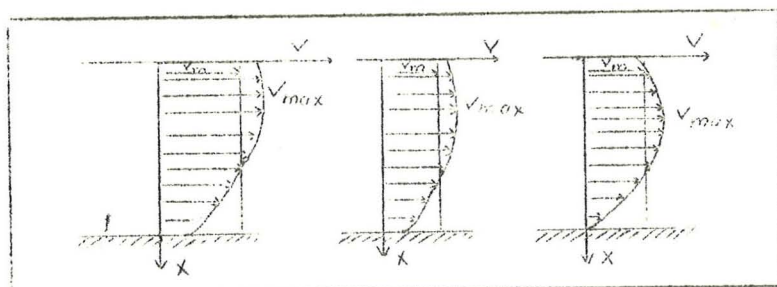


Fig. 3.61

Om sådana diagram uppritas i anslutning till praktiska mätningar kan v_m enligt olika metoder beräknas för varje vertikal. Multipliceras dessa medelhastigheter med de delytor av hela sektionen, som de

representera, kan totala avbördningen q sedan erhållas genom en enkel summation av de uppkomna produkterna. Genom mer eller mindre tätt liggande vertikaler, i vilka medelhastigheten bestäms genom ovan angivna förfarande, kan denna beräkning av q göras med önskad noggrannhet.

Om man undersöker hastigheten i ett horisontalplan, finner man på samma sätt att den avtar från mitten åt sidorna, så att den blir 0 vid rännans eller vattendragets sidor.

Hastighetens variation eller fördelning i tvärsnittet kan även åskådliggöras genom att punkter med samma hastighet förenas. På så sätt erhållas kurvor, s.k. isotacher, som ge en överskådlig bild av hastighetsfördelningen. Fig. 3.62 visar sådana kurvor för ett naturligt vattendrag med relativt ojämn sektion.

Om hastigheten i en öppen ledning varierar, innebär detta, att den på grundval av medelhastigheten för sektionen beräknade rörelseenergien blir för liten. I allmänhet föredrar man dock att i uttrycket $\frac{v^2}{2g}$ låta v betyda medelhastigheten och att i stället vid noggranna beräkningar multiplicera med en empirisk koefficient $\alpha > 1$. Jämför också avdelning 322 och 3221 samt ex. 3.07 och 3.08!

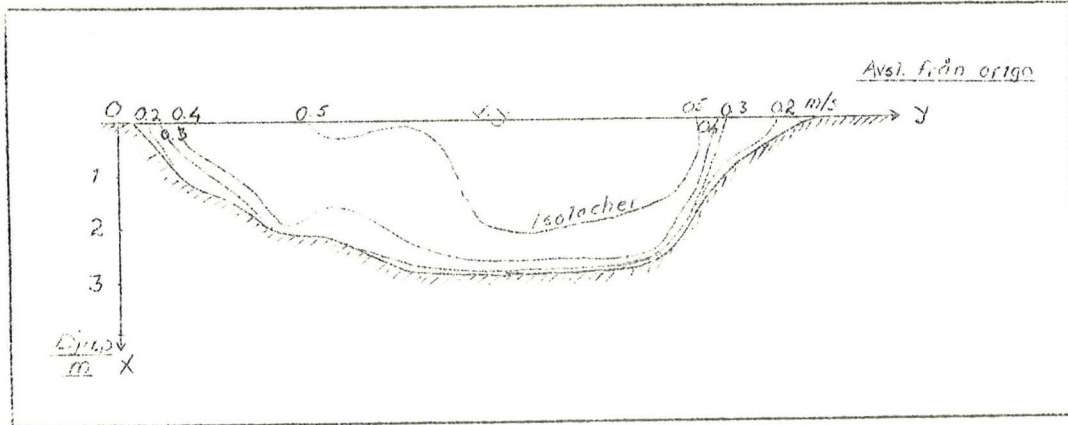


Fig. 3.62

De i denna avdelning anförda mätningarna av hastigheten i öppna ledningar göras i allmänhet med ett speciellt instrument benämmt hydrometrisk flygel. Efter dess förste konstruktör benämnes det ofta även Woltmanns flygel. Det består av ett lättrorligt vinghjul (liknande en propeller), som sättes i rotation av det framströmmande vattnet. Den alstrade rörelsen överföres till ett kalibrerat räkneverk, varigenom vattnets hastighet kan bestämmas. Flygeln kan förskjutas längs en vertikal stång, som stöder mot rännans botten eller den är på annat sätt höj- och sänkbar.

Ex. 3.69. Bevisa det i den föregående avdelningen gjorda påståendet, att om hastigheten i en sektion varierar, så är den med hjälp av medelhastigheten beräknade rörelseenergien alltid mindre än den verkliga!

Bevis: Enligt tidigare genomgångna formler gäller för v_m i en vertikal sektion med bredden l och djupet h

$$v_m = \frac{1}{h} \int_0^h f(x) dx$$

där $f(x)$ anger den rådande hastighetsfördelningen. Härav erhålles om W_m betecknar rörelseenergien beräknad på v_m

$$W_m = \frac{\rho \cdot h \cdot l}{2g} v_m^2 = \frac{\rho h}{2g} \cdot \frac{l}{h^2} \left[\int_0^h f(x) dx \right]^2 = \frac{\rho}{2g} \cdot \frac{l}{h} \left[\int_0^h f(x) dx \right]^2$$

På samma sätt erhålles för W_e (index anger verklig rörelseenergi)

$$W_e = \int_0^h \frac{\rho dx \cdot l \cdot f(x)^2}{2g} = \frac{\rho}{2g} \int_0^h [f(x)]^2 dx$$

Påståendet innebär tydligen att

$$E_e - E_m > 0$$

eller

$$\int_0^h [f(x)]^2 dx - \frac{1}{h} \left[\int_0^h f(x) dx \right]^2 > 0$$

Vi tänka oss hastigheten bestämd i n punkter av sektionen, så att på djupet $\frac{h}{n} \cdot 1$ är hastigheten $f(\frac{h}{n} \cdot 1)$ och på djupet $\frac{h}{n} x_i$ är hastigheten $f(\frac{h}{n} \cdot x_i)$, där x_i är ett godtyckligt helt tal $\leq n$. Vi bilda uttrycket (jfr det från statistiken bekanta andra momentet!)

$$\vartheta_2 = \frac{1}{n} \sum_{x_i=1}^n \left[f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) - v_m \right]^2 \geq 0$$

såvitt $f(\frac{h}{n} \cdot x_i)$ för något värde på x_i är skilt från v_m gäller tecknet $>$. Likhetstecknet gäller tydligen endast om $f(\frac{h}{n} \cdot x_i) = v_m$ för alla x_i , d.v.s. om v är konstant. Vi kunna sålunda enligt problemets formulering i fortsättningen utesluta likhetstecknet. Kvadraten utvecklas

$$\vartheta_2 = \frac{1}{n} \sum_{x_i=1}^n \left[f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \right]^2 - 2v_m \cdot \frac{1}{n} \sum_{x_i=1}^n f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) + v_m^2 > 0$$

Tydligen är

$$v_m = \frac{1}{n} \sum_{x_i=1}^n f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right)$$

varför uttrycket för ϑ_2 kan förenklas till formen

$$\vartheta_2 = \frac{1}{n} \sum_{x_i=1}^n \left[f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \right]^2 - \frac{1}{n^2} \left[\sum_{x_i=1}^n f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \right]^2 > 0$$

Multiplitera med h och sätt $\frac{h}{n} = \Delta x$! Då erhålles efter någon omformning

$$h \vartheta_2 = \sum_{x_i=1}^n \left[f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \right]^2 \Delta x - \frac{1}{h} \left[\sum_{x_i=1}^n f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \Delta x \right]^2 > 0$$

Tages limes för $n \rightarrow \infty$ erhålles

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h \vartheta_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{x_i=1}^n \left[f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \right]^2 \Delta x - \frac{1}{h} \left[\sum_{x_i=1}^n f\left(\frac{h}{n} \cdot x_i\right) \Delta x \right]^2 \right\} > 0$$

Vid limes $n \rightarrow \infty$ övergår tydligen $\frac{h}{n} x_i$ till en kontinuerlig variabel x och $\Delta x \rightarrow dx$. Således gäller enligt integralkalkylen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h \vartheta_2 = \int_0^h [f(x)]^2 dx - \frac{1}{h} \left[\int_0^h f(x) dx \right]^2 > 0$$

Ex. 3.70. Såsom ett övningsexempel utan närmare angiven lösning formulera vi ytterligare följande problem: Översätt den i närmast föregående avdelning givna diskussionen om hastighetsfördelningen i öppna ledningar till matematiskt språk! Diskutera med hjälp av lämpliga beteckningar, medelhastighet, avbördning, isotacher m.m. Ange på grundval av de uppställda uttrycken lämpliga grafiska metoder för deras numeriska beräkning o.s.v.!

43. Olikformig strömning i öppna ledningar.

I det föregående ha vi i olika sammanhang omnämnt den olikformiga rörelsen; dock utan att närmare behandla den. I avdelning 361 ha vi sålunda definierat den olikformiga strömningen såsom karakteriserad av att den våta arean varierar till storlek och form, och i avdelning 401 ha vi infört begreppen sänkning och dämning (stuvning). Den hittills givna framställningen av strömning i öppna ledningar har således i huvudsak sysslat med likformig strömning. Medan vid denna strömning ledningens lutning, vattenytans lutning och energilinjens lutning förlöper parallellt, så gäller vid olikformig strömning, att dessa tre linjer ha skilda lutningar. I fortsättningen skola vi nu först ge en kortfattad teoretisk behandling av den olikformiga strömningen i öppna ledningar samt därefter diskutera vissa vid praktiska beräkningar viktiga formler och metoder.

431. Härledning av differentialekvationen för olikformig strömning i öppna ledningar.

Den följande diskussionen begränsas till olikformig strömning i en prismatisk kanal (ledning). Sektionsformen är sålunda konstant längs ledningens centrumaxel. Vidare förutsättes, att strömlinjernas krökning är försumbar (d.v.s. inga centrifugalkrafter uppträda). Lutningen antages dessutom vara så liten, att tryckhöjden kan sättas = djupet. Beräkningarna och härledningarna göras under antagandet av att de Chezys formel gäller, d.v.s. att energiförlusten vid den olikformiga strömningen är densamma som vid likformig strömning under samma betingelser. Trots att experimentella undersökningar icke till fullo bekräftat detta antagande, torde det härigenom införda felet vara litet i förhållande till svårigheten att välja rätt värde på skrovligheten (råheten).

Den totala höjden H kan enligt Bernoullis ekvation för varje sektion av en öppen ledning skrivas (se avd. 411 och figur 3.63!)

$$H = z+x+\frac{v^2}{2g} \quad (a)$$

varest z är höjden över ett godtyckligt 0-plan för ledningens botten, x = vattendjupet och v den rådande medelhastigheten i sektionen. Deriveras detta uttryck med avseende på förflyttningen s längs en strömlinje i strömriktningen, erhålles

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (b)$$

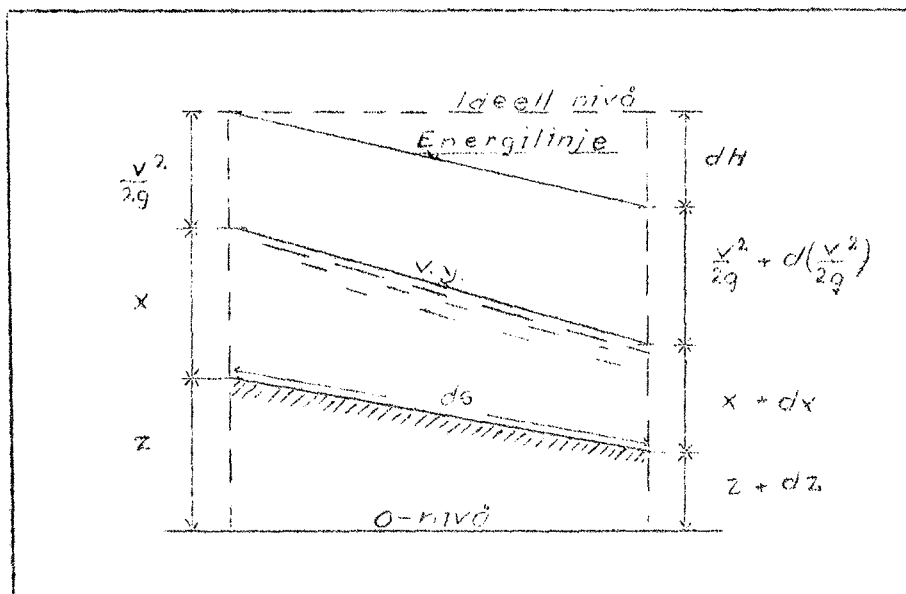


Fig. 3.63

Den första termen i denna ekvation representerar förändringen i total höjd per längdenhet. Denna storhet är alltid negativ i strömriktningen (obs. $dH = dh_f!$). Vi kunna således enligt de Chezy's ekvation skriva

$$v = C \sqrt{R_h I} = C \sqrt{R_h \left(-\frac{dH}{ds} \right)} \quad (c)$$

eller efter enkla omskrivningar

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{v^2}{C^2 R_h} = -\frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} \quad (d)$$

Termen $\frac{dz}{ds}$ representerar tydligen ledningens lutning (jfr ekv. 3.63!). Eftersom lutningen brukar räknas såsom positiv i strömriktningen och dz är negativ, gäller tydligen om I_1 speciellt betecknar ledningens fall

$$\frac{dz}{ds} = -I_1 \quad (e)$$

$\frac{dx}{ds}$ betecknar förändringen i vattendjup per längdenhet (av s).

Den sista termen betecknar slutligen intensiteten i hastighetshöjdens växling. Vi omskriva denna term enligt nedanstående tankeföljd. Om ledningens bredd är b (se figur 3.64!) så gäller

$$dA = b dx \quad (f)$$

Kontinuitetsekvationen ger relationen

$$vA = (v+dv)(A+dA) = (v+dv)(A+bdx) \quad (g)$$

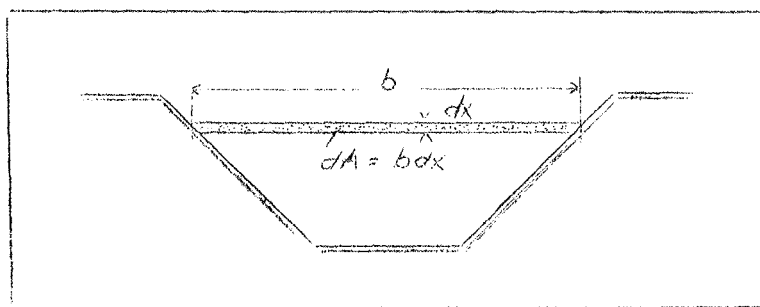


Fig. 3.64

Utvecklas högra sidans produkt, och försummas termen $b dx dv$, som är liten av andra ordningen, erhålles slutligen

$$dv = -\frac{vb}{A} dx \quad (h)$$

Med hjälp av dessa relationer kan nu sista termen skrivas

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = \frac{v}{g} \frac{dv}{ds} = -\frac{v^2 b}{g \cdot A} \frac{dx}{ds} = -\frac{q^2 b}{gA^3} \frac{dx}{ds} \quad (i)$$

Och vi kunna skriva vår ursprungliga ekvation (b) under formen

$$-\frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} = -I_1 + \frac{dx}{ds} - \frac{q^2 b}{gA^3} \frac{dx}{ds} \quad (j)$$

eller

$$\frac{dx}{ds} = \frac{I_1 - \frac{q^2}{C^2 A^2 R_h}}{1 - \frac{q^2 b}{gA^3}} \quad (3.93)$$

som också kan skrivas (om v införes)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{I_1 - \frac{v^2}{C^2 R_h}}{1 - \frac{v^2 b}{gA}} \quad (3.93^1)$$

Ekvationen (3.93) är den grundläggande differentialekvationen för clikformig stationär strömning i en öppen (prismatisk) ledning.

Ovan härledda ekvation kan genom olika omformningar fås att representera en mängd olika profiler. En mera utförlig diskussion av de olika lösningar, som kunna erhållas vid integrering av denna ekvation, ligger utom ramen för detta arbete. Längre fram skola vi presentera en för praktiska räkningar lämpad lösning. Här anföres endast såsom ett exempel, att om ledningen är mycket bred och rektangulär, kan tydligen R_h sättas = bredden = b . Ekvationen (3.93¹) kan då skrivas

$$\frac{dx}{ds} = \frac{I_1 - \frac{v^2}{C^2 b}}{1 - \frac{v^2}{g^2 x}} \quad (3.94)$$

432. Närmare diskussion av differentialekvationen för olikformig strömning. Strömmande och stråkande vattenrörelse.

I denna avdelning skola vi något närmare diskutera innebörden i ekvationen (3.93). Vi ha ovan angivit, att termen $\frac{dx}{ds}$ uttrycker djupets förändring per längdenhet vid förflyttning med strömmen. Den kan också sägas uttrycka vattenytans lutning i förhållande till ledningens botten. Och häri ligger ekvationens stora betydelse. Om vi sålunda känna djupet, sektionens arean och vattenföringen i en viss punkt av en öppen ledning, så kunna vi med ekvationens (3.94 eller 3.93) hjälp omedelbart avgöra, huru vattenytan förlöper i förhållande till botten. Vi undersöka nu några viktiga gränsfall:

a. $\frac{dx}{ds} = 0$. Detta innebär tydligen att djupet är konstant och att vattenytan förlöper parallellt med bottenlinjen. Strömningen är likformig. Men om $\frac{dx}{ds} = 0$, så är också

$$I_1 - \frac{q^2}{C^2 A^2 R_n} = 0$$

eller

$$q = C \cdot A \sqrt{R_n \cdot I_1}$$

För en given sektion och vattenföring finnes tydligen endast ett djup, vid vilket strömningen är likformig. Detta djup kallas det normala djupet h_n .

b. $\frac{dx}{ds} > 0$. Här växer djupet i strömriktningen. Vattenytans lutning är mindre än bottenlutningen. Ett närmare studium av vattenytans form längs ledningen visar, att den är konkav uppåt. Strömningen är olikformig och en dämning säges föreligga. Vattenytans längdprofil bildar en s.k. dämningskurva.

c. $\frac{dx}{ds} < 0$. Vattendjupet avtar i strömriktningen. Vattenytans lutning är större än bottenlutningen. Vattenytan är konkav nedåt. Strömningen är olikformig och en sänkning föreligger. Vattenytans längdsektion bildar en s.k. sänkningsskurva.

d. $\frac{dx}{ds} = \pm \infty$. Den föregående diskussionen har förutsatt att $1 - \frac{v^2}{g^2 x} \neq 0$, d.v.s. att nämnaren ej är 0. Vad inträffar, om så blir fallet? Formelmässigt innebär det tydligen att

$$\frac{dx}{ds} = \pm \infty$$

och att

$$v = \sqrt{gx}$$

Matematiskt innebär tydligen denna hastighet en diskontinuitet i uttrycket för $\frac{dx}{ds}$. Fysikaliskt (fenomenologiskt) visar det sig, att vatten, som strömmar längs en öppen ledning, icke kan växla sin hastighet från ett värde $< \sqrt{gx}$ till ett värde $> \sqrt{gx}$ eller vice versa, utan att vattenytan uppvisar en plötslig höjning eller sänkning, en vågrörelse eller dylikt. På grund härav kallas det djup, för vilket $v = \sqrt{gx}$ för kritiskt djup x_c (h_c) och motsvarande hastighet för kritisk hastighet v_c . Det visar sig också, att passerandet av denna hastighet innebär en förändring i rörelsens natur. Genom praktisk erfarenhet och experimentella modellstudier har det visat sig, att vattenströmmen reagerar helt olika för olika hinder, som insättes i dess väg, allteftersom vattnets hastighet är större eller mindre än den kritiska hastigheten $v_c = \sqrt{gx_c}$. Om hastigheten är $< \sqrt{gh_c}$ kallas rörelsen strömmande och om hastigheten är $> \sqrt{gh_c}$ kallas rörelsen stråkande. Vi kunna icke här ingå på någon fullständigare utredning om dessa rörelsers natur, utan hänvisa den intresserade till litteraturen (se t.ex. Addison: A treatise on applied hydraulics!). I fortsättningen komma vi dock att i olika sammanhang ytterligare beröra de existerande olikheterna mellan dessa strömningsförlopp.

44. Om begreppet specifik energi.

Vid strömning i öppna ledningar har det visat sig, att begreppet specifik energi möjliggör en enkel och klar diskussion av många olika fenomen.

Vi ha tidigare i olika sammanhang diskuterat Bernoullis ekvation (se t.ex. avd. 3221!) och funnit, att de olika vätskeelementens energinnehåll är konstant längs varje strömlinje vid en ideell vätskas strömning och att vid verkliga vätskor den s.k. energilinjen ständigt faller (se avd. 361!). Vätskans totala mekaniska energinnehåll ha vi sålunda funnit vara lika med summan av rörelse-, tryck- och lägesenergi, varest lägesenergien räknas från en godtycklig 0-nivå. Vi definiera nu en strömmande vätskas specifika energi såsom summan av tryck- och rörelseenergi räknat per massenhet och hänförd till en linje längs ledningens botten. För en öppen ledning innebär detta, att specifika energien (uttryckt som en höjd) helt enkelt är lika med summan av vattendjupet och hastighetshöjden. Således gäller, om E = specifika energien, x = vattendjupet och v = vattenhastigheten, ekvationen

$$E = x + \frac{v^2}{2g} \quad (3.95)$$

Vid likformig strömning i öppen ledning avtar alltid det totala energiinnehållet, medan det specifika energiinnehållet förblir konstant, när vattendjup och hastighet ej varierar längs ledningen. Vid olikformig strömning avtar på samma sätt alltid det totala energiinnehållet, medan det specifika energiinnehållet antingen växer eller avtar.

441. Specifika energien vid en vätskas strömning i en öppen ledning med rektangulärt tvärsnitt.

I följande avsnitt skola vi belysa, vilka allmänna resultat, som kunna erhållas ur ett studium av specifika energien vid vattnets stationära strömning i en rektangulär ränna med vertikala sidor. Vi betrakta strömningen i varje vertikal såsom identiskt lika. Genom dessa begränsningar av problemet kunna vi erhålla enkla ekvationer och uttryck, vilka äro ägnade att belysa de grundläggande fysikaliska förhållandena. Samma allmänna metod kan sedan användas även på andra mera komplicerade strömningar, även om ekvationerna då bli betydligt mera invecklade.

I figur 3.65 betrakta vi en vertikal sektion med bredden = längdenheten. Vattendjupet är x och vattenföringen q per tids- och breddenhet. Hastigheten

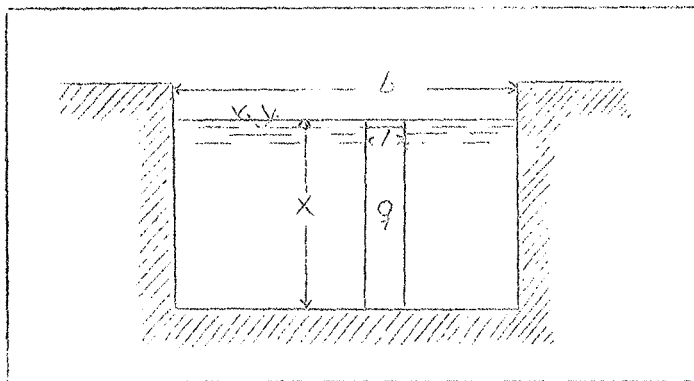


Fig. 3.65

eller medelhastigheten är v . Då gäller tydligen

$$v = \frac{q}{x} \quad (a)$$

vilket ger specifika energien E

$$E = x + \frac{v^2}{2g} = x + \frac{q^2}{2gx^2} \quad (3.96)$$

I denna ekvation ingår som synes tre variabler: E , x och q . Den fysikaliska innebörden av ekva-

tionen (3.96) kunna vi belysa genom att diskutera följande två fall:

- a. $q = \text{konst.}$ men E och x variabla.
- b. $E = \text{ " " } q \text{ " } x \text{ " }$

a. $q = \text{konst.}$ Vi betrakta E som funktion av x och upprita funktionsdiagrammet. Detta erhålles lätt och finnes återgivet i figur 3.66. Tydligen är $E = x$ en asymptot och $E = 0$ en annan asymptot. Vi undersöka dessutom läget av det tydligen förekommande minimet på E ($E_{\min} = E_c$). Således

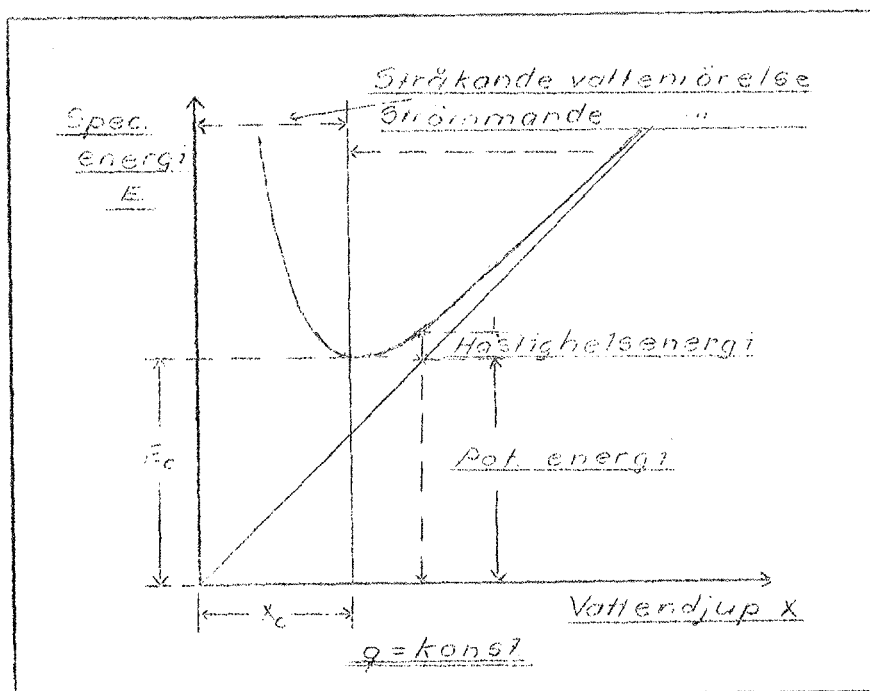


Fig. 3.66

$$\frac{dE}{dx} = 1 - \frac{q^2}{gx^3} = 0 \quad (a)$$

vilket ger

$$x_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (b)$$

Det djup, för vilket E_{\min} erhålles, visar sig sammanfalla med det tidigare i avdelning 432 diskuterade kritiska djupet x_c (eller h_c). För varje givet $E \neq E_{\min}$ finnas två djup, vid vilken strömningen kan äga rum: ett djup större än x_c och ett djup mindre än x_c (se figur 3.66!). I förra fallet är rörelsen strömmande, i senare fallet stråkande.

Av figuren 3.66 synes vidare att för strömningar, som ske i närheten av det kritiska djupet, äro växlingar i djupet förbundna med relativt små växlingar i specifika energien. Detta förklarar i viss mån, att dessa strömningar ofta visa en ostadig, vågig yta. Figur 3.66 visar, att en minskning av specifika energien är förbunden med en ökning av djupet vid stråkande rörelse, medan vid strömmande rörelse motsatsen gäller, d.v.s. djupet minskar.

Om q elimineras ur ekvationen (3.96) medelst substitutionen (b) ovan erhålles

$$E_c = x_c + \frac{x_c}{2} = \frac{3}{2} x_c \quad (3.97)$$

b. $E = \text{konst.}$ Ekvationen (3.96) skrives nu under formen

$$q^2 = 2g(Ex^2 - x^3) = 2gx^2(E-x)$$

eller

$$q = x \sqrt{2g(E-x)} \quad (3.98)$$

Vi upprita funktionskurvan. Asymptoter saknas. Maxima och minima bestämmas. Således

$$\frac{dq}{dx} = \frac{-x}{2\sqrt{2g(E-x)}} + \sqrt{2g(E-x)} = 0$$

som ger

$$x_c = \frac{2}{3} E \quad (3.99)$$

samt

$$q_{\max} = \sqrt{g x_c^3} = \sqrt{g} \cdot x_c^{\frac{3}{2}} \quad (3.99^1)$$

En jämförelse av ekvationerna (3.97) och (3.99) visar, att minimum hos den specifika energien och maximal vattenföring inträffar vid kritiska djupet x_c (eller h_c). På figur 3.67 finnes funktionskurvan uppritad.

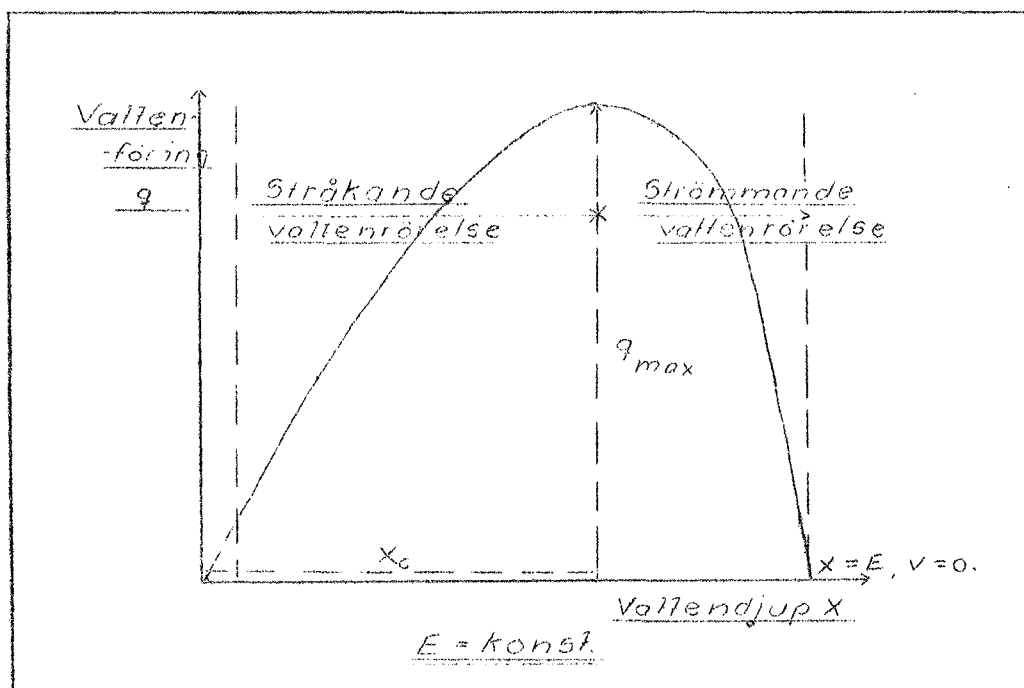


Fig. 3.67

Den mot kritiska djupet svarande hastigheten, den kritiska hastigheten v_c , kunna vi erhålla ur uttrycket

$$x_c = \sqrt[3]{\frac{2q^2}{g}}$$

om vi införa

$$q = v_c \cdot x_c$$

Alltså

$$x_c = \sqrt[3]{\frac{v_c^2 x_c^2}{g}}$$

eller

$$v_c = \sqrt{g \cdot x_c} \quad (3.100)$$

Av figur 3.64 synes, att för $v > v_c$ (eller $\frac{v^2}{2g} > \frac{v_c^2}{2g}$) blir rörelsen stråkande och att för $v < v_c$ (eller $\frac{v^2}{2g} < \frac{v_c^2}{2g}$) blir rörelsen strömmande.

Om ekvationen (3.100) divideras led för led med $g x_c$ erhålles

$$1 = \frac{v_c}{\sqrt{g x_c}}$$

men i högra membrum igenkänna vi här Froudes tal F. En vattenrörelse karakteriserad av $F = 1$ säger oss tydligen, att strömningen sker vid kritiska förhållanden. Om Froudes tal är större än 1 är tydligen rörelsen stråkande och om $F < 1$ är rörelsen strömmande.

Ex. 3.71. Huru stor är vattenytans lutning i en rektangulär öppen kanal i en sektion med bredden 15.2 m och djupet 3.1 m, om vattenföringen är 28 m³/s och bottenlutningen 15 cm/km. C sättes = 62.

Lösning: Eftersom bottenlutningen är given i cm/km, söka vi vattenytans lutning i samma mått. Vi tillämpa ekvation (3.93)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{I_1 - \frac{Q^2}{C^2 A^2 R_h}}{1 - \frac{Q^2 b}{g A^3}}$$

A och R_h beräknas. Således

$$A = 15.2 \cdot 3.1 = 47.1 \text{ m}^2$$

$$R_h = \frac{47.1}{15.2 + 2 \cdot 3.1} = 2.20 \text{ m}$$

Detta ger

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{0.15}{1000} - \frac{28^2}{62^2 \cdot 47.1^2 \cdot 2.20}}{1 - \frac{28^2 \cdot 15.2}{9.81 \cdot 47.1^3}} = 0.000109$$

eller 10.9 cm/km. Vattendjupet växer alltså med 10.9 cm per km. Vattenytans lutning mot horisontalplanet blir således

$$15 - 10.9 = 4.1 \text{ cm/km}$$

Svar: Vattenytans lutning är 4.1 cm/km.

Ex. 3.72. Beräkna specifika energien för ett avlopp, som har bottenbredden 1 m samt släntlutningen 1:1, om vattendjupet är 0.80 m och vattenföringen 1.80 m³/s!

Lösning: Specifika energien definieras av ekvationen (3.95)

$$E = x + \frac{v^2}{2g}$$

Vi beräkna A. Således

$$A = \frac{0.8}{2} (1+1+2 \cdot 0.8) = 0.8 \cdot 1.8 = 1.44 \text{ m}^2$$

Medelhastigheten blir

$$v = \frac{1.80}{1.44} = 1.25 \text{ m}$$

och således

$$E = 0.80 + \frac{1.25^2}{2g} = 0.88 \text{ m v.p.}$$

Svar: Specifika energien är 0.88 m v.p.

Ex. 3.73. 12.0 m³/s vatten framrinner i en 10 m bred rektangulär ränna vid ett vattendjup av 0.60 m. Är vattenrörelsen strömmande eller stråkande?

Lösning: Vattenmängden q per breddenhet = $\frac{12}{10} = 1.2 \text{ m}^3/\text{s}$

$$v = \frac{12.0}{10 \cdot 0.6} = 2.0 \text{ m/s}$$

$$v_c = \sqrt{g \cdot x_c} = \sqrt{9.81 \cdot 0.53} = 2.28 \text{ m/s}$$

Den rådande hastigheten är således mindre än v_c , varför rörelsen är strömmande.

Ex. 3.74. Vilken är den största mängd vatten, som per sekund kan passera en 5 m bred ränna, om specifika energien är 1.2 m v.p.

Lösning:

$$x_c = \frac{2}{3} E = \frac{2}{3} \cdot 1.2 = 0.8 \text{ m} \quad (\text{enl. ekv. 3.99})$$

$$q_{\max} = \sqrt{9.81 \cdot 0.8^3} = 7.09 \text{ m}^3/\text{s} \text{ och breddenhet}$$

Totala vattenföringen q_t beräknas härav till

$$q_t = 7.09 \cdot 5 = 35.45 \text{ m}^3/\text{s}$$

Svar: Maximala vattenföringen är 35.5 m³/s.

Ex. 3.75. Bevisa att för $q = \text{konst.}$ gäller sambandet

$$\frac{E}{x_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_c}{x} \right)^2 + \frac{x}{x_c}$$

där alla kvoter äro dimensionslösa.

Lösning: Enligt ekvation (3.96) gäller för en rektangulär sektion med bredden l och djupet x

$$E = x + \frac{q^2}{2gx^2} \quad (a)$$

Vidare gäller att

$$x_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (b)$$

Ekvationen (a) divideras led för led med ekv. (b).

Således

$$\frac{E}{x_c} = \frac{x}{x_c} + \frac{q^2}{2gx_c x^2} = \frac{x}{x_c} + \frac{1}{2} \frac{\frac{q^2}{g}}{x_c \cdot x^2}$$

eller slutligen, enär enligt (b) $x_c^3 = \frac{q^2}{g}$

$$\frac{E}{x_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_c}{x} \right)^2 + \frac{x}{x_c}$$

V.S.B.

Konstruera som ytterligare övning funktionskurvan med $\frac{E}{x_c}$ som ordinata och $\frac{x}{x_c}$ som abscissa!

45. Vattensprång.

I avdelning 432 undersöktes den närmare fysikaliska innebörden av ekvationen (3.94). Det visade sig härvid, att om $\frac{dx}{ds} > 0$ förelåg dämning och att om $\frac{dx}{ds} < 0$ förelåg sänkning. Härvid förutsattes, att nämnaren i ekvationens högra membrum var skild från 0. Vi diskuterade också helt kortfattat de kritiska förhållanden, som inträda, när nämnaren blir = 0 och $\frac{dx}{ds} = \pm \infty$. Tolkas uttrycket $\frac{dx}{ds} = \pm \infty$ matematiskt skulle det innebära, att vattenytans lutning mot botten är $\pm 90^\circ$, d.v.s. vattenströmmen reser sig lodrätt upp eller faller vertikalt. Det visar sig nu också, att en vattenström icke kan passera från stråkande rörelse till strömmande, utan att vattenytan plötsligt höjer sig eller att djupet växer diskontinuerligt. Vi skola senare visa, att detta är förbundet med värdet $\frac{dx}{ds} = +\infty$. Företeelsen kallas vattensprång. På figurerna 3.68, 3.69 och 3.70 visas några vanliga fall av vattensprång (schematiskt). Gemensamt för alla tre fallen är som synes, att vattendjupet från att vara $< h_c$ plötsligt växer till ett värde $> h_c$. Betydelsen av värdet $\frac{dx}{ds} = -\infty$ skola vi något närmare belysa i samband med några kommentarer till det förut behandlade s.k. breda överfallet (se avd. 3525!).

Vi vilja nu närmare studera, vad som sker i ett vattensprång, och försöka finna ett matematiskt uttryck på storleken av vattensprånget. Med hjälp av figur 3.71 skola vi undersöka energiomsättningen i vattensprånget, och med hjälp av figur 3.72 skola vi medelst en impulsbetraktelse härleda ett samband mellan h_1 och h_2 och därmed ett uttryck på vattenytans höjning h_2-h_1 .

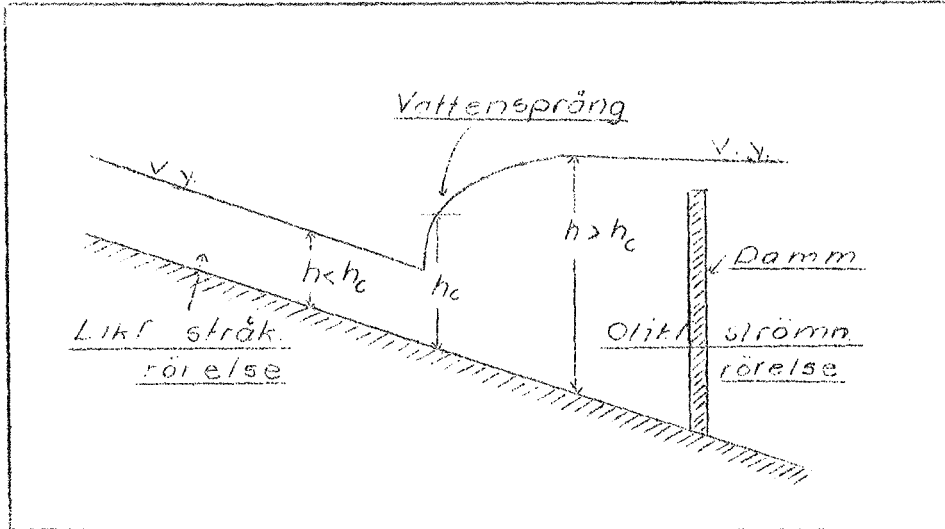


Fig. 3.68

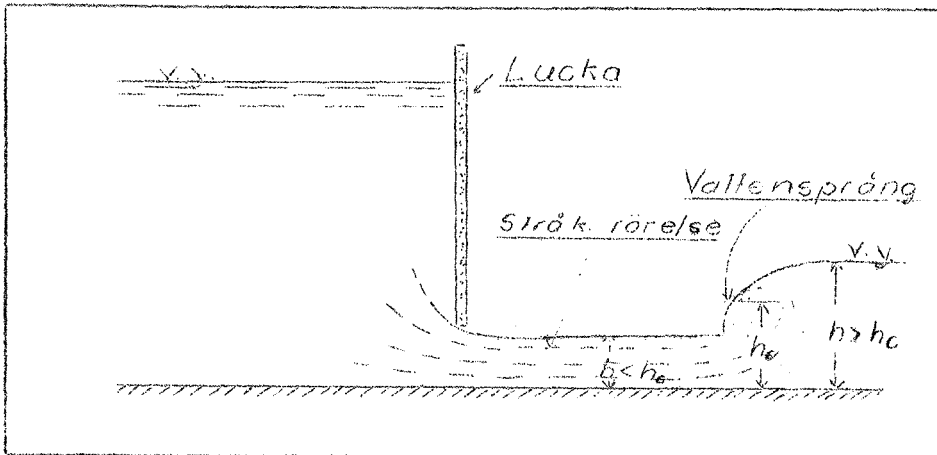


Fig. 3.69

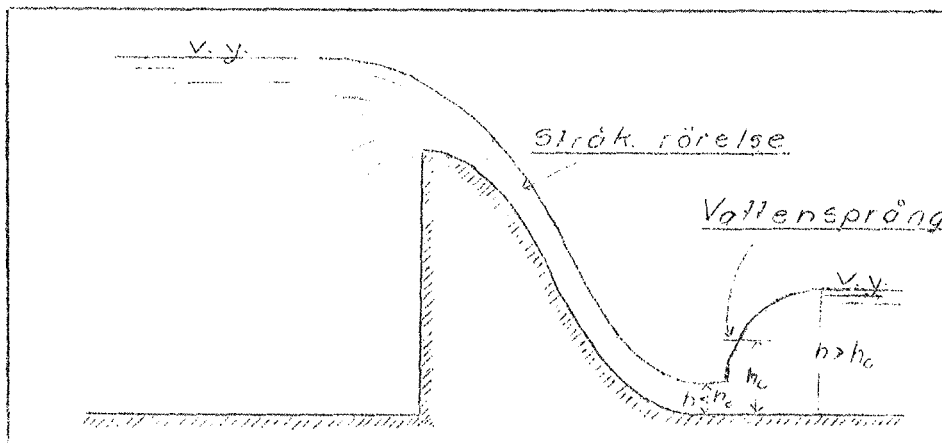


Fig. 3.70

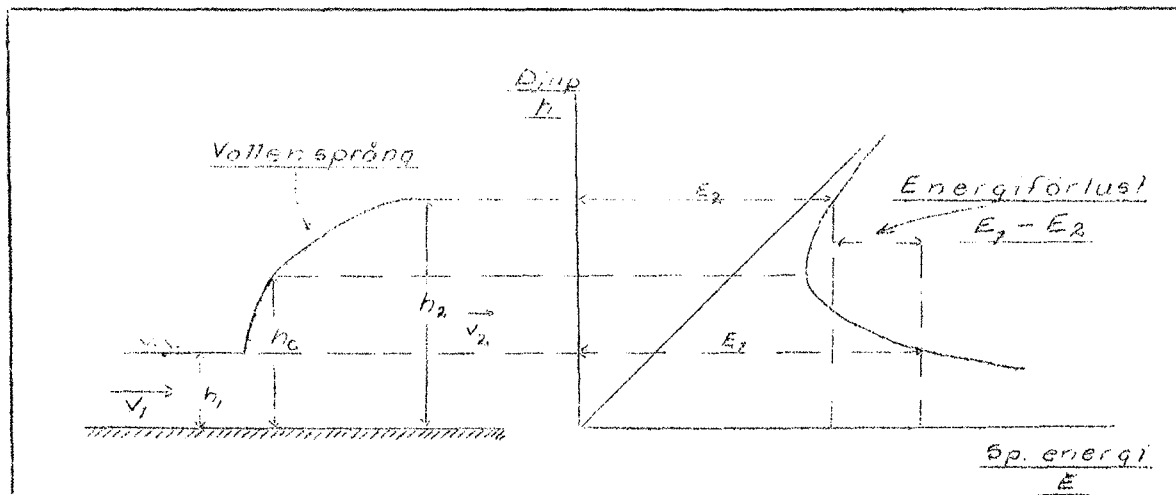


Fig. 3.71

Figur 3.71 visar schematiskt profilen av ett vattensprång med tillhörande diagram över specifika energien. Index 1 markerar förhållandena före vattensprånget och index 2 förhållandena efter. Före vattensprånget är rörelsen stråkande och $h < h_c$ samt specifika energien E_1 . Efter vattensprånget är vattendjupet $h > h_c$ och motsvarande specifika energi E_2 . Av energidiagrammet synes, att vattensprånget är förbundet med en energiförlust, vars storlek är $E_1 - E_2$. Denna energiförlust kan vara mycket stor under vissa förhållanden. Energiförlusten är knuten till den kraftiga virvelbildning, som försiggår i vattensprånget. Ofta utbildas en s.k. "vattenvals" ("vattenrulle"), i vars övre del vatten strömmar mot huvudriktningen under stark virvelbildning och skumning. I vattensprånget övergår vattenrörelsen från en mindre stabil rörelseform karakteriserad av hög hastighet, stort energiinnehåll och stor friktionsförlust till en mera stabil rörelseform med lägre hastighet, mindre energiinnehåll och mindre friktionsförlust.

De höga friktionsförlusterna vid den stråkande rörelsen innebär formelmässigt, att täljaren i uttrycket för $\frac{dx}{ds}$ är negativ, d.v.s.

$$I_1 = \frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} < 0$$

Friktionsförlusterna äro m.a.o. större än de medelst de Chezys formel beräknade. Samtidigt är också nämnaren negativ, ty $v > v_c = \sqrt{g h_c}$ $\frac{dx}{ds}$ är alltså positiv. Vattendjupet är växande och i själva vattensprånget, där det kritiska djupet passeras, blir $\frac{dx}{ds} = +\infty$.

Ett vattensprång kan också betraktas som en stående våg (standing wave), enär vattnets strömningshastighet ovanför vattensprånget är $\geq \sqrt{g h_c}$ och i en viss sektion av vattensprånget $= \sqrt{g h_c}$. Nu är en vandrande vattenvågs hastighet (för bevis hänvisas den intresserade till litteraturen) uttryckt genom

formeln

$$\omega = \sqrt{gh}$$

där ω = vågens fortplantningshastighet och h = vattendjupet. Våghastigheten sammanfaller alltså här med vattnets egen hastighet, varför inga impulser kunna vandra mot strömmen, vågen blir stående.

Ett samband mellan h_1 och h_2 kunna vi erhålla genom följande impulsberäkning. Betrakta figur 3.72! Hastighetsförändringen vid vattnets strömning

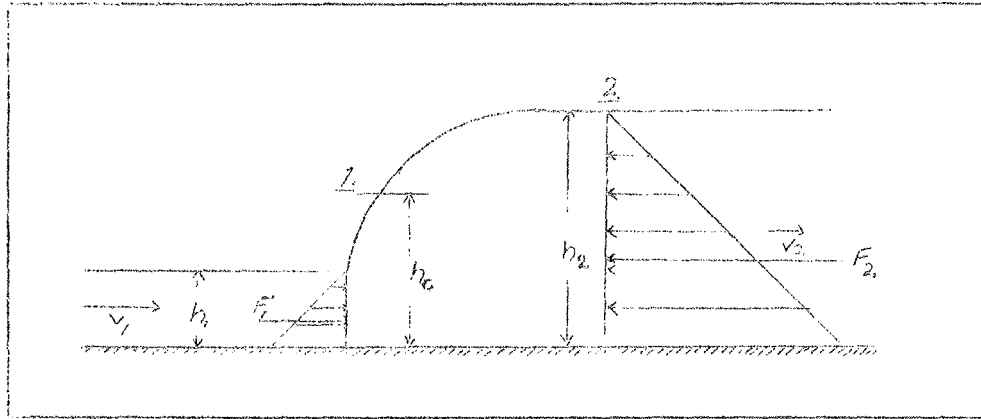


Fig. 3.72

från sektion 1. till sektion 2. är tydligen $v_2 - v_1$. Om vattenföringen per breddenhet av den rektangulära ledningen är q , så svarar mot denna hastighetsförändring rörelsemängden (per tidsenhet).

$$I = \frac{m}{g_0} (v_2 - v_1) = \frac{q}{g} (v_2 - v_1) \quad (a)$$

Om vi bortse från tangentiella krafter, så är den på vattenmassan mellan sektionerna 1. och 2. verkande kraften tydligen $= F_1 - F_2$ (i strömriktningen). F_1 och F_2 äro = de hydrostatiska tryckkrafterna på respektive sektionssytor A_1 och A_2 . Dessa krafters storlek beräknas enligt i hydrostatiken genomgånga regler till

$$F_1 = 1 \cdot l \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{2} \quad \text{och} \quad F_2 = 1 \cdot l \cdot h_2 \cdot \frac{h_2}{2} = \frac{h_2^2}{2} \quad (b)$$

Enligt mekaniken är nu impulsen per tidsenhet = rörelsemängdens förändring per tidsenhet ($F \cdot t = m \cdot \Delta v$). Således i detta fall

$$\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} = \frac{q}{g_0} (v_2 - v_1) \quad (c)$$

Kontinuitetsekvationen ger oss sambandet

$$v_1 \cdot x_1 = v_2 \cdot x_2 = q \quad (d)$$

vilket tillåter oss att skriva ekvationen (c) under formen

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = \frac{q^2}{g_0} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) \quad (e)$$

eller slutligen

$$\boxed{\frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{h_1 g_0} = \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{h_2 g_0}} \quad (3.101)$$

Om vattenföringen q och ett djup betraktas som givna, kan det andra djupet beräknas med hjälp av ekvationen (3.101). Denna kan också lösas med avseende på h_1 eller h_2 . Härvid erhålles

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{g_0 h_2^3}} \right) \quad (a)$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{g_0 h_1^3}} \right) \quad (b)$$

Energiförlusten W_f kan sedan beräknas med hjälp av uttrycket

$$\boxed{W_f = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right)} \quad (3.103)$$

Ex. 3.76. Härled ekvationerna (3.102)!

Lösning: Det ligger här närmast till hands att helt enkelt lösa ekvationen (3.101) med avseende på h_1 och h_2 , varvid det ena av **djupen** betraktas såsom bekant, när det andra löses ur ekvationen. Emellertid leder detta till lösandet av en tredjegrads ekvation. Genom att utgå från ekvationen (e) undviks detta enkelt.

$$\frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = \frac{q^2}{g_0} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) \quad (a)$$

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{2q^2}{g_0} \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} \quad (b)$$

Dividera båda membra med $h_1 - h_2$! Således

$$h_1 + h_2 = \frac{2q^2}{g_0 h_1 h_2}$$

h_1 betraktas som obekant och ekvationen hyfsas.

Då erhålles

$$h_1^2 + h_2 h_1 - \frac{2q^2}{g_0 h_2} = 0$$

som löst med avseende på h_1 ger

$$h_1 = -\frac{h_2}{2} (\pm) \sqrt{\frac{h_2^2}{4} + \frac{2q^2}{g_0 h_2}}$$

eller om $\frac{h_2}{2}$ brytes ut

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{g_c h_2^3}} \right)$$

På samma sätt förfäres med h_2 , om denna betraktas såsom obekant.

Ex. 3.77. I en rektangulär öppen ledning framrinner vatten. Vattendjupet är 0.90 m och medelhastigheten är 1.20 m. Kan ett vattensprång utbildas i ledningen?

Lösning: Villkoret för att ett vattensprång skall kunna utbildas är, att vattenrörelsen är stråkande. Och härför erfordras att $v > v_c = \sqrt{g \cdot h_c}$. Vi beräkna v_c . Enligt avdelning 441 är

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

och således

$$v_c = \sqrt{g \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}} = \sqrt[3]{q \cdot g} = \sqrt[3]{0.9 \cdot 1.2 \cdot 9.81} = \sqrt[3]{10.59} = 2.20$$

Den aktuella hastigheten ligger sålunda långt under den kritiska, varför intet vattensprång kan utbildas.

Ann.: Enklast erhålles svaret genom att Froudes tal beräknas för strömmingen ifråga. Således

$$F = \frac{1.2}{\sqrt{9.81 \cdot 0.9}} < 1 \quad (\text{jfr slutet av avd. 441!})$$

Rörelsen är sålunda strömmande, och intet vattensprång kan utbildas.

Ex. 3.78. Vattenföringen i en rektangulär kanal är $11.33 \text{ m}^3/\text{s}$. Bestäm det djup h_1 , som kan underhålla ett vattensprång med djupet $h_2 = 1.22 \text{ m}$ efter vattensprånget! Kanalens bredd är 6.10 m. Beräkna även den procentuella energiförlusten!

Lösning: Vi tillämpa formeln (3.102 a)

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{g \cdot h_2^3}} \right)$$

där $q = \frac{11.33}{6.10} = 1.856 \text{ m}^3$. Således

$$h_1 = \frac{1.22}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot 1.856^2}{9.81 \cdot 1.22^3}} \right) = 0.36$$

Den procentuella energiförlusten kunna vi med ekvationens (3.103) hjälp beräkna till

$$\frac{0.36 + \frac{(\frac{1.856}{0.36})^2}{2 \cdot 9.81} - 1.22 + \frac{(\frac{1.856}{1.22})^2}{2 \cdot 9.81}}{0.36 + \frac{(\frac{1.856}{0.36})^2}{2 \cdot 9.81}} \cdot 100 = 22.2 \%$$

Svar: Det erforderliga djupet är 0.36 m. Energiförlusten blir 22 %.

46. Några kommentarer till formeln för avrinningen över ett brett överfall. Bestämmande sektion.

I föregående avdelning studerade vi de fenomen, som äro förbundna med att en vattenrörelse övergår från stråkande till strömmande (vattensprång). Vi kunde bl.a. visa, att diskontinuiteten åt positiva oändligheten i formeln för $\frac{dx}{ds}$ kunde tolkas såsom det i differentialekvationen för olikformig strömning inneslutna matematiska uttrycket för vattensprångets uppträdande. Låt oss nu även något närmare undersöka innebörden av diskontinuiteten

$$\frac{dx}{ds} = -\infty$$

Detta kunna vi göra i anslutning till det tidigare diskuterade "breda överfallet". På figur 3.73 finnes schematiskt uppritat ett brett överfall med tillhörande specifika energidiagram. Vi kunna tänka oss den nedre vattenytan rörlig, och vi undersöka nu, vad som inträffar, när denna från att ha befunnit sig i jämnhöjd med den övre vattenytan successivt sänkes. Befinna sig båda vattenytorna lika högt, sker ingen strömning. Tänka vi oss nu den nedre vattenytan sjunka, så börjar vatten strömma över överfallet. Strömningen sker på bekostnad av den potentiella energien (den specifika energien), som delvis omvandlas till rörelseenergi, delvis går förlorad i form av friktionsförluster vid strömningen. Vattendjupet avtar längs överfallet samtidigt som specifika energien minskar i sektionerna. Allteftersom vi nu tänka oss den nedre vattenytan sänkas, blir vattenytan över överfallet allt brantare. Vattendjupet över överfallet i sektionen a kan dock icke sjunka under h_c , ty vid detta värde är, såsom tidigare visats, specifika energien i minimum och vattenföringen maximal. Sedan detta värde uppnåtts, är avrinningen oberoende av den nedre vattenytans läge.

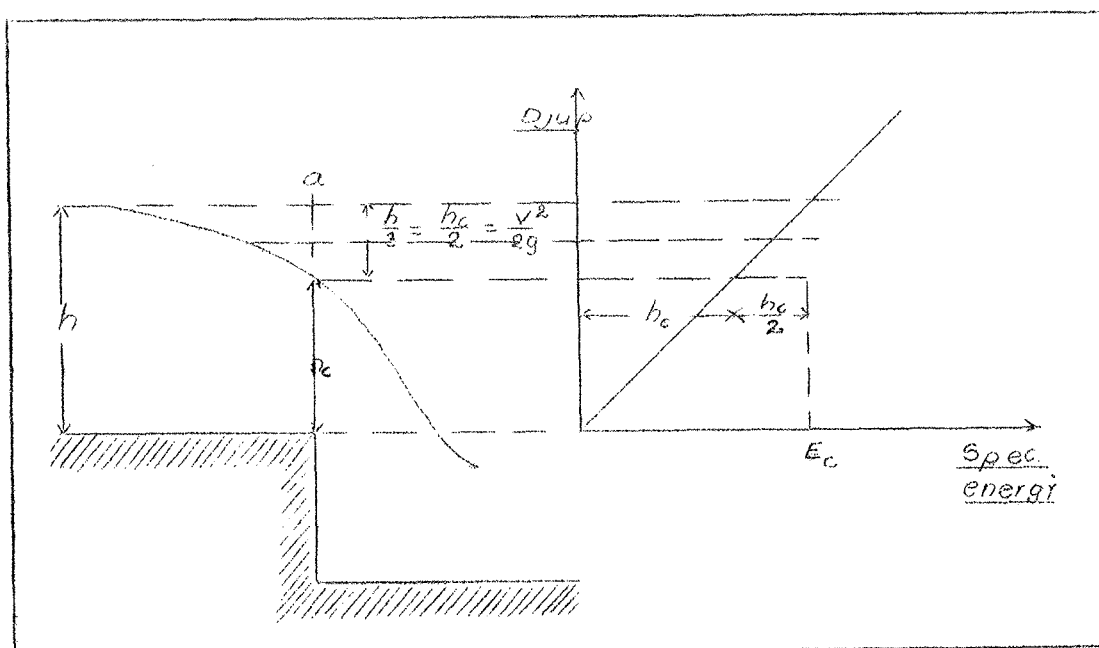


Fig. 3.73

Skulle vattendjupet sjunka under det kritiska värdet, bleve specifika energien större i sektionen a och följaktligen skulle mindre energi stå till förfogande för att hålla strömningen i gång. Ett sådant fortfarighetstillstånd vore endast tänkbart, om energi på något sätt tillfördes utifrån. När kritiska djupet h_c uppnåtts har $1/3$ av den ursprungliga specifika energien omvandlats i rörelseenergi, såsom framgår av ekvationen (3.97)

$$E_c = x_c + \frac{x_c}{2} = \frac{3}{2} x_c$$

$\frac{x_c}{2}$ representerar ju i detta uttryck rörelseenergien (se härledningen!). Sedan den undre vattenytan sänkts så mycket, att den ligger $\frac{h}{3}$ under den övre vattenytan, inträffar sålunda maximal vattenföring. h betecknar den övre vattenytans höjd över överfallet (se figur 3.73!). Dessa resultat stå i överensstämmelse med tidigare i avdelning 3525 erhållna.

Ovan påpekades, att vattendjupet över överfallet är avtagande i strömriktningen. Detta innebär, att $\frac{dx}{ds}$ är negativ och att, när kritiska djupet h_c passeras, dess värde blir $-\infty$. Vi finna sålunda, att $\frac{dx}{ds} = -\infty$ är förbundet med en vattenrörelses övergång från strömmande till stråkande.

Den sektion, där vattenrörelsen i ett vattendrag övergår från strömmande till stråkande, d.v.s. där vattenytan genomskär det kritiska djupet, kallas en bestämmande sektion. Uppkomsten av en bestämmande sektion sammanhänger alltid med någon diskontinuitet i vattendragets tvärsektion, lutning eller möjligen dess skrovlighetsgrad.

47. Några praktiska metoder och formler för beräkning av olikformig strömning.

Den olikformiga strömningen visar sig vid ett närmare teoretiskt studium vara synnerligen komplicerad och matematiskt svårberäkningsbar. Det faller utom ramen för detta kompendium att gå vidare in på de i de föregående avdelningarna behandlade problemen. De ha medtagits för att ge en viss bakgrund till de praktiska beräkningar, som i olika sammanhang kunna vara nödvändiga. Ur praktisk synpunkt kunna vi behandla den olikformiga rörelsen under följande rubriker: 471. olikformig strömning i vattendrag med varierande tvärprofil och 472. olikformig strömning i kanal med regelbunden tvärprofil. I detta senare fall kan djupet då antingen vara kontinuerligt växande, dämning (4721) eller kontinuerligt avtagande, sänkning (4722).

471. Olikformig strömning i vattendrag med varierande tvärprofil.

Ekvationen

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (a)$$

kunna vi tydligen enligt i avdelning 43 gjorda utredningar skriva

$$- \frac{q^2}{C^2 A^2 R_h} = -I + \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (b)$$

där I betecknar vattenytans lutning mot horisontalplanet. Denna lutning måste vara lika med bottenlutningen $(-\frac{dz}{ds})$ + vattenytans lutning mot botten $(-\frac{dx}{ds})$. Således

$$I = \left(\frac{dz}{ds} + \frac{dx}{ds} \right) \quad (c)$$

Om vi nu betraktar tvänne sektioner 1. och 2. på avståndet $\Delta \bar{l} \approx \Delta s$ från varandra, så kunna vi låta ekvationen (b) med viss approximation gälla för sträckan $\Delta \bar{l}$ i stället för en bestämd sektion, där den under antagna förutsättningar är strängt giltig. I formeln införa vi då medelvärden för de hydrauliska parametrarna för sträckan ifråga. Detta utmärkes på följande sätt med index: istället för q skriva vi $q_{1,2}$, i stället för C skriva vi $C_{1,2}$ o.s.v. Multiplicera vi ekvationen med $\Delta \bar{l}$, kunna vi sålunda skriva

$$\Delta h_{f_{1,2}} = I_{1,2} \Delta \bar{l} = \frac{q_{1,2}^2}{C_{1,2}^2 A_{1,2}^2 R_{h_{1,2}}} \Delta \bar{l} - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \quad (3.104)$$

Denna ekvation kunna vi också skriva, om vi beakta att

$$v_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{A_{1,2}}$$

Under formen

$$\Delta h_{f_{1,2}} = \frac{v_{1,2}^2}{C_{1,2}^2 R_{h_{1,2}}} \Delta \bar{l} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad (3.105)$$

Denna ekvation kan betraktas såsom den för praktiska beräkningar lämpade formen av vår differentialekvation för olikformig strömning (ekv. 3.93). Ekvationen utsäger, att förlusthöjden på sträckan $\Delta \bar{l}$ är lika med friktionsförlusten plus ändringen i rörelseenergi. Förändringen i rörelseenergi är tydligen positiv, då hastigheten ökar (sänkning) och negativ, då hastigheten minskar (dämning). Detta innebär att vid avtagande hastighet skulle en "vinst" uppkomma; $\Delta h_{f_{1,2}}$ skulle vara mindre än friktionsförlusten på sträckan $\Delta \bar{l}$. Erfarenheten $\Delta h_{f_{1,2}}$ visar emellertid, att så ej är fallet utan att den frigjorda rörelseenergien förbrukas i ökad virvelbildning (turbulens). Vid dämning kunna vi därför sätta

$$\frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{2g} = 0 \quad (a)$$

Detta förenklar i hög grad beräkningarna vid dämning. Är uttrycket (a) däremot positivt kan det ej försummas. I detta fall måste den ökade rörelseenergien med nödvändighet tagas från vätskans potentiella energi, vilket endast är möjligt, om vattendjupet avtar.

Formeln (3.105) förutsätter givetvis, att man valt $\Delta \bar{l}$ så, att vattendjupet entydigt växer eller avtar inom sträckan. Vidare bör skillnaden mellan A_1 och A_2 ej vara större än att för beräkning av friktionsförlusten strömningen kan med tillräckligt god approximation antas vara likformig mellan sektionerna med medelhastigheten

$$v_{i+1,i} = \frac{v_{i+1} + v_i}{2}$$

Beräkningen av h_f för en sträcka \bar{l} med hjälp av formel (3.105) sker på följande sätt:

Man uppdelar sträckan \bar{l} i lämpliga delsträckor $\Delta \bar{l}$ under aktgivande på ovan sagda. I en sektion 1. känner man alla hydrauliska storheter bl.a. q , F_1 , v_1 , R_{h_1} , C_1 och man vill beräkna vattenståndet i en sektion 2., som ligger på avståndet $\Delta \bar{l}$, från sektionen 1. i strömmens riktning. Man antar på försök en viss höjd på vattenytan i sektion 2. och beräknar F_2 , v_2 , R_{h_2} och C_2 . För att detta skall vara möjligt fordras i allmänhet vissa uppmätningssarbeten, såvida ej sektionsformen är konstant.

Med hjälp av dessa värden kan man sedan beräkna

$$v_{1,2} = \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad C_{1,2} = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad \text{o.s.v.}$$

De beräknade medelvärdena insätts i formel (3.105). Om det härvid visar sig, att Δh_f är lika med den antagna höjdskillnaden mellan vattenytorna i sektionerna^{1,2} 1. och 2., är den beräknade höjden riktig. I motsatt fall måste beräkningarna upprepas, tills önskad överensstämmelse uppnåtts. Dessa passningsberäkningar bli ofta tidsödande och besvärliga. Något numeriskt exempel medtages ej, utan härför hänvisas till litteraturen och till analoga men enklare exempel under dämning och sänkning!

472. Olikformig strömning i kanal med regelbunden tvärprofil.

Ett par viktiga specialfall av olikformig strömning är dämning och sänkning. I det förra fallet växer vattendjupet kontinuerligt i strömriktningen och vattenytans längdsektion bildar en dämningsskurva; i det senare fallet avtar vattendjupet kontinuerligt i strömriktningen och vattenytans längdsektion bildar en sänkningskurva. Beräkningar av dämningss- och sänkningskurvor äga i vissa fall speciellt intresse för jordbruket, då det gäller att avgöra, huru ett ingrepp (anläggandet av en damm, sektionsförändring etc.) kommer att inverka på torrlägningsförhållandena uppströms företaget. De i föregående avdelning skisserade beräkningarna äro även användbara för beräkning av dämningss- och sänkningskurvor. Emellertid kunna här betydande förenklingar ofta göras, då man räknar med konstant bottenbredd, släntlutning, bottenlutning och skrovlighetskonstant. Våra beräkningar och härledningar begränsas till dessa praktiskt viktiga fall. Detta möjliggör också en integrering av vår allmänna differentialekvation för olikformig strömning. Med hjälp av dessa integrerade uttryck kunna tabeller upprättas, varigenom räkningarna ytterligare underlättas och göras snabbare. Vid noggrannare beräkningar är dock passning medelst formeln (3.105) den enda möjliga.

4721. Dämning och dämningsskurvor. Dämningar och dämningsskurvor kunna uppkomma av olika anledningar. I figur 3.74 visas några vanliga fall. I 3.74 a beror dämningen av att kanalens lutning minskar vid oförändrad sektion och vattenmängd. I exempel 3.74 b beror dämningen av att vid oförändrad ledningssektion och lutning vattenmängden ökar på grund av tillflöde och i c slutligen dämnes vattenytan upp i kanalen av en sjöyta, som ligger högre än vad som svarar mot likformig strömning i kanalen. I fortsättningen betecknas det variabla

djupet med x , det djup som svarar mot likformig strömning, det normala djupet med h_n och uppdämningen $x-h_n$ med u . Sektionerna indiceras från dämningpunkten och uppströms.

Det är tydligt att vattendjupet är störst omedelbart intill den dämmande sektionen (sektion o). Vattendjupet avtar sedan kontinuerligt uppströms sektionen 0.

Detta innebär också, att våta arean avtar och att hastigheten växer. Som följd härav ökar vattenytans lutning successivt för att vid $\bar{I} = \infty$ asymptotiskt ansluta sig till den odämda vattenytan. Dämningskurvan är konkav uppåt. Praktiskt brukar man dock anse, att dämningen upphör i den sektion, där dämningen u endast utgör 1 % av det normala vattendjupet h_n . Avståndet mellan denna sektion och sektionen 0 kallas praktiska hydrodynamiska dämningensvidden \bar{I}_d .

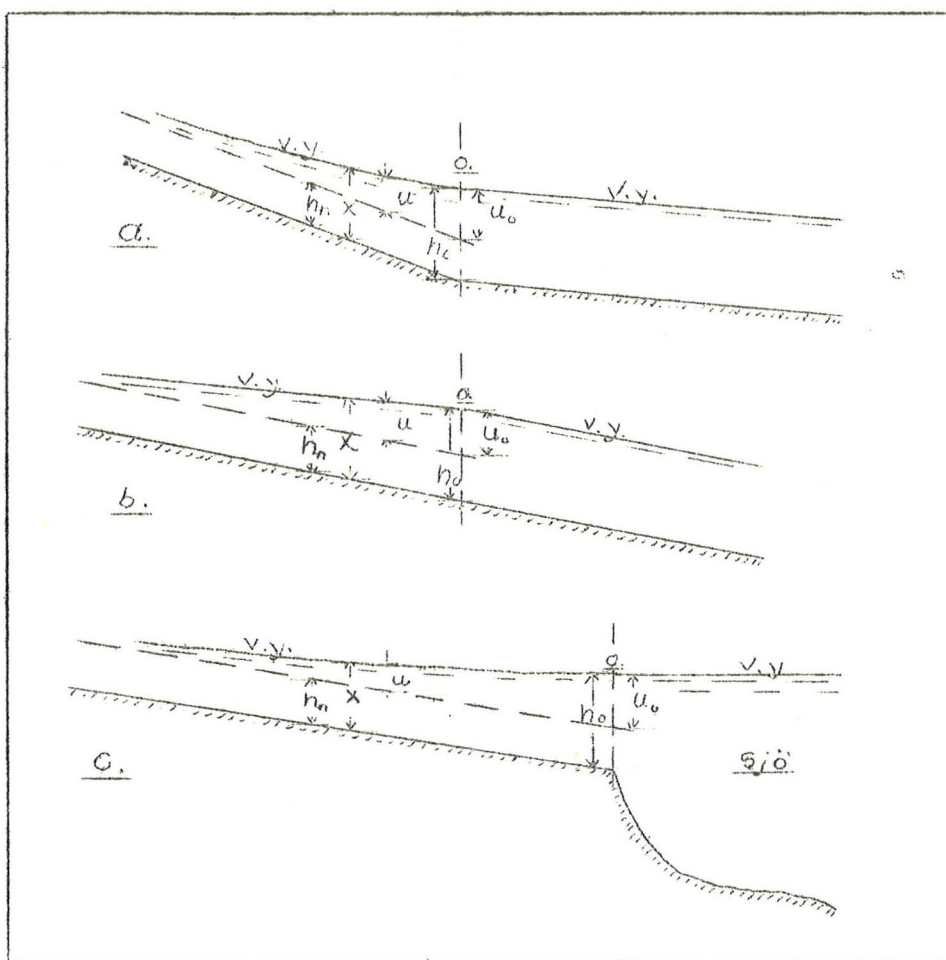


Fig. 3.74

Enär hastigheten avtar i strömriktningen, kunna vi i ekvationen (3.105) försumma den sista termen vid passningsberäkningar av dämningskurvan. Således

$$\Delta h_{f_{1,2}} = \frac{v_{1,2}^2}{C_{1,2}^2 R_{h_{1,2}}} \Delta \bar{I} \quad (3.106)$$

eller

$$h = \sum_{i=0}^n \Delta h_{f_{i+1,i}} = \sum_{i=0}^n \frac{v_{i+1,i}^2}{C_{i,i+1}^2 R_{h_{i+1,i}}} \quad (3.107)$$

Vid passningsberäkningar av dänningskurvan kan \bar{I} t.ex. sättas konstant = 100 m eller 50 m. Observera att ekvationen (3.106) helt enkelt är de Chezys ekvation skriven på annat sätt och med medelvärden för en viss sträcka insatta istället för värden för en bestämd sektion! Bevisa detta!

Även under de förenklade antaganden, som här gjorts beträffande ledningens form blir passningsberäkningarna relativt arbetssamma. De komma därför endast i undantagsfall till utförande, då noggrannare resultat önskas. Såsom redan tidigare påpekats kan under vissa antaganden om ledningssektionens form ekvationen (3.94) integreras. Flera sådana integrationer finnas utförda under olika antaganden om ledningssektionens form och om tillåtliga approximationer. Till på denna väg erhållna uttryck höra bland andra Rühlmanns, Tolkmitts, Schaffernaks, Bubenbeys formler för dännings- och sänkningskurvor. Det skulle föra för långt att här upptaga dessa mer eller mindre invecklade uttryck till närmare behandling. Såsom ett exempel på en teoretisk erhållen funktion för beräkning av dänningskurvor anföres Tolkmitts formel

$$\bar{I} = \frac{h}{I_1} \left[F\left(\frac{h}{h_n}\right) - F\left(\frac{x}{h_n}\right) \right] \quad (3.108)$$

där $F\left(\frac{x}{h_n}\right)$ symboliserar en funktion innehållande uttryck av naturliga logaritmen och arc tg med det variabla djupet x som oberoende variabel.

Formeln (3.108) har härletts av Tolkmitt under förutsättning av att tvärsnittet är paraboliskt och att dagbredden kan approximativt sättas = våta omkretsen p . Många naturliga vattendrag tendera att utforma ett parabelformat tvärsnitt. Grävda kanaler med trapetsformat tvärsnitt kunna också approximeras till en parabel. Se figur 3.75! I formeln (3.108) ha de ingående storheterna

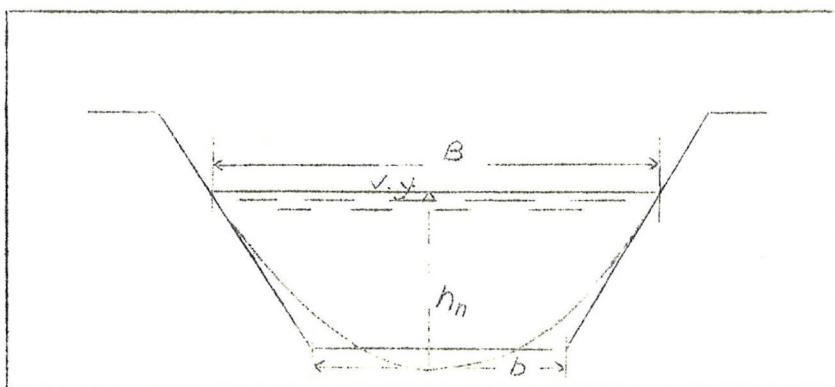


Fig. 3.75

de i detta kompendium vedertagna betydelserna. Det är dock att observera, att h_n betyder det normala vattendjupet i den till kanalen eller vattendraget anpassade parabeln. Parabeln anpassas så, att dagbredden B (se figur 3.75!)

blir densamma, medan djupet bestäms av villkoret, att parabelns yta skall vara lika med den givna sektionens yta. För beräkning av h_n erhålles härur den lätt deducerade formeln

$$h_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{A}{B} = \frac{3h(B+b)}{4B} \quad (3.110)$$

där h_n är det normala vattendjupet i kanalen.

För att underlätta den praktiska användningen av Tolkmitts formel finnas tabeller upprättade över funktionen $F(\frac{x}{h})$. Tabell V i slutet av kompendiet återger ett antal sammanhörande värden n på $\frac{x}{h}$ och $F(\frac{x}{h})$.

För uppskattning av den praktiska hydrodynamiska dämpningsvidden \bar{l}_d anger Tolkmitt formeln

$$\bar{l}_d = \frac{h_o}{I_1} = \frac{h_n + u_o}{I_1} \quad (3.109)$$

En tredje metod att bestämma dämpningskurvor är att approximera den dämnda vattenytan till en parabel (uppdämpningskurva enligt Poirée). Metoden är enkel och ger i många fall förvånansvärt goda värden. Vi behandla metoden genom att formulera och lösa ett exempel.

Ex. 3.79. Vattenytan i en regelbunden kanal med bottenlutningen $I_1 (= \text{tg}\alpha)$ uppdämnes i en punkt. Uppdämningens storlek är u_o . Härled ett uttryck för uppdämpningskurvans form under antagande av att den kan approximeras till ena grenen av en parabel! Över uppdämpningspunkten antages den uppdämnda vattenytans lutning bli $I_o (= \text{tg}\beta)$. Vid uppdämningens övre ända antas den uppdämnda vattenytan tangera den odämnda.

Lösning: Vi antaga parabelns ekvation vara

$$y = a + bx + cx^2$$

med koordinatsystemets origo förlagt i skärningen mellan den odämnda vattenytan och den dämpande sektionen. Se för övrigt figur 3.76!

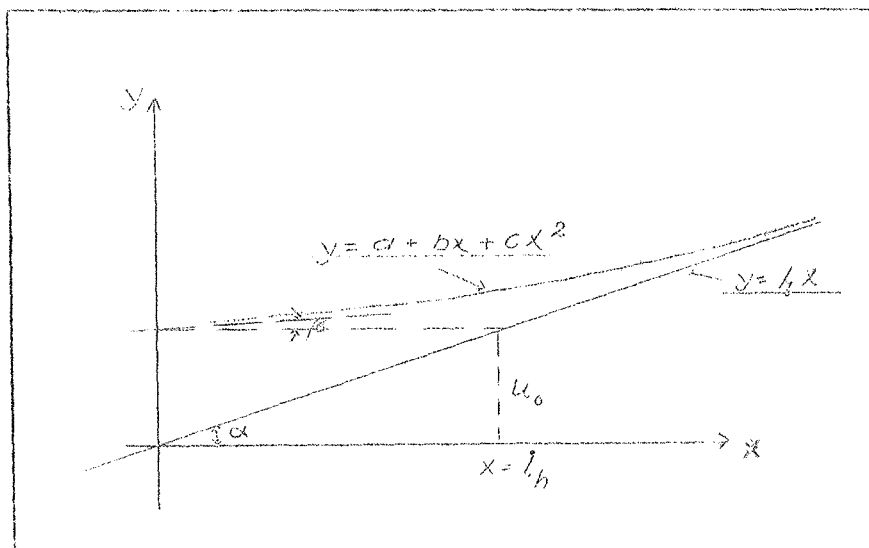


Fig. 3.76

Vår uppgift är att bestämma konstanterna a, b och c, så att de i problem givna förutsättningarna uppfyllas.

- 1. För $x = 0$ erhålles $y = u_0 = a$
- 2. Deriveras ekvationen erhålles

$$y' = b+2cx$$

varav för $x = 0$ $y' = I_0$ (enligt förutsättningarna).

3. Bestämning av tangeringspunkten med förutvarande vattenytan. Här gäller $y' = I_1$. Således om x_1 är tangeringspunktens abscissa

$$I_0+2cx_1 = I_1 \tag{a}$$

Ordinatorna skola dessutom vara lika för den dämnda och odämnda ytans ekvation (se fig.!). Alltså

$$I_1x_1 = u_0+I_0x_1+cx_1^2 \tag{b}$$

Elimineras x_1 ur dessa ekvationer erhålles

$$c = \frac{(I_1-I_0)^2}{4u_0}$$

Dämmningskurvans ekvation approximerad till en parabel blir alltså

$$y = u_0+I_0x + \frac{(I_1-I_0)^2}{4u_0} x^2 \tag{3.111}$$

Uppdämningens storlek u i en godtycklig punkt blir = differensen mellan den dämnda och odämnda vattenytans y-värden. Således

$$u = u_0+(I_0-I_1)x + \frac{(I_0-I_1)^2}{4u_0} x^2$$

eller

$$u = u_0 \left(1 + \frac{I_0-I_1}{2u_0} x\right)^2 \tag{3.112}$$

Uppdämningens längd erhålles ur ekvationen (3.112), om u sättes = 0. Då erhålles

$$0 = 1 + \frac{I_0-I_1}{2u_0} x$$

eller

$$x = \frac{2u_0}{I_1-I_0} \tag{3.113}$$

Specialfall: Om uppdämningens lutning över uppdämningpunkten antages vara = 0 eller $I_0 = 0$, förenklas ovanstående uttryck. Uppdämningens ekvation blir

$$y = u_0 + \frac{I_1^2}{4u_0} x^2 \tag{3.111^1}$$

Uppdämningen blir

$$u = u_0 \left(1 - \frac{I_1}{2u_0} x\right)^2 \quad (3.112')$$

Och slutligen blir dämningensvidden

$$x = \frac{2u_0}{I_1} \quad (3.113')$$

Anm.: Tänktes ett horisontalplan lagt i den dämnda ytan vid sektionen o, skär detta plan den odämnda ytan i en punkt ovanför 0-sektionen. Avståndet \bar{I}_h till denna punkt kallas hydrostatiska dämningensvidden. Av figuren 3.75 framgår, att avståndet är

$$\bar{I}_h = \frac{u_0}{I_1} \quad (3.114)$$

Jämföres detta värde med det ovan för parabeln erhållna (vid $I_0 = 0$), kunna vi formulera regeln: vid parabelapproximation (verticextangentens lutning = 0) av uppdämningsskurvan är den erhållna dämningensvidden = dubbla den hydrostatiska dämningensvidden.

Vid passningsberäkningar av dämningsskurvas förlopp kan det ofta underlätta räkningarna, att först göra beräkningarna med någon av formlerna (3.108), (3.110) eller (3.110') och sedan medelst passning förbättra de funna värdena.

Ex. 3.80. En kanal med trapetsformat tvärsnitt utmynnar i en sjö. Vid högvatten dämnes kanalens vattenyta upp av sjöns vattenyta. Uppdämningen är vid utloppet i sjön 0.5 m. Kanalens dimensioner äro: bottenbredden 0.5 m, släntlutningen 1:2. Bottenlutningen är 1.5:1000. Vid likformig strömning är vattendjupet i kanalen vid högvatten 1.0 m. Konstanten C i Mannings formel kan sättas = 30. Beräkna enligt passningsmetoden vattendjupet och vattenytans höjdläge i kanalen över ett 0-plan, som ligger i kanalens botten vid utloppet. Höjdläget anges för 100 och 200 m! Skatta även dämningsskurvas förlopp medelst en lämpligt approximerad parabel!

Lösning: Följande allmänna formler behövas (se även figur 3.77!). Släntlutning 1:n

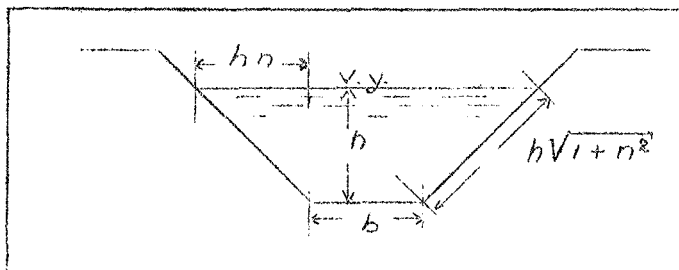


Fig. 3.77

$$q = A \cdot C \cdot R_h^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Mannings formel})$$

$$A = h(b+h \cdot n)$$

$$p = b + 2h \sqrt{1+n^2}$$

$$R_h = \frac{A}{p}$$

$$\Delta h_{f_{i+1,i}} = \frac{v_{i+1,i}^2}{C_{i+1,i}^2 R_{i+1,i}} \Delta \bar{I} \quad (3.106)$$

a. Ur uppgiften om vattendjupet beräknas q .

$$A = 1(0.5+2 \cdot 1) = 2.50; \quad p = 0.5+2\sqrt{1+4} = 4.972;$$

$$R_h = \frac{2.500}{4.972} = 0.5028; \quad q = 2.50 \cdot 30 \cdot 0.5028^{\frac{2}{3}} \cdot 0.0015^{\frac{1}{2}}$$

$$q = 0.75 \cdot 3.873 \cdot 0.6324 = 1.837 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\underline{q = 1.837 \text{ m}^3/\text{s}}$$

b. Det är lämpligt att först skatta med en parabel, vars vertextangent är = 0. Parabelns ekvation blir (formel 3.111'). Obs! origo i skärningen mellan 0-sektion och botten.

$$y = 1.5 + \frac{0.0015^2}{2} x^2$$

Med hjälp av denna erhålles lätt följande data

<u>Avstånd x</u>	<u>Bottens höjdläge</u>	<u>Vattendjup</u>	<u>Vattenytans höjdläge</u>
0	0	1.500	1.500
100	0.150	1.361	1.511
200	0.300	1.245	1.545

c. Passningsberäkning av delsträcka 1, 0-100.

$$\Delta \bar{I} = 100; \quad h_0 = 1.500; \quad \text{Enligt b sättes } h_1 = 1.36.$$

Således

$$h_{1,0} = 1.43; \quad F_{1,0} = 1.43(0.5+2 \cdot 1.43) = 4.805$$

$$p_{1,0} = 0.5+2\sqrt{2.045+8.180} = 0.5+2 \cdot 3.21 = 6.92$$

$$R_{1,0} = \frac{4.805}{6.92} = 0.6943; \quad v_{1,0} = \frac{1.837}{4.805} = 0.383$$

$$C_{1,0} = 30 \sqrt[6]{0.70} = 30 \cdot 0.943 = 28.29$$

$$I_{1,0} = \frac{0.383^2}{29.3^2 \cdot 0.6943} = 0.00025$$

$$\Delta h_{f_{1,0}} = 0.025$$

Med hjälp av detta värde kunna vi beräkna en ny parabelapproximation. Vertextangentens lutning kunna vi sätta till $0.025:100 = 0.00025$. Ekvationen blir då (formel 3.111)

$$y = 1.5 + 0.00025x + \frac{0.00125^2}{2} x^2$$

Denna ekvation möjliggör nedanstående översikt

<u>Avstånd x</u>	<u>Bottens höjdläge</u>	<u>Vatten- djup</u>	<u>Vattenytans höjdläge</u>
0	0	1.500	1.500
100	0.150	1.383	1.533
200	0.300	1.281	1.581

d. Ny passningsberäkning av delsträcka 1, 0-100.

$$\text{Med } h_1 = 1.500 + 0.025 - 0.150 = 1.375 \approx \frac{1.361 + 1.383}{2}.$$

Således

$$\Delta \bar{l} = 100; \quad h_0 = 1.500; \quad h_1 = 1.375; \quad h_{1,0} = 1.438;$$

$$A_{1,0} = 1.438(0.5 + 2 \cdot 1.438) = 4.855;$$

$$P_{1,0} = 0.5 + 2\sqrt{1.438^2 + 4 \cdot 1.438^2} = 6.931; \quad R_{1,0} = \frac{4.855}{6.931} = 0.7005$$

$$v_{1,0} = \frac{1.837}{4.855} = 0.3784; \quad c_{1,0} = 30 \sqrt[6]{0.7005} = 28.29$$

$$I_{1,0} = \frac{\frac{0.3784^2}{28.29^2 \cdot 0.7005}}{28.29^2 \cdot 0.7005} = 0.000257; \quad \Delta h_{f_{1,2}} = 0.0257$$

Djupet blir $1.500 + 0.0257 - 0.1500 = 1.3757$

$$\text{Differensen } 1.3757 - 1.3750 = 0.0007$$

Vidare passning således ej nödvändig.

e. Passningsberäkning av delsträcka 2, 100-200.

$$\Delta \bar{l} = 100; \quad h_1 = 1.376; \quad h_2 = \frac{1.281 + 1.245}{2} = 1.263; \quad h_{1,2} = 1.320$$

$$A_{1,2} = 1.320(0.5 + 2 \cdot 1.320) = 4.145$$

$$P_{1,2} = 0.5 + 2.640 \sqrt{5} = 6.403; \quad R_{h_{1,2}} = \frac{4.145}{6.403} = 0.6475$$

$$c_{1,2} = 30 \sqrt[6]{0.6475} = 30 \cdot 0.9303 = 27.909; \quad v_{1,2} = \frac{1.837}{4.145} = 0.4432$$

$$I_{1,2} = \frac{\frac{0.4432^2}{27.91^2 \cdot 0.6475}}{27.91^2 \cdot 0.6475} = 0.000390; \quad \Delta h_{f_{1,2}} = 0.0390$$

Djupet blir $1.5257 + 0.0390 - 0.3000 = 1.2647$

Differensen mellan funnet och antaget djup blir

$$1.2647 - 1.2630 = 0.0017 \quad (1.7 \text{ mm})$$

Vidare passning ej nödvändig!

De här för delsträckorna 0-100 och 100-200 genomförda beräkningarna kunna naturligtvis fortsättas uppefter kanalen, sträcka för sträcka, tills den dämnda vattenytan med tillräcklig noggrannhet ansluter till den ursprungliga, odämnda vattenytan (genomföres på övningarna!)

Ex. 3.81. Beräkna de i exempel 3.80 sökta dämningarna med hjälp av Tolkmitts formel (3.108)!

Lösning: Formeln lyder

$$\bar{l} = \frac{h_n}{I_1} \left[F\left(\frac{h_0}{h_n}\right) - F\left(\frac{x}{h_n}\right) \right]$$

Det mot parabelformat tvärsnitt svarande normala djupet h_n beräknas

$$h_n = \frac{3 \cdot 1 \cdot (4.5 + 0.5)}{4 \cdot 4.5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4.5} = \frac{1}{1.2} = 0.833$$

Givna värden insätts i formeln. Således

$$\bar{l} = \frac{0.833}{0.0015} \left[F\left(\frac{1.500}{0.833}\right) - F\left(\frac{x}{0.833}\right) \right]$$

a. 100 m från dämningen

$$\frac{0.15}{0.833} = F(1.80) - F\left(\frac{x}{0.833}\right)$$

$$F\left(\frac{x}{0.833}\right) = 1.740 - 0.180 = 1.560$$

$$\frac{x}{0.833} = 1.64; \quad x = 1.37$$

b. 200 m från dämningen

$$\frac{0.30}{0.833} = F(1.80) - F\left(\frac{x}{0.833}\right)$$

$$F\left(\frac{x}{0.833}\right) = 1.740 - 0.360 = 1.380$$

$$\frac{x}{0.833} = 1.491; \quad x = 1.25$$

Svar: Dämningarna bliva $u_1 = 1.37 - 1.00 = 0.37$ m och

$$u_2 = 1.25 - 1.00 = 0.25$$
 m

De olika resultat, som framkommit vid genomräkning av exempel 3.79 medelst passningsberäkningar och medelst olika teoretiska formler, ha sammanställts i tabell 7.

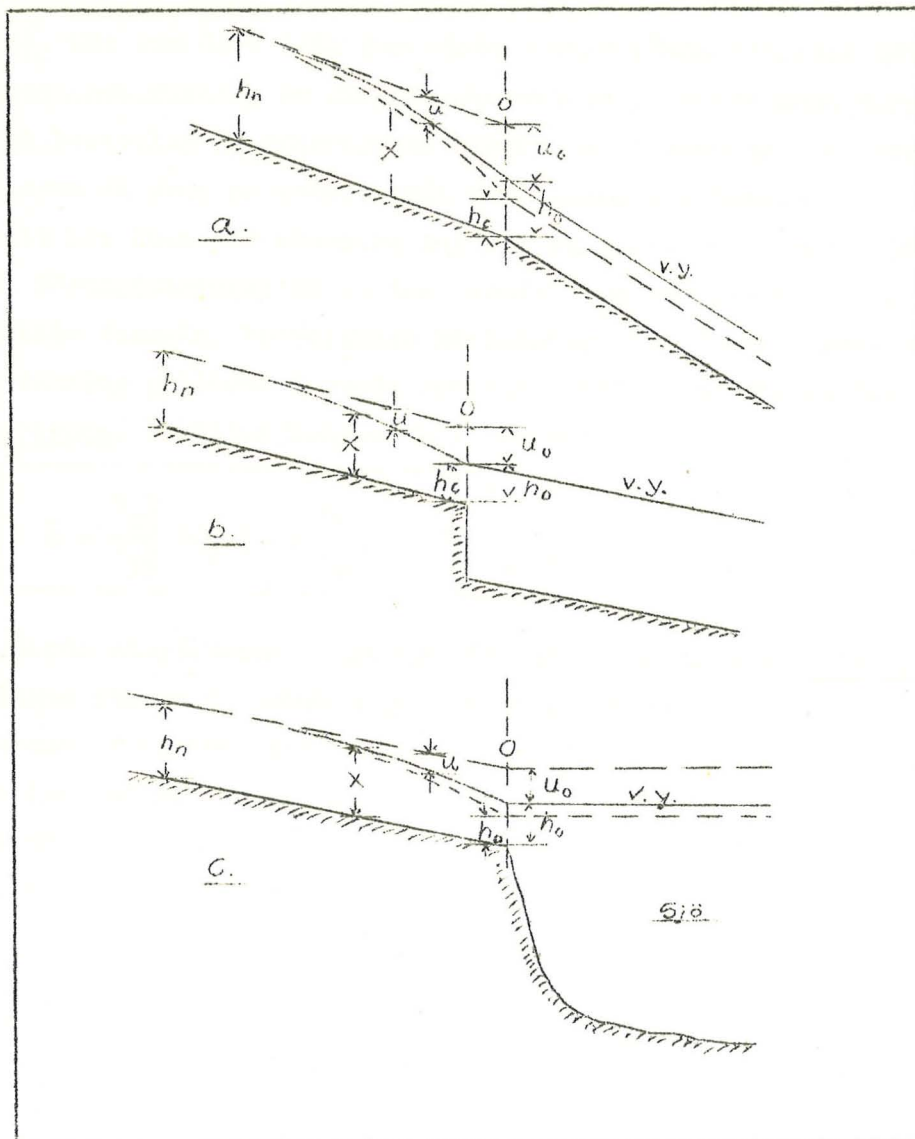


Fig. 3.78

Om t.ex. vattenytan i sjön på figur (3.78 c) skulle sänkas djupare än vad som svarar mot den undre streckade linjen, skulle detta icke ytterligare påverka sänkningskurvans förlopp. Istället skulle ett fall utbilda sig i sektionen 0. Derivatans $\frac{dx}{ds}$ är då $= -\infty$ i överensstämmelse med vad som tidigare påvisats. I motsats till vad fallet är vid dämning, där den maximala dämhöjden kan anses teoretiskt obegränsad, så är den möjliga sänkningen begränsad till värden över $h_n - h_c$. Detta innebär också att den maximala sänk-
ningsvidden \bar{l}_{\max} , d.v.s. avståndet från sektionen 0 till den sektion, där dämningen endast utgör 1 % av h_n , är begränsad. Tolkmitt anger härför formeln

$$\bar{l}_{\max} < \frac{3}{4} \frac{h_n}{I_1} \quad (3.116)$$

när vattendraget kan anses ha paraboliskt tvärsnitt (eller kunna approximeras till ett sådant).

Lösning: Tolkmitts formel för uppskattning av \bar{l}_{\max} lyder

$$\bar{l}_{\max} = \frac{3}{4} \frac{h_n}{I_1}$$

Således

$$\bar{l}_{\max_5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0.005} = 150; \quad \bar{l}_{\max_{0.5}} = 1.500 \quad \text{och}$$

$$\bar{l}_{\max_{0.05}} = 15000$$

Svar: De sökta sänkningsvidderna blir 150 m, 1.5 km och 1.5 mil.

Ex. 3.84. Bevisa att formeln

$$q = b \sqrt{g} \cdot h_c^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

är identiskt lika med formeln

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} \mu b \sqrt{2g} \cdot h_1^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

om $\mu = 1$ och de ingående storheterna ha de i kompendiet och av figuren 3.79 givna betydelserna.

Lösning: Av figuren framgår att

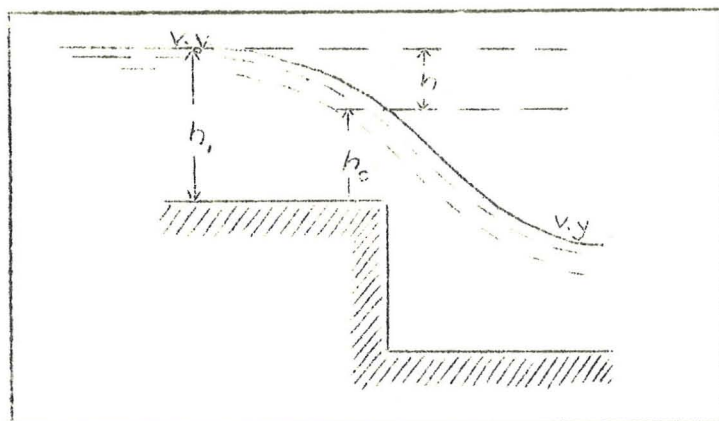


Fig. 3.79

$$h_1 = h_c + h \quad (a)$$

Vidare är enligt ekvation (3.97) och i avd. 44 gjorda utredningar

$$h_c = 2h \quad (b)$$

eller

$$h = \frac{h_c}{2} \quad \text{och}$$

$$h_1 = \frac{3}{2} h_c \quad (c)$$

Vi införa detta uttryck på h_1 i den andra av de givna formlerna. Således ($\mu = 1$)

$$q = \frac{2}{3\sqrt{3}} b \sqrt{2} \cdot \sqrt{g} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} h_c^{\frac{3}{2}}$$

$$q = \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}} \cdot b \sqrt{g} \cdot h_c^{\frac{3}{2}} = b \sqrt{g} \cdot h_c^{\frac{3}{2}}$$

Genom denna substitution har således ekvationen (2) givits identiskt samma form som ekvation (1). V.S.B.

LITTERATURANVISNINGAR.

Nedanstående litteraturförteckning avser icke att vara någon fullständig förteckning över litteratur, som kommit till användning vid kompendiets utarbetande. Den avser endast att ge anvisningar på några läroböcker, som lämpa sig för fortsatta studier av hydromekanik och hydraulik.

- Addison, H. : A treatise on applied hydraulics. 3. uppl., London 1948.
- Binder, R.C. : Fluid mechanics. 2. uppl., Newyork 1949.
- Forchheimer, P. : Hüdraulik. 3. uppl., Leipzig o. Berlin 1930.
- Fredholm, O. : Vattenavledning och invallning. Svenska jordbrukets bok. Stockholm 1941.
- Lundberg, T. : Hydromekanik. Örebro 1944.
- Munch-Petersen, J. : Praktisk hydraulik. Köpenhamn 1931.
- Rouse, H. : Elementary mechanics of fluids. 3. uppl. Newyork o. London 1946.
- Woodward, S. : Hydraulics of steady flow in open channels. 2. uppl. Newyork o. London 1947.